This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

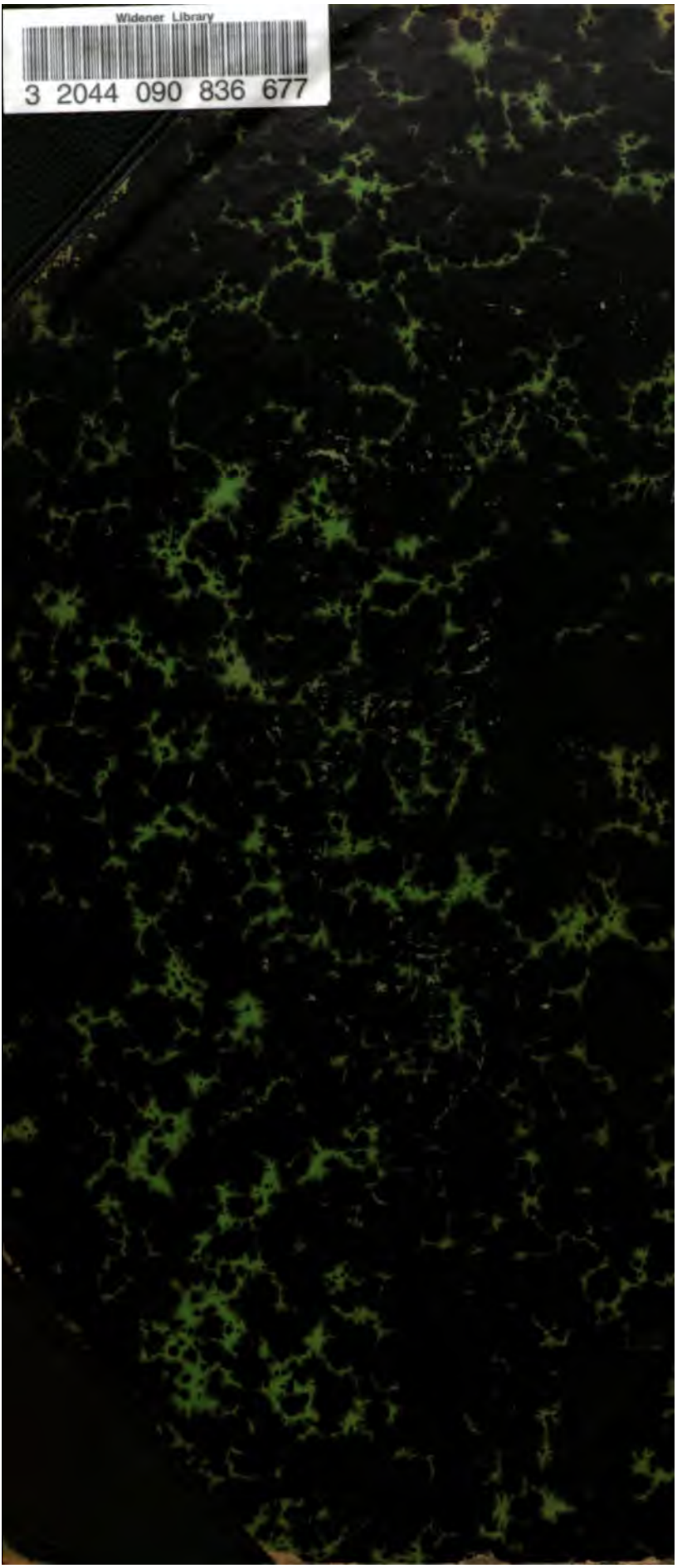
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Widener Library
3 2044 090 836 677



LSoc386.4

Bd. Dec., 1882.

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"

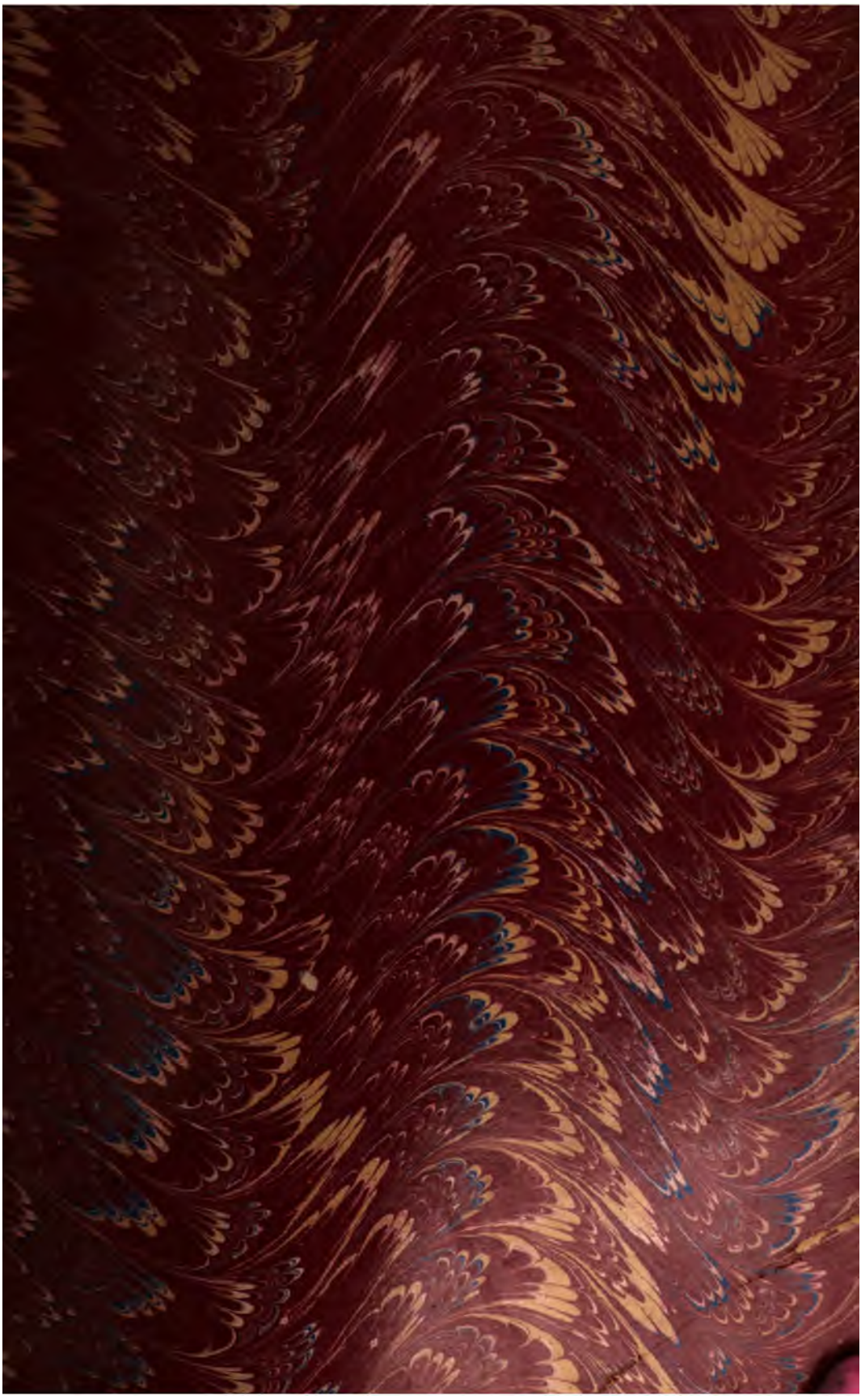
12 Sept. - 19 Oct.
1882

LSoc386.4

Bd. Dec., 1882.

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"

12 Sept. – 19 Oct.
1882



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

FÜNFUNDACHTZIGSTER BAND.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

1882.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LXXXV. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1882. — HEFT I BIS V.

(Mit 13 Tafeln, 2 Karten und 32 Holzschnitten.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1882.

~~H43.9~~
LSoc386.4

1882, Sept. 12 — Oct. 19.
Farmer's Friend.

INHALT.

Seite

I. Sitzung vom 5. Jänner 1882: Übersicht 3

Hann, Über die Temperatur der südlichen Hemisphäre. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 6

Liznar, Resultate magnetischer Messungen in Mähren und Schlesien. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 30

v. Ettingshausen, Bestimmungen der Diamagnetisirungszahl des metallischen Wismuths in absolutem Masse. (Mit 2 Holzschnitten.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 37

II. Sitzung vom 12. Jänner 1882: Übersicht 74

Haubner, Über die stationäre Strömung der Elektricität in flächenförmigen Leitern. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] . . 77

Gruss, Bahnbestimmung des Kometen V, 1877. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 98

Tumlirz, Über die Rotationsbewegung einer homogenen tropfbaren Flüssigkeit um eine Achse unter dem Einfluss der Reibung. [Preis: 22 kr. = 44 Pfg.] 105

— Über das Fliessen einer incompressiblen Flüssigkeit durch Röhren kreisförmigen Querschnittes von beliebiger Gestalt und beliebiger Lage. (Mit 3 Holzschnitten.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 133

v. Obermayer, Versuche über Diffusion von Gasen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 147

Peiz, Zum Normalenproblem der Kegelschnitte. (Mit 1 Tafel) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 169

III. Sitzung vom 19. Jänner 1882: Übersicht 175

Weidel, Beiträge zur Kenntniss der Tetrahydrocinchoninsäure. (Mit 5 Holzschnitten.) 180

IV. Sitzung vom 3. Februar 1882: Übersicht 205

V. Sitzung vom 9. Februar 1882: Übersicht 209

Maly u. *Hinteregger*, Studien über Caffeïn und Theobromin. III. Abhandlung. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 214

Maly u. *Andreasch*, Studien über Caffeïn und Theobromin. IV. Abhandlung 221

Senhofer, Über Naphtalintetrasulfosäure. [Preis: 10 kr. — 20 Pfg.] 240

Herzig, Über die Constitution des Guajols. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 247

Seite

Goldschmiedt u. *Herzig*, Über das Verhalten der Kalksalze der drei isomeren Oxybenzoësäuren und der Anissäure bei der trockenen Destillation 255

Goldschmiedt, Notiz über das Vorkommen von Bernsteinsäure in einem Rindenüberzug auf *Morus alba* 265

Lippich, Über polaristrobometrische Methoden. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 70 kr. = 1 RMk. 40 Pfg.] 268

Wassmuth, Über die Tragkraft von ringförmigen Elektromagneten. [Preis: 15 kr. 30 Pfg.] 327

Margules, Die Rotationsschwingungen flüssiger Cylinder. [Preis: 22 kr. = 44 Pfg.] 343

Adler, Über Strictionslinien der Regelflächen zweiten und dritten Grades. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 369

Peschka, Neue Eigenschaften der Normalenflächen für Flächen zweiten Grades längs ebener Schnitte. (Mit 3 Tafeln.) [Preis: 1 fl. = 2 RMk.] 381

VI. Sitzung vom 2. März 1882: Übersicht 411

Hann, Über den Föhn in Bludenz. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] . . 416

Lecher, Über Ausstrahlung u. Absorption. I. Abhandlung. (Mit 7 Holzschnitten.) [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.] 441

Gegenbauer, Das Additionstheorem derjenigen Functionen, welche bei der Entwicklung von e^{xzi} nach den Näherungsnennern regulärer Kettenbrüche auftreten. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 491

Schier, Über Potenzsummen rationaler Zahlen [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 503

VII. Sitzung vom 9. März 1882: Übersicht 509

Weyr, Über Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen cubischen Curve. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 513

v. Escherich, Die Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte mittelst reciproker Flächenbündel. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] . . . 526

Drasch, Beitrag zur synthetischen Theorie der ebenen Curven III. Ordnung mit Doppelpunkt. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 50 kr. = 1 RMk.] 534

Boehm, Über Schwefelwasserstoffbildung aus Schwefel und Wasser. [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 554

Haitinger, Vorläufige Mittheilung über Glutaminsäure und Pyrrol 558

Wächter, Über die materiellen Theile im elektrischen Funken. (Mit 2 Holzschnitten) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 560

Eder u. *Ulm*, Über das Verhalten von Quecksilberjodid zu unterschwefligsaurem Natron. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] . 584

Seite

VIII. Sitzung vom 16. März 1882: Übersicht 592

Kachler u. *Spitzer*, Über zwei isomere Bibromcampher aus Monobromcampher 596

Stefan, Über die magnetische Schirmwirkung des Eisens [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 613

Pick, Über die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 643

Ginzel, Astronomische Untersuchungen über Finsternisse. I. Abhandlung. (Mit 2 Karten.) [Preis: 1 fl. = 2 RMk.] . 663

v. Obermayer, Versuche über Diffusion von Gasen. II. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 748

Janovsky, Über Sulfosäuren des Azobenzols 762

IX. Sitzung vom 30. März 1882: Übersicht 774

Jahn, Über die Dampfdichte des Brom. (Mit 1 Holzschnitt.) . 778

— Zur Kenntniss der Aminbasen secundärer Alkohole . 797

Reinitzer B., Studien über das Verhalten der Acetate des Chroms, Eisens und Aluminiums 808

— *Fr.*, Analyse eines vegetabilischen Fettes. (Mit 1 Tafel.) 825

X. Sitzung vom 20. April 1882: Übersicht 835

Weyr, Über gemeinschaftliche Bisekanten algebraischer Raumcurven. [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 840

Le Paige, Über conjugirte Involutionen [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 844

Hočevar, Zur Integration der Jakobi'schen Differentialgleichung $Ldx+Mdy+N(xdy-ydx)=0$ [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.] 848

Bečka, Über die Bahn des Planeten Ino (173) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 865

Puluy, Strahlende Elektrodenmaterie. IV. Abhandlung. (Mit 8 Holzschnitten.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 871

Mauthner, Über das optische Drehungsvermögen des Tyrosins und Cystins [Preis: 8 kr. = 16 Pfg.] 882

XI. Sitzung vom 4. Mai 1882: Übersicht: 889

v. Escherich, Die Construction der algebraischen Curven und Flächen aus der Anzahl sie bestimmender Punkte mittelst reciproker linearer Systeme höherer Stufe. (Vorläufige Mittheilung.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 893

Simony, Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. (Mit 5 Tafeln.) (Preis: 75 kr. = 1 RMk. 50 Pfg.] 907

Gruss, Über die Bahn der Loreley (165). [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 929

Wegscheider, Über Derivate und Constitution der Opiansäure und Hemipinsäure 937

Seite

Skraup, Synthetische Versuche in der Chinolinreihe. 3. Mittheilung 970

Lustgarten, Über den Nachweis von Jodoform, Naphtol und Chloroform in thierischen Flüssigkeiten und Organen 975

XII. Sitzung vom 11. Mai 1882: Übersicht 983

Stefan, Über die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 987

Wassmuth, Über die specifische Wärme des stark magnetisirenden Eisens und das mechanische Äquivalent einer Verminderung des Magnetismus durch die Wärme. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 997

Hammerl, Beiträge zur Kenntniss der Hydratbildung von Salzen 1004

Weselsky u. *Benedikt*, Über einige Nitroproducte aus der Reihe des Brenzcatechins. (Mit 3 Holzschnitten.) [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 1013

Allé, Beiträge zur Theorie des Doppelverhältnisses und zur Raumcollineation. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1021

XIII. Sitzung vom 19. Mai 1882: Übersicht 1035

Winckler, Über die Entwicklung einer von dem Euler'schen Integrale zweiter Gattung abhängiger Ausdrücke in Reihen. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 1039

SEP 12 1882

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

ADEMIE · DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXV. BAND. I. HEFT.

Jahrgang 1882. — Jänner.

(Mit 2 Tafeln und 10 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1882.

INHALT

des 1. Heftes Jänner 1882 des LXXXV. Bandes, II. Abth. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

I. Sitzung vom 5. Jänner 1882: Übersicht 3

Hann, Über die Temperatur der südlichen Hemisphäre. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 6

Liznar, Resultate magnetischer Messungen in Mähren und Schlesien. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 30

v. Ettingshausen, Bestimmungen der Diamagnetisirungszahl des metallischen Wismuths in absolutem Masse. (Mit 2 Holzschnitten.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 37

II. Sitzung vom 12. Jänner 1882: Übersicht 74

Haubner, Über die stationäre Strömung der Elektricität in flächenförmigen Leitern. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] . . 77

Gruss, Bahnbestimmung des Kometen V, 1877. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 98

Tumlirz, Über die Rotationsbewegung einer homogenen tropfbaren Flüssigkeit um eine Achse unter dem Einfluss der Reibung. [Preis: 22 kr. = 44 Pfg.] 105

— Über das Fliessen einer incompressiblen Flüssigkeit durch Röhren kreisförmigen Querschnittes von beliebiger Gestalt und beliebiger Lage. (Mit 3 Holzschnitten.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 133

v. Obermayer, Versuche über Diffusion von Gasen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 147

Pelz, Zum Normalenproblem der Kegelschnitte. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 169

III. Sitzung vom 19. Jänner 1882: Übersicht 175

Weidel, Beiträge zur Kenntniss der Tetrahydrocinchoninsäure. (Mit 5 Holzschnitten.) 180

Preis des ganzen Heftes 1 fl. 50 kr. = 3 RMk.

SITZUNGSBERICHTE

DER

SERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXV. Band. I. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

I. SITZUNG VOM 5. JÄNNER 1882.

Herr Hofrath M. A. Ritter v. Becker in Wien übermittelt im Auftrage Seiner kaiserlichen Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Leopold eine mit Höchstdessen Unterstützung bearbeitete Monographie: „Hernstein in Niederösterreich.“ (Album und I. Theil: „Über die geologischen Verhältnisse.“)

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. L. Boltzmann in Graz übersendet eine Abhandlung des Herrn Prof. Albert v. Ettingshausen, betitelt: „Bestimmungen der Diamagnetisirungszahl des metallischen Wismuths in absolutem Masse.“

Der Secretär legt eine Abhandlung des Herrn Otto Schier, Bürgerschul-Fachlehrer in Brünn: „Über Potenzsummen rationaler Zahlen“ vor.

Das w. M. Herr Director Dr. J. Hann überreicht eine Abhandlung: „Über die Temperatur der südlichen Hemisphäre.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia de Ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana. Anales. Entrega 207 u. 208. Tomo XVIII. Octubre e Noviembre 15. Habana, 1881; 8°.

— das Sciencias de Lisboa: Memorias. Nova serie Tomo V parte II. Lisboa 1878; 4°. Tomo VI, Parte I (Volume XLVI da Collecçao). Lisboa, 1881; 4°.

— — Sessão publica em 9de Junho de 1880. Lisboa, 1880; 8°.

— Conferencias celebradas. Quarta Conferencia. Lisboa, 1880; 8°.

— — Elementos de Histologia geral e Histophysiologia por Eduardo Augusto Motta. Lisboa, 1880; 8°.

— — Jornal de sciencias mathematicas physicas e naturales. Nos. XXV, XXVI, XXVII, XXIX. Lisboa, 1879 u. 1880; 8°.

— Determinaçao dos eixos da sombra ou projecção obliqua

de um circulo por Luiz Porfirio da Motta Pegado. Lisboa; 8°. — Algumas notas ao Roteiro da viagem da India por D. João de Castro. Lisboa, 1880; 8°.

Académie de Médecine: Bulletin. 45ᵉ année, 2ᵉ série. Tome X, Nrs. 49—51. Paris, 1881; 8°.

— Royale de Copenhague: Oversigt over det Forhandlingar og dets Medlemmers Arbejder i Aret 1881. Kjøbenhavn, 1881; 8°.

— — Mémoires. 6ᵉ série. Vol. I. Nro. 3 et 4. Kjøbenhavn, 1881; 4°. Vol. II. Nos. 1 et 2. Kjøbenhavn, 1881; 4°.

Annales des Mines: 7ᵉ série. Tome XIX. 3ᵉ et 4ᵉ livraisons de 1881. Paris; 8°.

Apotheker-Verein, allgemeiner österreichischer: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XIX. Jahrgang, Nr. 35 u. 36. Wien, 1881; 8°. XX. Jahrgang, Nr. 1. Wien, 1882; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3ᵉ Période. Tome VI. Nr. 11. Genève, Lausanne, Paris, 1881; 8°. — Compte rendu des travaux. Octobre 1880. Genève, Paris Lausanne, 1880; 8°.

Cameron, J. F.: Aerial Navigation. New-York, 1881; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Statisches Jahrbuch für das Jahr 1880. XI. Heft. Wien, 1881; 8°.

— — Nachrichten über Industrie, Handel und Verkehr. XXII. Band 4. u. 5. Heft. Wien, 1881; 4°.

— — Ausweise über den auswärtigen Handel der österreichisch-ungarischen Monarchie im Jahre 1880. XXXXI. Jahrgang, V. Abtheilung. Wien, 1881; 4°.

Chemiker-Zeitung; Central-Organ. Jahrgang V. Nr. 51—54. Cöthen, 1881; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCIII. Nrs. 23—25. Paris, 1881; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. II. Jahrgang 1881. Heft XII. December. Berlin; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XIV. Jahrgang Nr. 18. Berlin, 1881; 8°.

Gewerbe-Verein, nied.-österr.: Wochenschrift. XLII. Jahrgang Nr. 50—52. Wien, 1881; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift, VI. Jahrgang, Nr. 50—52. Wien, 1881; 4°.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band 24. Nr. 19, 20, 21 u. 22. Leipzig, 1881; 8°.

Landbote, der steirische: Organ für Landwirthschaft und Landeskultur. XIV. Jahrgang. Nr. 15—24. Graz, 1881, 4°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXVII. Band, 1881. XII. Gotha, 1881; 4°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel XXVe année de Publication, 3e série. Tome XI. 480e livraison. — Décembre 1881. Paris; 4°.

Nature. Vol. XXV, Nrs. 632, 634 u. 635. London, 1881; 8°.

Observatory, The: A monthly Review of Astronomy. Nr. 54, 55 u. 56. London, 1881; 8°.

— the Royal at Greenwich: The nautical Almanac and Astronomical Ephemeris for the year 1885. London, 1881; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1881. XXXI. Band Nr. 2 u. 3. April—September. Wien, 1881.; 8°.

Societas pro Fauna et Flora fennica: Meddelanden. 6., 7. u. 8. Häftet. Helsingfors, 1881; 8°.

Société mathématique de France: Bulletin. Tome IX, Nr. 4. Paris, 1881; 8°.

Society the Royal astronomical: Monthly Notices, Vol. XLII. Nr. 1. November, 1881. London; 8°.

— the Royal microscopical: Journal. Ser. II. Vol. 1. Part. 6. December 1881. London; 8°.

— the Royal geological of Ireland: Journal. Vol. XVI; Part. I. 1880—81. London, Dublin, Edinburgh 1881; 8°.

Verein, entomologischer in Berlin: Berliner Entomologische Zeitschrift. XXV. Band, 2. Heft. Berlin, 1881; 8°.

— physikalischer zu Frankfurt am Main: Jahresbericht für das Rechnungsjahr 1879—80. Frankfurt a. M., 1880; 8°.

— militär-wissenschaftlicher, in Wien: Organ. XXIII. Band, 4. Heft. Wien, 1881; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift XXXI. Jahrgang. Nr. 51—53. Wien, 1881; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. III. Jahrgang Nr. 2 u. 3. Wien, 1881; 8°.

Über die Temperatur der südlichen Hemisphäre.

Von dem w. M. **J. Hann.**

Durch die Publication der Resultate der meteorologischen Beobachtungen, welche die französische Expedition zur Beobachtung des Venusdurchganges im südhemisphärischen Frühling und Sommer 1874 auf der Insel St. Paul angestellt hat,[1] bin ich neuerdings angeregt worden, den Versuch zu machen, die Frage nach der Temperatur der südlichen Hemisphäre in höheren Breiten nach dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse zu beantworten.

Seitdem ich im Jahre 1872 auf Grund der von mir zuerst berechneten, oder doch gesammelten Beobachtungsresultate in den höheren Breiten der südlichen Halbkugel,[2] in Südamerika und auf Neuseeland, den Versuch gemacht habe, über den damaligen Stand der vorliegenden Frage hinauszugehen und an die von Dove bis zum 40° S. Br. berechneten Mitteltemperaturen noch jene der Parallele von 45, 50 und 55° anzuschliessen,[3] sind relativ wenige, aber interessante und wichtige, neue Beobachtungsdaten hinzugekommen.

Im III. Jahrgange der Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie (Berlin 1875) sind die Resultate der meteorologischen Beobachtungen der deutschen Venusexpedition auf der Kerguelen-Insel publicirt worden, was mir den Wunsch nahe legte, die bisher unberechneten Beobachtungen, welche Sir James Ross im südlichen Winter 1840 im Christmashafen anstellte, zu reduciren.

---

[1] Recueil de Mémoires, Rapports et Documents relatifs à l'observ. du Passage de Vénus sur le soleil. Tome II, II. partie. Paris 1880.

[2] Zeitschrift für Meteorologie, Band V bis VII.

[3] Über die Wärmevertheilung auf der südlichen Halbkugel. Zeitsch. für Met. VII B. p. 261/64.

Herr Robert Scott hatte die besondere Gefälligkeit, mir zu diesem Zwecke eine Copie des Logbuches des „Terror" zu übermitteln.

Ich gelangte so zu einer genäherten Kenntniss des Jahresmittels der Temperatur der Kerguelen-Insel, welches für die Beurtheilung des Seeclima's der südlichen Hemisphäre von höchster Wichtigkeit erscheinen muss.[1] Seitdem hat Perry auch die Resultate der Beobachtungen der englischen Expedition auf Kerguelen Island publicirt und die Logbücher beider Schiffe der Ross'schen Expedition im Anschluss daran berechnet.[2] Hienach ist der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Temperatur der Kerguelen-Insel folgender:

Deutsche Expedition in Betsy Cove 49°9′ S. 70°10′ E. L. Dec. 5°2, Jänn. 5°5, Febr. (wahrscheinlich) 6°3, Sommermittel 5°7.

Englische Expedition 49°25′ S. Br., 69°54′ E. L. Dec. 6°6, Jänn. 6°8, Febr. 7°6, Sommermittel 7°0.

James Ross, Christmashafen 48°41′ S., 69°2′ E. L. Mittel beider Schiffe, Winter circa 2°0 (Juli 1°8).

Jahresmittel demnach genähert 4°2.

Es ist dies eine ganz auffallend niedrige Jahrestemperatur für den 49. Breitegrad, und zwar ist es die Sommertemperatur von nur 6°4, welche diese Anomalie hervorbringt, während eine Wintertemperatur von circa 2° gemässigt genannt werden kann.

Im Jahre 1878 (Zeitschrift für Meteorologie, XIII. Band) veröffentlichte Herr Dr. Schur die Resultate der meteorologischen Beobachtungen der deutschen Venusexpedition auf den Auckland-Inseln. Die Mitteltemperatur von vier vollen Monate war hier:

	Nov.	Dec.	Jänn.	Febr.
Auckland-Insel 50°32′ S. Br. 166°5′ E. v. Gr.	8°2	9°6	10°1	9°7.

Das Sommermittel ist hiernach 9°8, also viel höher als auf Kerguelen Island, obgleich die mittlere Bewölkung des Sommers

---

[1] Zeitschrift für Meteorologie, XII. Band, 1877, p. 100.

[2] Report on the Meteorology of Kerguelen Island by Rev. S. J. Perry. London 1879.

81% war und in allen drei Monaten zusammen man nur 10 regenlose Tage zählte. Wenn man den nun gut constatirten jährlichen Wärmegang der ganz ähnlich gelegenen und nahe gleich temperirten Falklands-Inseln zu Grunde legt, erhält man für die mittlere Jahrestemperatur der Auckland-Inseln mit grosser Wahrscheinlichkeit den Werth 7°0 C.

Die mittlere Temperatur der Falklands-Inseln ist früher zu hoch angegeben worden mit 8°5 C. [1]; die von Herrn Cobb in den Jahren 1875—77 den jetzigen Anforderungen der Wissenschaft entsprechend angestellten Beobachtungen zu Stanley Hafen 51°41′ S. Br., 57°51′ W. L. geben als Mittel der drei Jahre 6°1; Jänner 9.8, Juli 2.5.[2]

Dazu kommen nun die von der französischen Venusexpedition auf St. Paul angestellten Beobachtungen. Sie geben folgende Mittelwerthe nach sechs täglichen äquidistanten Beobachtungen:

St. Paul 38°43′ S. Br. 75°11′ E. L. Oct. 11°9, Nov. 12°6 und Dec. 14°5.

Nimmt man hiezu die von Herrn Scott in Quarterly Journal vol. II, p. 281 gesammelten älteren Beobachtungen auf St. Paul, namentlich Juli 1871 mit 10°7 C., erste Hälfte August 12°9, Jänner 1853, 10 Tage mit 16°8, Nov. und Dec. 1857, 22 Tage mit 13°7, so kann man die mittlere Jahrestemperatur auf St. Paul mit genügender Annäherung an die Wahrheit zu 12°6 annehmen.

Das ist alles, was von Temperaturbeobachtungen auf festen Stationen oceanischer Lage in Breiten südlich von 35° S. Br. seit 1872 mir bekannt geworden. Es genügt aber, um den Versuch zu rechtfertigen, die Beantwortung der Frage nach der Temperatur der südlichen Hemisphäre jenseits 40° S. Br. neuerdings aufzunehmen und einer gründlicheren Untersuchung zu unterziehen, als dies meinerseits in der citirten kleinen Abhandlung aus dem Jahre 1872 geschehen ist.

Es hat auch letzthin Herr Woeikoff in einer interessanten Abhandlung „Gletscher und Eiszeiten in ihrem Verhältnisse zum Clima“ [3] mein damals gefundenes Resultat, dass die südliche

[1] Dove, Klimatologische Beiträge, Band II, p. 115.

[2] Zeitschrift für Meteorologie, XVI. Band, 1881, p. 299.

[3] Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin, Jahrgang 1881.

Hemisphäre schon zwischen den 40° und 45° S. Br. wärmer werde, wie die nördliche Hemisphäre mit Beziehung auf die niedrige Temperatur von Kerguelen Island in Zweifel gezogen und die Ansicht vertreten, dass die südliche Hemisphäre erst von 59 bis 60° Br. an wärmer sei als die nördliche, natürlich, worin wir übereinkommen, nur bis an die Grenze des hypothetischen antarctischen Continents.

Die Ansicht, dass die südliche Hemisphäre, welche nach Dove bis zum 40° Breitegrade entschieden kühler ist, als die nördliche, in höheren Breiten dagegen eine höhere mittlere Temperatur hat als die nördliche Hemisphäre, ist in neuerer Zeit schon mehrfach ausgesprochen und nachzuweisen versucht worden.

Zunächst hat Dove selbst (Verbreitung der Wärme auf der Erdoberfläche, Berlin 1852, p. 15) die Meinung geäussert, dass der bis zum 40. Breitegrad bestehende Temperaturunterschied beider Hemisphären in höheren Breiten das Zeichen zu wechseln scheint. Hopkins ist in einer interessanten Abhandlung, die im Februar 1852 erschienen ist,[1] auf Grund der Dove'schen Isothermkarten zu dem Resultat gekommen, that for the latitudes above 40° the mean temperature for a whole parallel of latitude is higher in the south than for the corresponding parallel in north latitude.

Sartorius von Waltershausen hat in seinem Werke „Untersuchungen über die Climate der Gegenwart und Vorwelt" (Haarlem 1865) eine mathematische Discussion der Temperaturverhältnisse auf einer Land- und auf einer Wasserhemisphäre geliefert, deren Resultat war, dass das Continentalclima von 33°24′ an gegen den Pol hin kälter ist, als das reine Seeclima. Nach der in der That bestehenden Vertheilung von Wasser und Land auf beiden Hemisphären müsste demnach gleichfalls bald jenseits des 40. Breitegrades die südliche Hemisphäre wärmer werden als die nördliche.

Die Beobachtungsdaten, auf welche S. v. W. seine Analyse des Land- und Seeclimas basirte, müssen aber jetzt als unzureichend und theilweise unrichtig bezeichnet werden. Eine viel

[1] On the causes which may have produced changes in the Earth's superficial Temperature. Quarterly Journal Geolog. Soc. vol. VIII.

werthvollere, und auf mehr physikalischer Basis beruhende Untersuchung über den Einfluss der relativen Wasser- und Landbedeckung eines Parallels, auf dessen mittlere Temperatur hat der bekannte englische Physiker James D. Forbes geliefert.[1] Es ist dies wohl die beste theoretische Untersuchung über die Temperaturvertheilung auf der Erdoberfläche, die wir überhaupt besitzen. Forbes kommt zu dem Resultate, dass in $42^1/_2°$ die Umkehrung des Temperaturgegensatzes zwischen einer Wasser- und einer Landhemisphäre stattfindet. Die nach seinen Formeln und Deductionen ermittelten Temperaturen einer Wasserhemisphäre unter dem 40 und 50° Breitegrade sind[2] 12°7 und 7°6. Da nun nach Dove die mittlere Temperatur der nördlichen Hemisphäre unter 40° 13°6, unter 50° 5°8 C. ist, so würde auch hiernach von circa 45° S. Br. an die südliche Hemisphäre wärmer sein als die nördliche.

Nur vorübergehend mag hier auch die Abhandlung von F. Valle's genannt werden: Distribution des temperatures de long des côtes océaniques (Annuaire de la Soc. mét. de France, 1869. Erschienen Dec. 1871), welche zum Theil zu ähnlichen Schlüssen führt, aber auf ungenügendem Beobachtungsmaterial basirt.

Ganz neuerlich hat Ferrel auf Grundlage der Isothermenkarten Buchan's die mittlere Temperatur des Jänner und Juli, sowie des Jahres für alle Breitekreise von 80° N. Br. bis 60° S. Br. zu ermitteln gesucht. Er hat aber hiebei auf Grundlage der „Contributions to our Knowledge of the Meteorology of Cap Horn and the West-Coast of South-America" (London 1871) die südlichen Isothermen in etwas höhere Breiten gerückt, als Buchan sie verzeichnet hatte.[3] Die mittlere Jahrestemperatur der Parallelgrade von 80° N. Br. bis 60° S. Br. lässt sich nach Ferrel wiedergeben durch die Formel:

$$t = 8{\cdot}50 - 1°75 \cos \vartheta - 20°95 \cos 2\vartheta - 1{\cdot}00 \cos 3\vartheta - 2{\cdot}66 \cos 4\vartheta$$

[1] Inquiries about Terrestrial Temperature. Transactions Royal Soc. of Edinburgh vol. XXII. Part I, 1859.

[2] Von mir berechnet als Mittel der aus der Formel folgenden und der aus einer graphischen Darstellung sich ergebenden Temperaturen.

[3] Meteorological Researches for the use of the Coast Pilot, Part I, Washington 1877.

ϑ ist 0 für den Nordpol, 90° für den Äquator und 180° für den Südpol. Die mittlere Temperatur der nördlichen Hemisphäre findet sich hieraus zu 15°3, die der südlichen zu 16°1. Die südliche Hemisphäre würde, nach den von Ferrel gefundenen Temperaturen der Breitekreise, schon von 35° S. Br. an wärmer sein als die nördliche Hemisphäre. Dass Herr Ferrel für die höheren südlichen Breiten etwas zu hohe Temperaturen gefunden hat, kann nicht zweifelhaft sein, und es ist dies darin begründet, dass er die Temperatur in der Umgebung des Cap Horn für diese Breite unter allen Meridianen gelten liess.

So viel ist aber gewiss, dass für die höhere Temperatur der südlichen Hemisphäre jenseits des 40. Breitegrades so viele Indicien zu sprechen scheinen, dass die beobachtete niedrige Temperatur auf der Kerguelen-Insel allein alle die eben angeführten Schlussfolgerungen nicht zu entkräften im Stande wäre, und dass ich Recht hatte, die Temperatur des genannten Punktes als abnorm niedrig zu erklären.

Ferrel kannte die Resultate der Beobachtungen auf der Kerguelen- und Auckland-Insel noch nicht, als er seine Rechnungen durchführte, sie wurden ihm erst während des Druckes seiner Arbeit bekannt, und er bemerkt darüber in einer Note: „If, however, the observations upon which the results obtained by Dr. Hann (Zeitschrift für Meteorologie, VII, S. 261 und XII, S. 100) are based, had been on hand at the time, the values of t in Table V would most probably have been diminished a very little in the extreme southern latitudes, and then the results obtained for the average temperatures of the two hemispheres might have been about equal".

Ferrel ist also der Ansicht, dass die neueren Beobachtungen an seinem Resultate wenig geändert haben dürften.

Unter diesen Verhältnissen schien es mir bei dem hohen Interesse, welches die Temperaturverhältnisse der südlichen Hemisphäre für die Physik der Erde, sowie für die Beantwortung mancher Fragen der Geologie ein Anspruch nehmen können, zweckmässig, eine neue Berechnung derselben in Angriff zu nehmen.

Zunächst nahm ich eine Revision und Erweiterung meiner Rechnung in Band VII der Zeitschrift für Meteorologie vor. Ich lasse die Resultate derselben hier in aller Kürze folgen.

I. Isothermen im Meridian von Neuseeland.

Station	Breite	Jahrestemperatur beob.	berech.	Diff.
Mongonui-Auckland	35°56′	15·4	15·7	+0·3
Taranaki-Napier	39 16	14·2	13·9	—0·3
Wellington-Nelson	41 16	12·9	12·7	—0·2
Hokitika-Christchurch	42 37	11·5	11·9	+0·4
Dunedin-Martendall	46 4	10·7	10·0	—0·7
Auckland-Insel	50 32	7·0	7·4	—0·4

$$T\varphi = 10{\cdot}59 - 16{\cdot}48 \cos 2\varphi.$$

II. Isothermen im Meridian von Tasmanien.

		beob.	berech.	Diff.
Adelaide-Sydney	34°22′	17·2	16·3	—0·9
Gabo Island	37 34	14·7	15·0	+0·3
Melbourne	37 49	14·6	14·9	+0·3
Cape Otway, P. Albert	38 45	13·4	14·5	+1·1
Kings J., Goss J., Swans J.	40 00	14·0	14·0	0·0
Swansea	42 08	13·7	13·0	—0·7
Hobarton	42 52	12·6	12·7	+0·1
South Bruni, Port Arthur	43 20	12·7	12·5	—0·2

$$T\varphi = 11°77 + 12{\cdot}58 \cos 2\varphi.$$

III. Isothermen im Meridian der Westküste von Südamerika.

		beob.	berech.	Diff.
Valparaiso	33°01′	14·4	14·3	—0·1
Constitution	35 20	13·5	13·4	—0·1
Conception	36 48	13·2	12·8	—0·4
Valdivia	39 49	11·7	11·6	—0·1
Puerto Montt	41 30	11·0	10·9	—0·1
Ancud	41 46	10·7	10·8	+0·1
Chonos-Inseln	43 52	9·1	9·9	+0·8
Punta Arenas	53 10	6·2	6·1	—0·1

$$T\varphi = 9°45 + 12{\cdot}04 \cos 2\varphi.$$

IV. Isothermen im Meridian der Ostküste von Südamerika.

	Breite.	beob.	berech.	Diff.
Buenos Aires	34°37′	17·1	17·5	+0·4
Montevideo	34 54	16·8	17·3	+0·5
Bahia blanca	38 43	16·0	14·9	—1·1
Falklands-Inseln	51 41	6·1	6·4	+0·3
Cap Horn	56 08	3·7	3·7	0·0

$$T\varphi = 10°78 + 18·84 \cos 2\varphi.$$

V. Isothermen im Meridian von St. Paul.

		beob.	berech.	Diff.
Mauritius	20° 6′ S.	23·9	24·0	+0 1
St. Paul	38 43 „	12·6	12·3	—0·3
Kerguelen	49 17 „	4·3	4·5	+0·2

$$T\varphi = 7·68 + 21°36 \cos 2\varphi.$$

Mittelst dieser Gleichungen erhält man dann folgende Temperaturvertheilung zwischen 35° und 55° S. Br. längs fünf Meridianen:

Meridian von	35°	40°	45°	50°	55°	S. Br.
St. Paul	15·0	11·4	7·7	4·0	0·4	
S.-Amerika W. K.	13·6	11·5	9·5	7·4	5·3	
„ E. K.	17·2	14·0	10·8	7·5	4·3	
Neuseeland	16·2	13·4	10·6	7·7	5·0	
Tasmanien	16·1	14·0	11·8	—	—	
Mittel	15·6	12·9	10·1	6·7	3·8	
Nordhemisphäre	17·3	13·6	9·5	5·4	2·2	
Differenz	—1·7	—0·7	+0·6	+1·3	+1·6	

Nach dieser Tabelle findet also die Umkehrung der Temperaturdifferenz der beiden Hemisphären unter $42\frac{1}{2}°$ Breite statt, genau dort, wo sie Forbes theoretisch erschlossen hat. Die obigen Differenzen dürften den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse über den Temperaturunterschied der beiden Hemisphären genau zum Ausdruck bringen.

Vielleicht möchten Vertreter einer niedrigeren Temperatur der südlichen Hemisphäre (wie Herr Woeikoff) gegen meine Aufstellung noch einwenden, dass in den Mittelwerth die warmen Meridiane mit grösserem Gewicht eingetreten sind, als der (einzige) kalte im indischen Ocean. Darauf müsste ich erwidern, dass wir eben nur Einen abnorm kalten Meridian kennen und wir nur mit bekannten Grössen rechnen können. Wollte man nach der Temperatur der Kerguelen-Insel jene der höheren Breiten der südlichen Hemisphäre überhaupt beurtheilen, so müsste man ebenso fehlgehen, als wenn man nach der Temperatur von Jakutsk z. B. auf die mittlere Temperatur der nördlichen Hemisphäre unter gleicher Breite schliessen wollte. Es ist überdies kein Grund vorhanden, den Meridian der Westküste Südamerikas zu den warmen zu zählen, er müsste eher zu den kalten gerechnet werden; auch die Ostküste Südamerikas unter höheren Breiten kann kaum den Gebieten positiver Wärmeanomalie beigezählt werden.

Wollte man aber trotzdem die Temperatur an der Südspitze von Südamerika als Vertreter eines warmen Meridianes gelten lassen und aus ihr und jener im Meridian St. Paul-Kerguelen auf die mittlere Temperatur der südlichen Halbkugel unter höheren Breiten schliessen, so würde das Resultat noch immer zu unseren Gunsten ausfallen. Wir wollen einer solchen Rechnung die in den Contributions to our Knowledge of the Meteorology of Cape Horn (London 1871) publicirten Beobachtungen der Lufttemperatur zu Grunde legen. Die drei Gradfelder zwischen 65 und 80° W. L., 50—55° S. Br., und die vier Gradfelder zwischen 60 und 80° W. L. und 55—60° S. Br. geben aus zahlreichen Beobachtungen folgende Mitteltemperaturen der Luft unter circa 70° W. L.

	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Jahr
52½° S. Br.	9·3	5·1	4·3	6·7	6·3
57½° „	7·0	5·1	3·2	4·3	4·9

Daraus erhält man:

	50°	55°	60°	S. Br.
für 70° W. Länge	7·0	5·6	4·2	
Meridian von Kerguelen	4·0	0·4	—3·0	
Mittel	5·5	3·0	0·6	
Nördliche Hemisphäre	5·4	2·2	—1·0	
Unterschied	+0·1	+0·8	+1·6	

Also selbst unter dieser ungünstigsten Voraussetzung finden wir schon von 50° S. Br. an die südliche Hemisphäre wärmer als die nördliche. Es dürfte jedoch keinem Zweifel unterliegen, dass die für 55 und 60° S. Br. im Meridian von Kerguelen berechneten Mitteltemperaturen zu niedrig sind, weil man die rasche Wärmeabnahme zwischen Mauritius und Kerguelen nicht in gleichem Maasse noch weiter nach Süden hin herrschend annehmen darf.

Wir glauben demnach an unserem Satz festhalten zu dürfen, dass nach den bis jetzt vorliegenden Temperaturbeobachtungen die südliche Hemisphäre schon zwischen dem 40 und 50° Breitegrade wärmer wird als die nördliche.

Der Gedanke, den Sartorius von Waltershausen dem XII. Abschnitte seines Werkes über die „Climate der Gegenwart und Vorwelt" zu Grunde legte, durch zweckmässige Combination der von oceanischen Inseln vorliegenden Temperaturbeobachtungen die Temperaturverhältnisse im reinen Seeclima abzuleiten, muss als ein glücklicher und fruchtbarer bezeichnet werden. Die Ausführung desselben konnte S. v. W. aber desshalb nicht befriedigend gelingen, weil er einerseits die zu Grunde gelegten Daten unzweckmässig wählte, andererseits die für die Lösung des Problems nöthigen Beobachtungselemente ihm überhaupt damals fehlen mussten.

S. v. W. beschränkte sich leider nicht darauf, die Daten zur Ermittlung des reinen Seeclimas aus der südlichen Hemisphäre zu entnehmen, er wollte auch das Seeclima der nördlichen Halbkugel ableiten, während es doch nur Ein Seeclima geben kann, und die Inseln der nördlichen Hemisphäre in höheren Breiten durchgängig kein normales Seeclima besitzen.

Indem er der Rechnung die Temperaturen von Singapore, Barbados, Honolulu, Madeira, St. Michael (Azoren), dann mit einem weiten Sprung die ganz abnormen von Thorshaven und Reykiavig als Repräsentanten der Temperatur von 62 und 64° N. Br. im Seeclima zu Grunde legte, gelangte er zu dem absurden Resultat, dass für das Seeclima die Temperatur des Nordpoles noch etwas über 0° liegt. Auf einer Wasserhemisphäre kann es keine solche Concentrirung warmen Wassers in höheren Breiten geben, wie sie der nordatlantische Ocean darbietet; schon in dem weiteren nördlichen Pacific sind, trotzdem auch dort die

Festlandsküsten convergiren und den Ocean sogar vollkommen vom Eismeere abschliessen, keine ähnlichen hohen Inseltemperaturen mehr zu finden, wie sie die Faröer Inseln und Island aufzuweisen haben.

Die Temperatur des südlichen Seeclimas suchte S. v. W. zu bestimmen aus den Temperaturen von Batavia und Samarang, Ascension, St. Helena, Port Louis und St. Denis, Auckland, St. Paul (hypothetisch zu 14°0 angesetzt), Maquarie, Falklands-Inseln, Port Famine und Cap Horn. Die zu Grunde gelegten Temperaturen sind (Dove's Tafeln entnommen) zum Theil zu hoch, so P. Louis mit 25°9, Falklands-Inseln mit 8°5; dagegen ist Port Famine zu niedrig mit 5·5, Cap Horn wohl ziemlich richtig mit 4°1 angesetzt. Aus 19 Temperaturstationen in beiden Hemisphären fand er für das Seeklima (in Cels. Graden):

$$T\varphi = 12\cdot17 + 3\cdot14 \sin\varphi + 14\cdot26 \cos 2\varphi.$$

Daraus ergäbe sich für das Seeclima der südlichen Hemisphäre:

Breite	Äquator	10°	20°	30°	40°	50°	60°	Pol
Temp. Cels.	26·4	25·0	22·0	17·7	12·6	6·9	2·3	—5·2

Diese berechneten Temperaturen sind für die niedrigen Breiten zu niedrig, für die höheren etwas zu hoch und können überhaupt wegen der geringen Anzahl von zum Theile mangelhaften Beobachtungen, die ihnen zu Grunde liegen, keine grössere Bedeutung beanspruchen. Die Gleichmässigkeit der Temperatur in höheren südlichen Breiten ist aber doch so gross, dass die von S. v. W. für 40 und 50° berechneten Temperaturen von den von mir auf Grund zahlreicher neuerer Beobachtungen abgeleiteten und in der Tabelle auf S. 8 zusammengestellten Daten nicht bedeutend abweichen.

Es schien mir von allgemeinerem wissenschaftlichem Interesse die Rechnung S. v. W. auf Grund des neueren und viel reichlicheren Materiales wieder aufzunehmen.

Zu diesem Zwecke legte ich mir zunächst eine Tabelle der Resultate aller auf oceanischen Inseln angestellten Temperaturbeobachtungen an, in der einfachsten Form, nur das Mittel des Jahres und des wärmsten und kältesten Monates enthaltend.

Diese Temperaturmittel sind durchwegs auf das Meeresniveau reducirt, als Wärmeabnahme mit der Höhe wurde hier (wie bei den vorhin benutzten Daten) der Betrag von 0°5 für je 100 Meter angenommen. Beinahe alle benützten Temperaturstationen liegen übrigens ohnehin fast im Meeresniveau. Die Temperaturen ozeanischer Inseln der Nordhemisphäre wurden der Vollständigkeit wegen in die Tabelle aufgenommen, zu weiteren Rechnungen wurden nur jene der Südhemisphäre verwendet, mit einigen später zu erwähnenden Ausnahmen.

S. John's (Neufundland) habe ich nur des interessanten Vergleiches mit der unter gleicher Breite liegenden Vancouver-Insel eingestellt. Im Sommer hat S. John's oceanische Temperatur, im Winter dagegen eine etwas gemässigt continentale.

Manche Stationen, die eigentlich nicht oceanisch liegen, können doch in Bezug auf ihre Temperatur den oceanischen Stationen eingereiht werden. So in der Passatregion die meisten Orte an den Ostküsten der Continente, da sie beständig nur Seeluft erhalten. Desshalb habe ich Zanzibar in die Tabelle aufgenommen und später auch Pernambuco benützt. In gemässigten Breiten wieder, dort wo die Westwinde fast continuirlich wehen, können manche Inseln nahe der Westküste eines Continents gleichfalls als oceanische Temperaturstationen dienen, so die Insel Chiloe. Die wenigen Ausnahmen in Betreff der Benützung der Temperaturen nicht rein oceanisch liegender Stationen wurden übrigens nur für die südliche Hemisphäre gemacht, welche ohnehin ein vorwiegend oceanisches Clima hat und wo der Einfluss des Continents selbst an dessen Küsten sehr geringfügig bleibt.

Die folgende Tabelle dürfte, wie ich glaube, eine ziemlich vollständige Zusammenstellung der Inseltemperaturen von beiden Hemisphären liefern. Inseln in Binnenmeeren wurden absichtlich nicht aufgenommen, desshalb ist keine der westindischen Inseln in derselben vertreten; auch die Sundainseln sind desshalb nur durch Batavia und Amboina vertreten. Für Hobarton wurde die Temperatur der ersten acht Jahre auf dem Rossbank-Observatory eingestellt, welche viel niedriger (fast um 2° C.) ist, als die des neuen Observatoriums in der Stadt; es bleibt also kein Verdacht, dass die Jahrestemperatur hier continental beeinflusst, respective hoch ist.

Temperatur Oceanischer Inseln.

I. Nordhemisphäre.

Ort	Nördl. Breite	Länge v. Gr.	Jahre	Jahr	Wärmster Monat	Kältester Monat	Differenz	Quellen Nachweis
Stykkisholm	65° 4′	22°43′ W	26	2·8	9·5	2·2	11·7	Zeitsch. für Met. VII 360
Reykiavig[1]	64 8	21 55	14	4·1	10·5	2·0	12·5	Z. VI 45
Thorshaven	62 2	6 43	13	6·3	10·9	3·1	7·8	Z. XVI 311
Bressay, Shetlands I.	60 10	1 10	13	7·4	12·7	3·5	9·2	Journ. Sc. Met. S. III
S. Pauls-Insel[2]	57 7	170 18	11	1·1	8·6	5·7	14·3	neu berechnet
Illjuljuk (Unalaschka)[3]	53 52	166 25	9	3·6	11·1	1·8	12·9	detto
[S. Johns, Neufundland[4]	47 36	52 54	12	4·5	15·3	5·3	20·6]	Schott's Temp. Tafeln
bei Vancouver Isl.	47 ½	122 ½	3	9·3	15·2	4·1	11·1	Z. IX 187
Angra, Azoren	38 36	27 15	9	17·3	22·2	13·7	8 5	Z. XI 203
P. Delgada, Azoren	37 40	25 25	9	17·4	22·0	13·9	8·1	„ „
Funchal, Madeira	32 38	16 55	9	18·9	22·8	16·0	6·8	„ „
Bermudas	32 23	64 40	12	20·9	26·7	16·5	10·2	Z. IX 131
Nafa (Lu-Tschu-Insel)	26 13	128 44 E	2	22·4	28·6	15·7	12·9	Z. VII 47
Waioli (Sandw.-Insel)	22 15	159 ½ W	1	22·2	24·6	19·1	5·5	Z. VIII 70
Honolulu (S. I.)	21 16	157 59	3	24·1	26·2	21·8	4·4	Z. VIII 70
Praia, Cap. Verd.-Inseln	14 54	23 31	5	24·6	26·7	22·3	4·4	Z. XVI 297
Manilla	14 35	120 56 E	4	26·1	28 2	24 3	3·9	Z. V, VIII, XV 70, 331, 999
P. Blair, Andamanen	11 41	92 42 E	7	27·1	29·0	26·2	2·8	Z. XI 28
Nancowry, Nicobaren	8 0	93 46 E	5 6	26·8	28·2	26·1	2·1	Blanfort Met. Rep.
Atl. Ocean	5 0	20—30° W	4 circa	26·0	26·8	25·1	1·7	Z. X 62
Fernando Po	3 46	8 36 E	4½	25·7	27·8	24·1	3·7	Z. VIII 47
S. Thomé	0 20	6 43 E	8 — 9	25·2	25·9	24·0	1·9	Z. XIV 58 u. neuere Beob.

[1] Sommer der älteren Reihe jedenfalls zu warm, Aug. Temp. nach Buchan deshalb eingestellt.
[2] 6 Jahre zwischen 1869 und 76, 5 Jahre nach Wild, ersteren das doppelte Gewicht gegeben.
[3] 6 Jahre bei Wild, 2 bei Dall Alaska, 1 nach Sig. Off. Rep. 1879.
[4] Nur zum Vergleich mit Vancouver-Insel aufgenommen.

II. Südliche Hemisphäre.

Ort	Südl. Breite	Länge	Zahl der Jahre	Jahr	Wärmster Monat	Kältester Monat	Differenz	Nachweis
Amboina	3°41′	128°16 E	5	26·3	27·2	25·2	2·0	Z. VIII 55
Zanzibar	6 10	39 14 E	4½	26·7	28·1	25·2	2·9	Z. VII, XIV, XVI 226 24 15
Batavia	6 11	106 50 E	13	25·9	26·4	25·3	1·1	Z. XVI 126
Ascension	7 55	14 25 W	2	25·3	27·1	23·4	3·7	Z. XIII 411
Apia (Samoa)	13 50	171 44 W	2	25·7	26·7	24·1	2·6	Z. XV 186
S. Helena	15 55	5 42 W	6	21·3	23·9	18·7	5·2	Z. XV 403
Delanasau, Fidschi	16 38	178 37 E	10	26·2	27·3	25·0	2·3	Quart. Journ. 1881.
Levuka „	17 41	178 52 E	2	25·2	26·7	23·8	2·9	Z. XIII 220
Papeeti (Tahiti)	17 32	149 34 W	7	24·9	25·9	23·4	2·5	Z. IV 529
P. Louis, Mauritius	20 6	57 35′ E	5	23·9	26·7	20·6	6·1	Neu berechnet 1874/78
N. Caledonien	21 55	166 20 E	4	23·1	26·8	19·6	7·2	Z. IV 461
Rapa (Oparo)	27 36	144 11 W	1½	20·5	23·2	17·8	5·4	Z. XIII 351
S. Paul	38 43	75 11 E	½	12·6	15·3	10·7	4·6	Neu berechnet
Ancud, Chiloe	41 46	74 1 W	3	10·7	13·7	7·7	6·0	Z. VII 9 XII 354
Hobarton	42 52	147 27 E	8	12·1	16·3	6·9	9·4	Rossbank Obs. [1]
Kerguelen-Insel	49 17	70 E	½	4·3	7·0	2·0	5·0	Z. XII 100 XV 421
Auckland-Insel	50 32	166 5′ E	¼	7·0	10·1	—	—	Z. XIII 198
Falkland-Insel	51 41	57 51 W	3	6·1	9·8	2·5	7·3	Z. XVI 298
Cap Horn	56 8	67 0 W	5 Mon.	3·7	6·3	1·9	4·4	Nach Dove's T. T.

[1] Das neue Observatorium in der Stadt hat im 6jähr. Mittel 13°8.

Um mittelst der in dieser Tabelle enthaltenen Resultate der Temperaturbeobachtungen die Wärmeverhältnisse des Seeclimas durch eine einfache Formel zur Darstellung zu bringen, habe ich folgendes Verfahren eingeschlagen. Die Form des Ausdruckes, welche S. v. W. angewendet, ist zwar ganz zweckmässig, ich fand es aber vortheilhafter, von derselben abzugehen und das Glied mit $\cos 2\varphi$ durch $\sin^2\varphi$ zu ersetzen. Wie die Tabelle zeigt, mangelt es am wenigsten an Beobachtungen in der Nähe des Äquators, und da zudem die Temperaturänderungen mit der Breite in dieser Gegend gering sind und einfach dem Cosinus der geographischen Breite proportional gesetzt werden können, so lässt sich die Temperatur des Äquators im Seeclima am sichersten auf directem Wege bestimmen. Es bleiben dann nur noch zwei Constanten auf dem Wege der Methode der kleinsten Quadrate zur Berechnung übrig, und die Rechnung wird dadurch viel einfacher und sicherer.

Zur Bestimmung der Lufttemperatur des Äquators im Seeclima benutze ich folgende Stationen:

Indischer Ocean:			
Nancowry (Nicobaren)	8° 0′	N. Br.	26°8
Amboina	3°41′	S. Br.	26·3
Zanzibar	6°10′	„	26·7
Batavia	6°11′	„	25·9
Mauritius	20° 6′	„	23·9
Atlantischer Ocean:			
Schiffsbeobachtungen	5° 0′	N. Br.	26°0
Cayenne	4 49	„	26·8
Fernando Po	3 46	„	25·7
S. Thomé	0 20	„	25·2
Ascension	7 55′	S. Br.	25·3
Pernambuco	8 4	„	25·7
Loanda	8 49	„	23·2
S. Helena	15 15	„	21·3
Pacifischer Ocean:			
Apia (Samoa)	13°50′	S. Br.	25°7
Delanasau (Fidschi)	16 38	„	26·2

Levuka (Fidschi)	17°41′ S. Br.		25°2
Papeeti (Tahiti).....	17 32	„	24·9
Neu-Caledonien.....	21 55	„	23·1
Äquator.....	80°—145° W.L.	„	25·5[1]

Da gerade für den kühleren Theil des grossen Oceans vom Meridian von Tahiti östlich bis zur Küste von Südamerika alle Beobachtungen fehlen, so habe ich nach den vom Hydrographic Office in Washington herausgegebenen Werke: Meteorological Charts of the North Pacific Ocean from the Equator to lat. 45° North (Washington 1878) die Temperatur des Meeres zwischen 80 und 145° W. L., die dort zu 78° F. angegeben ist, mit in Rechnung gezogen.

Die Temperatur des Wassers in den tropischen Meeren ist zwar durchschnittlich etwa um 1° C. höher als die Lufttemperatur[2]; über einer anormal niedrigen Meerestemperatur, wie in den betreffenden Längen, kann man jedoch approximativ die Lufttemperatur der Meerestemperatur gleich setzen. Jedenfalls wird die mittlere Lufttemperatur des Äquators so richtiger erhalten, als wenn ich die zweifellos relativ niedrige Lufttemperatur über einer Erstreckung von 65 Längengraden gar nicht berücksichtigt hätte.

Leitet man mittelst dieser Daten die Constanten der Gleichung

$$T\varphi = a + b \cos \varphi$$

aus 20 Bedingungsgleichungen ab, so erhält man $a = -13 \cdot 13$ $b = 39 \cdot 16$. Für $\varphi = 0$ wird $T\varphi$ gleich der Temperatur des Äquators $= 39 \cdot 16 - 13 \cdot 13$, d. i. 26°0 C.

Indem ich die mittlere Temperatur des Äquators auf einfacherem Wege für jeden Ocean einzeln zu bestimmen suchte und diese Bestimmungen mit Rücksicht auf die relative Erstreckung der Oceane (Atlantic 60°, Indischer Ocean bis 150° E = 110°, Pacific 130°) in ein Mittel vereinigte, erhielt ich als mittlere

---

[1] Mit doppeltem Gewicht in die Rechnung gestellt.

[2] Im atlantischen Ocean (Square Nr. 3) ist dieser Unterschied 0°6, Humboldt gibt die Differenz zu 1 bis 1½° C. an, und d'Abbadie fand im Mittel vieler Beobachtungen zwischen 36° N. und 23° S. Br. die Temperatur des Meeres um 1° höher als die der Luft.

Temperatur des Äquators 25°9, also ein fast übereinstimmendes Resultat.

Ich lege desshalb den folgenden weiteren Rechnungen eine mittlere Temperatur des Äquators im Seeclima von 26°0 C. zu Grunde. Da die mittlere Temperatur des Meeres unter dem Äquator kaum 27°3 erreichen dürfte, so stimmt die Annahme einer Lufttemperatur von 26°0 genügend überein mit der bekannten Differenz zwischen Luft- und Meereswärme in den Tropen.

Nachdem die Temperatur des oceanischen Äquators bestimmt ist, bringen wir die Gleichung

$$T = 26°0 + b \sin\varphi + c \sin^2\varphi$$

auf die Form

$$(T - 26\cdot0) : \sin\varphi = A = b + c \sin\varphi$$

und bestimmen die Constanten b und c aus 20 Gleichungen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. Die Daten zur Aufstellung dieser Gleichungen sind der folgenden Tabelle entnommen worden.

Ort	S. Breite	Temp. Cels.		Differenz
		beob.	berech.	
Apia	13°50′	25·7	25·2	−0·5
S. Helena	15 55	21·3	24·7	+3·4
Fidschi-Inseln	16 38	26·2	24·5	−1·7
„	17 41	25·2	24·2	−1·0
Tahiti	17 32	24·9	24·3	−0·6
Mauritius	20 6	23·9	23·4	−0·5
N. Caledonien	21 55	23·1	22·7	−0·4
Rapa	27 36	20·5	20·1	−0·4
Valparaiso	33 1	14·4	17·2	+2·8
Capstadt	33 56	16·7	16·7	0·0
Neuseeland	35 0	16·2	16·1	−0·1
S. Paul	38 43	12·6	13·8	+1·2
Chiloe	41 46	10·7	11·8	+1·1
Hobartown	42 52	12·1	11·1	−1·0
Neuseeland	45 0	10·6	9·8	−0·8
Kerguelen	49 17	4·3	6·9	+2·6
Auckland-Insel	50 32	7·0	6·2	−0·8
Falkland-Insel	51 41	6·1	5·4	−0·7
P. Arenas	53 10	6·2	4·5	−1·7
Cap Horn	56 8	3·7	2·6	−1·1

Die äquatornahen Inseln, die schon zur Bestimmung der Temperatur des Äquators gedient haben, wurden nicht wieder verwendet, dafür die Temperatur weniger Küstenpunkte, welche eine unverdächtige oceanische Temperatur haben, zur Besetzung gewisser Breitegrade mit Temperaturstationen beigezogen. Es sind dies Valparaiso und Capstadt, ferner Punta Arenas. Es wurde Sorge getragen, dass die Temperaturstationen in gewissen Meridianen sich nicht häufen, desshalb nahm ich von Neuseeland nur zwei Temperaturen für 35 und 45° S. Br. und von den übrigen australischen Stationen nur Hobarton. Die in Rechnung gezogenen Daten aus den mittleren und höheren Breiten sind so vertheilt, dass dieselben jedenfalls keine zu hohe, wahrscheinlicher eine etwas zu niedrige Temperatur als Ergebniss der Rechnung befürchten lassen können. Da Schiffsbeobachtungen überhaupt nicht aufgenommen wurden, so habe ich auch die früher mitgetheilten Temperaturmittel für die Südspitze von Südamerika nicht verwendet, sie würden die Temperatur in höheren südlichen Breiten im positiven Sinne beeinflusst haben.

Diese 20 Gleichungen ergaben: [1]

$$\Sigma(A) = -321\cdot46 \qquad \Sigma[\sin\varphi] = 10\cdot8862 \qquad \Sigma[\sin^2\varphi] = 6\cdot7209$$
$$\Sigma[A\sin\varphi] = -208\cdot6$$

Die mittelst dieser Summen aufgestellten Normalgleichungen ergeben dann:

$$T_\varphi = 26°0 + 6°94\sin\varphi - 42°28\sin^2\varphi \qquad (I)$$

eine Gleichung, welche auch so geschrieben werden könnte:

$$T_\varphi = 4°86 + 6°94\sin\varphi + 21°14\cos 2\varphi.$$

In dieser Form ist sie unmittelbar mit der früher angeführten von Sartorius v. Waltershausen abgeleiteten vergleichbar.

Die mittelst dieser Gleichung berechneten Werthe finden sich in die Tabelle auf S. 17 aufgenommen, sowie die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung. Diese Differenzen legen,

---

[1] Ich führe diese Rechnungselemente an, weil es mittelst derselben jedermann leicht wird, noch neue Stationen anzuschliessen und die Rechnung wieder aufzunehmen.

wie ich glaube, ein günstiges Zeugniss dafür ab, dass die Formel die mittlere Temperatur der verschiedenen Breitegrade ziemlich richtig wiedergibt. Zeichen und Grösse der beträchtlicheren Abweichungen stellen sich gerade so heraus, wie man es erwarten musste; sie drücken die thermische Anomalie der betreffenden Stationen aus.

Dass unsere Formel die Temperaturverhältnisse der südlichen Hemisphäre überhaupt nahe richtig darstellen dürfte, zeigt namentlich ein Vergleich mit den von Dove und Ferrel aus den Isothermenkarten abgeleiteten Mitteltemperaturen der Breitekreise. Folgende kleine Tabelle ermöglicht diesen Vergleich.

	10°	20°	30°	40°	50°	60°	S. Br.
	Mitteltemperatur Celsius.						
Dove	25·5	23·4	19·4	12·5	—	—	
Ferrel	25·9	23·7	19·3	14·4	8·8	1·8	
Hann	25·9	23·4	18·9	13·0	6·5	0·3	

Mit Ausnahme der Temperatur des 30. Breitegrades, die vielleicht zu niedrig ist, hat also unsere Formel die grösste Wahrscheinlichkeit für sich, dass sie die mittleren Temperaturen auf der südlichen Hemisphäre richtig wiedergibt. Für die höheren Breiten dürfte sie eher die untere als die obere Grenze der Mitteltemperaturen darstellen.

Bemerkenswerth ist, dass die Ergebnisse meiner Formel, obgleich nur aus Temperaturbeobachtungen auf Inseln abgeleitet, doch mit den Dove- und Ferrel'schen Mitteltemperaturen, die auch Landstationen einschliessen, übereinstimmt, ein Beweis, dass auf der südlichen Halbkugel die Temperaturen der Landflächen, selbst zwischen dem Äquator und 40° S. Br., keinen merklichen Einfluss auf die mittlere Temperatur der Breitekreise haben.

Um aus der obigen Formel die mittlere Temperatur der ganzen südlichen Hemisphäre abzuleiten,[1] haben wir nur nöthig,

[1] Da die eben gegebene Vergleichung der Temperatur der Parallelgrade gezeigt hat, dass auch in niedrigeren Breiten, wo noch Festland existirt, die eigentlich für das Seeclima berechnete Formel die beobachteten Temperaturen wiedergibt, so können wir auch voraussetzen, aus derselben die mittl. Temperatur der südl. Hemisphäre überhaupt zu erhalten.

zu berücksichtigen, dass jeder Parallel im Verhältniss seines Umfanges auf dieselbe Einfluss nimmt, dieser Umfang aber dem Cosinus der geographischen Breite proportional ist. Wenn wir also obige Gleichung mit $\cos\varphi$ multipliciren und dieselbe von $\varphi = 90°$ bis $\varphi = 0°$ integriren, so werden wir die mittlere Temperatur der ganzen Hemisphäre erhalten. Wir haben:

$$\int_{\varphi=90}^{\varphi=0} (a+b\sin\varphi+c\sin^2\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = a+{}^1/_2\, b+{}^1/_3\, c$$

Die mittlere Temperatur der ganzen Hemisphäre ist demnach $26°0+3\cdot47-14\cdot09 = 15°4$ C. Da Ferrel für die nördliche Hemisphäre 15°3 gefunden hat, so bestätigt dies seine Vermuthung, dass die mittlere Temperatur der beiden Hemisphären wahrscheinlich die gleiche ist. Die Unsicherheit der Temperaturen in höheren südlichen Breiten kann dieses Resultat nur wenig zweifelhaft machen, weil dieselbe keinen erheblichen Einfluss mehr nimmt auf die Mittelwärme der ganzen Halbkugel.[1]

Ich habe mir die vielleicht überflüssige Mühe genommen, noch ein anderes Resultat für die Temperatur der südlichen Halbkugel abzuleiten, blos aus oceanischen Temperaturstationen im strengsten Sinne des Wortes. Diese Stationen sind: Tahiti, Mauritius, N. Caledonien, Rapa, S. Paul, Kerguelen, Auckland-Inseln, Falkland-Inseln. Diese acht Stationen geben, wenn der Äquator wieder mit 26°0 angenommen wird

$$T_\varphi = 26\cdot0+10\cdot03\sin\varphi-47\cdot43\sin^2\varphi \qquad (II)$$

Die darnach berechneten Temperaturen sind:

S. Breite	20°	30°	40°	45°	50°	60°
Temperatur	23·9	19·1	12·9	9·4	5·8	−0·9

[1] Der Flächeninhalt der Calotte vom Pol bis 70° S. Br. ist kleiner als $^1/_{16}$ des ganzen Flächeninhaltes der Hemisphäre. Um die Temperatur derselben um einen halben Grad zu ändern, muss die mittlere Temperatur dieses Abschnittes sich um volle 8° ändern. Selbst der Flächeninhalt der Calotte bis 60° S. Br. ist noch kleiner als $^1/_7$ des Flächeninhaltes der Hemisphäre.

Die mittlere Temperatur der ganzen Hemisphäre ergäbe sich hieraus zu $26 \cdot 0 + 5 \cdot 02 - 15 \cdot 81 = 15°2$, fast übereinstimmend mit dem früheren Resultat. Übrigens kann auf so wenige Daten gestützt, kein berechtigter Schluss auf die wahren Mitteltemperaturen gezogen werden.

Mehr Berechtigung hätte vielleicht der Versuch, die mittlere Temperatur der Halbkugel auf breiterer Basis zu berechnen, durch Berücksichtigung zahlreicherer Temperaturstationen, wozu allerdings nur Küstenpunkte verwendet werden könnten. Ich habe auch diesen Versuch gemacht und noch folgende Temperaturstationen in Rechnung gestellt.

S. Denis (Bourbon)	20°51′ S.	25°1	Montevideo	34°54′ S.	16·8
Rio Janeiro	22°54′ „	23°8	Bahia blanca	38 43′ „	16·0
Caldera	27 5 „	15·4	Neuseeland	40 00 „	13·4
Brisbane	27 27 „	20·0	Kerguelen	45 00	7·7
P. d'Urban	29 50 „	20·6	„	55 00	0·4
Sydney	33 51 „	17·1	Cap Horn	57 30	4·9

Um die durch die Vermehrung der Stationen in wärmeren Meridianen vielleicht gerechtfertigte Besorgniss eines zu hohen Resultates für die Temperaturen jenseits 45° zu beseitigen, habe ich noch zwei für den Meridian von Kerguelen-Insel berechnete Temperaturen eingestellt. Das Resultat der Rechnung mit den nun auf 32 erhöhten Bedingungsgleichungen ist

$$\Sigma[A] = -526 \cdot 59 \quad \Sigma[A \sin\varphi] = -339 \cdot 40$$
$$\Sigma[\sin\varphi] = 17 \cdot 8125 \quad \Sigma[\sin^2\varphi] = 10 \cdot 9909$$

Daraus ergibt sich:

$$T_\varphi = 26 \cdot 0 + 7 \cdot 48 \sin\varphi - 43 \cdot 01 \sin^2\varphi \qquad \text{(III)}$$

Die nach dieser Formel berechneten Temperaturen stimmen jedoch so vollkommen mit den aus der früheren Formel (I) abgeleiteten überein, dass man bei ersterer stehen bleiben kann. Die Formel (III) gibt nämlich für

	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	S. Br.
Temp.	26·0	23·5	19·0	13·1	6·5	0·2	−4·9	−8·4	

Dies dürfte zeigen, dass wir in Formel I schon einen sehr richtigen Ausdruck für die Temperaturvertheilung auf der südlichen Hemisphäre erhalten haben.

Um zu einer genäherten Kenntniss der Temperaturen der extremen Monate im wahren Seeclima unter verschiedenen Breiten zu gelangen, benützte ich die in den Tabellen, p. 13 und 14 enthaltenen Angaben über die Temperaturdifferenz zwischen den extremen Monaten. Es wurden die zur Ableitung der Jahrestemperatur verwendeten Stationen benützt, und ausserdem noch folgende 10 Stationen: Azoren, Madeira, Capverdische I. Nicobaren, Fernando Po, S. Thomé, Ascension, Batavia, Zanzibar und Amboina.

So ergaben sich 30 Gleichungen, welche nach der Methode der kleinsten Quadrate combinirt die Formel lieferten:

$$\text{Jahresamplitude} = 2°12 + 7°01 \sin\varphi.$$

Unter Jahresamplitude ist der Temperaturunterschied zwischen dem wärmsten und kältesten Monat zu verstehen, nicht etwa die Wärmedifferenz bestimmter Monate zu verstehen. In höheren Breiten fallen allerdings die extremen Mitteltemperaturen meist auf Jänner und Juli. Die nach dieser Formel und nach der früheren für die Jahresmittel aufgestellten (I) berechneten Temperaturen im Seeclima der südlichen Hemisphäre sind:

Mittlere Temperatur Celsius.

S. Breite	Jahr	Wärmster Monat	Kältester Monat
Äquator	26·0	27·1	24·9
10°	25·9	27·5	24·2
20°	23·4	25·7	21·2
30°	18·9	21·7	16·1
40°	13·0	16·3	9·7
50°	6·5	10·2	2·8
60°	0·3	4·4	— 3·8
70°	—4·8	—0·4	— 9·1
80°	—8·2	—3·7	—12·7
Pol	—9·3	—4·8	—13·9

Die Temperaturen jenseits des 70. Breitegrades haben eigentlich keine reelle Bedeutung, da sie nur für ein offenes eisfreies Meer gelten würden.

Die Jahres-Isotherme von 0° würde sich nach meiner Gleichung durchschnittlich in der Breite von 60° 30′ S. finden. Vergleichen wir schliesslich die mittelst der Formel berechneten Temperaturen mit jenen unter gleicher Breite in der nördlichen Hemisphäre, wie sie von Dove und Forbes[1] bestimmt worden sind, so erhalten wir folgendes Resultat:

Breite	40°	45°	50°	55°	60°
Südliche Hemisphäre	13·0	9·8	6·5	3·3	0·3
Nördliche „	13·6	9·7	5·8	2·3	—1·2
Differenz	—0·6	+0·1	+0·7	+1·0	+1·5

Wir finden demnach abermals, dass die südliche Hemisphäre zwischen 40 und 45° S. Breite wärmer wird als die nördliche; da die mittleren Temperaturen des 45. und 50. Breitegrades der südlichen Hemisphäre nun sehr verlässlich bestimmt sein dürften, so ist kaum mehr ein Zweifel an diesem Resultate zulässig.

Hoffentlich werden uns die geplanten Expeditionen in höhere südliche Breiten endlich einmal Temperaturbeobachtungen, die ein ganzes Jahr umfassen, von jenseits des 55° Breitegrades mitbringen und uns so verlässliche Anhaltspunkte zur Beurtheilung der Temperatur jener Breiten vermitteln.

Obwohl die mittlere Bodentemperatur nach Wild nur mit einem Fehler von ±1° auf die Temperatur der Luft zu schliessen gestattet, würde es dennoch von Wichtigkeit sein, den Versuch nicht zu scheuen, die Bodentemperaturen der Inseln in den höchsten südlichen Breiten zu bestimmen, da keine Aussicht vorhanden ist, dass zahlreichere Überwinterungen jenseits des 50.

---

[1] Forbes hat für die höheren Breiten mit Hilfe neuerer Isothermenkarten Dove's für die nördliche Hemisphäre die mittleren Temperaturen neuerdings sorgfältig bestimmt, so dass seine Daten den älteren Dove's vorzuziehen sind.

Breitegrades rings um einen Parallel herum jemals zur Ausführung kommen. Überwinterungen im Süden von Südamerikas allein lassen immer noch den Zweifel offen, in welchem Grade die Temperatur in diesen Meridianen von der mittleren Temperatur in gleicher Breite überhaupt abweichen mag. Hätten wir gute Bodentemperatur-Bestimmungen von den Mc. Donalds und Heards-Inseln, von Maquarie-Insel, den Süd Orkney-Inseln etc., so würden wir mit viel grösserer Sicherheit auf die mittlere Temperatur der südlichen Hemisphäre zwischen 50 und 60° S. Br. schliessen können.

Resultate magnetischer Messungen in Mähren und Schlesien.

Von **J. Liznar**,
Adjuncten an der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. December 1881.)

Vor ungefähr 38 Jahren hat Kreil eine magnetische Bereisung der österreichischen Monarchie unternommen. Die Resultate seiner an vielen Orten ausgeführten Messungen sind theils in einem eigenen Werke[1], theils in den Denkschriften der kaiserlichen Akademie[2] publicirt worden. Seit jener Zeit fehlen für den westlichen Theil der Monarchie Daten über die in der Zwischenzeit eingetretenen Änderungen der magnetischen Elemente fast gänzlich. Wenn man auch gewöhnlich annimmt, dass an nicht sehr weit von einander entfernten Orten die Änderungen gleichmässig auftreten, so ist es doch von Interesse, die Messungen nach einer Reihe von Jahren zu wiederholen, um wenigstens die ersteren Beobachtungen zu controliren. Als mir daher im heurigen Jahre von der vorgesetzten Direction der Auftrag zu Theil wurde, eine Inspection unserer meteorologischen Stationen in Mähren und Schlesien vorzunehmen, da glaubte ich die Gelegenheit benutzen zu sollen, um wenigstens an einigen Punkten, die früher Kreil besucht hatte, magnetische Messungen auszuführen. Herr Director Prof. Dr. Hann hatte die Güte gehabt, mir die Erlaubniss hiezu zu ertheilen, und so konnte ich mit dem wenigen Gelde, das der k. k. Centralanstalt zur Bereisung der Stationen jährlich zu Gebote steht, einen doppelten Zweck erreichen.

Die Stationen, an denen ich magnetische Messungen ausführte, sind folgende: Lundenburg, Teschen, Troppau, Olmütz, Brünn und Krakau. Da ich mich an keinem dieser Orte lange

---

[1] Magnetische und geographische Ortsbestimmungen im österreichischen Kaiserstaate.

[2] Mathem.-naturw. Classe Bd. XX.

genug aufhalten konnte, um ein den astronomischen Messungen günstiges Wetter abzuwarten, da ja der Hauptzweck meiner Reise die Inspection der meteorologischen Stationen war, so war es mir nur selten möglich, die Declination zu bestimmen.

Gerne hätte ich die Messungen an denselben Stellen ausgeführt, wo sie Kreil gemacht hatte; allein dies war nicht möglich. Entweder sind dieselben durch Neubauten für magnetische Messungen ungünstig geworden, oder aber so entlegen, dass ich mehr Zeit und Geld hätte zur Verfügung haben müssen, um die Messungen dort ausführen zu können. Die von mir gewählten Punkte sind aber immer in einer so geringen Distanz von den ersteren, dass es wohl erlaubt sein wird, die erhaltenen Messungsresultate auch für die von Kreil benutzten Punkte als giltig anzunehmen. Kreil hat bei Bestimmung der Declination und Horizontalintensität immer auf die Angaben der Variationsapparate in Prag oder Wien Rücksicht genommen, und dadurch die Daten unter einander vergleichbar gemacht. Ich beziehe alle meine Messungsresultate auf die Angaben des Magnetographen der k. k. Centralanstalt.

Die von mir benutzten Instrumente waren dieselben, mit denen ich im Jahre 1879 in Kremsmünster beobachtet habe[1]: ein Lamont'scher Theodolit (es ist derselbe, den auch Kreil unter dem Namen Lamont I benützt hatte, nur etwas abgeändert) und das Inclinatorium Dover Nr. 1.

Die Constanten des magnetischen Theodoliten wurden vor der Reise bestimmt, und es ergaben sich zur Berechnung der Horizontalintensität folgende Formeln:

$$\text{Mg. I. } \lg H = 0\cdot64532 - \lg T_1 - \frac{1}{2}\lg\sin\varphi_1 - 0\cdot0000063\, t_1 + 0\cdot0000851\,(t'_1 - t_1)$$

$$\text{Mg. II. } \lg H = 0\cdot65024 - \lg T_2 - \frac{1}{2}\lg\sin\varphi_2 - 0\cdot0000063\, t_2 + 0\cdot0000837\,(t'_2 - t_2)$$

[1] Die Resultate dieser Messungen sind in den Sitzungsberichten der kais. Akademie LXXX, II. Abth. und in den Jahrbüchern der k. k. Centralanstalt für Meteor. u. Erdmagn. Bd. XVI, neue Folge, I. Theil publicirt.

Hierin bedeutet:

H die Horizontalintensität,

T die Schwingungsdauer, corrigirt wegen der Grösse des Schwingungsbogens,

φ den Ablenkungswinkel,

t die Temperatur bei den Ablenkungen, und

t' jene während der Schwingungen.

Der benutzte Chronometer Arway hat einen so kleinen Gang gehabt (2—3 Secunden), dass ich denselben bei Berechnung der Schwingungsdauer unbeachtet lassen durfte.

Im Nachfolgenden theile ich die an den einzelnen Orten erhaltenen Werthe der daselbst beobachteten Elemente mit.

1. Lundenburg.

Der Beobachtungsort war der Garten der Volksschule neben der Pfarrei am Platze. Da die umgebenden Gebäude vom Beobachtungsort ziemlich weit entfernt waren, ist ein Localeinfluss kaum zu befürchten gewesen.

			Wien
a) Declin.	17. Juni 1881	9°27'7	9°51'5
b) Hor.-Int.	15. „	2·0385	2·0525
	16. „	2·0382	2·0517
c) Inclin.	15. „	63°47'1	63°24'0[1]
	16. „	63 47 3	63 24 0

2. Krakau.

Beobachtungsort: botanischer Garten.

			Wien
a) Declin.	22. Juni 1881	7°48'4	9°55'3
	24. „	7 57 2	9 61·1
b) Hor.-Int.	22. „	1·9942	2·0527
	24. „	1·9917[2]	2·0498

[1] Da die Lloyd'sche Wage ihren Dienst versagt hat, ist für die Inclination ein mittlerer Werth vom obigen Betrage angenommen worden.

[2] Nur mit Mag. II, da es später so heftig zu regnen anfing, dass die Beobachtung unterbrochen werden musste.

c) Inclin.	22. Juni 1881	64°33'5	63°24'0
	23. „	64 29·6	63 24·0
	23. „	64 32·3[1]	63 24·0
	23. „	64 31·1[2]	63 24·0

3. Teschen.

Beobachtungsort: Garten des Herrn Prof. Dr. Odstrčil unweit der Kirche. Da am nächsten Tage Regenwetter eintrat, konnten die Beobachtungen nicht wiederholt werden.

			Wien
a) Hor.-Int.	26. Juni 1881	2·0014	2·0519
b) Inclin.	26. „	64°15'5	63°24'0

4. Troppau.

Beobachtungsort: Garten des Hauses Nr. 29 in der Salzgasse.

			Wien
a) Hor.-Int.	29. Juni 1881	1·9986	2·0539
	30. „	1·9984	2·0577
	1. Juli	1·9944	2·0508
b) Inclin.	29. Juni	64°25'9	63°24'0
	30. „	64 25 9	63 24 0

5. Kloster-Hradisch bei Olmütz.

Beobachtungsort: Garten der Ackerbauschule.

			Wien
a) Hor.-Int.	5. Juli 1881	1·9842	2·0499
	5. „	1·9843	2·0524
	6. „	1·9833	2·0485
b) Inclin.	4. „	64°28'1	63°24'0
	5. „	64 30·3	63 24·0

[1] Inclinatorium Dover Nr. 4 der Sternwarte in Krakau.

[2] Beobachtet mit dem Inclinatorium der Centralanstalt Dover Nr. 1 durch den Adjuncten der Sternwarte, Herrn Dr. Wierzbicki.

6. Brünn.

Beobachtungsort: Garten des St. Thomasstiftes in Altbrünn.

			Wien
a) Declin.	13. Juli 1881	9°31'0[1]	9°53'0
b) Hor.-Int.	8. „	2·0081	2·0505
	11. „	2·0043	2·0497
	12. „	2·0111	2·0497
c) Inclin.	8. „	64° 3'0	63°25'0
	9. „	64 12·4[2]	63 25·0
	10. „	64 13·7	63 25·0
	11. „	64 9·7	63 25·0

Nach diesen Daten ergeben sich für die, an den einzelnen Stationen beobachteten Elemente, folgende Differenzen gegen Wien, denen zum Vergleich mit den älteren Beobachtungen Kreil's auch die von diesem in den Denkschriften vom Jahre 1859 publicirten Differenzen gegen Wien beigesetzt und mit K. bezeichnet erscheinen.

Ort	Beobachtungsjahr	Declin.	Horiz.-Int.	Inclin.
Lundenburg	1881	0°23'8	0·0138	—0°23'2
K.	1850	22·5	0·0153	—0 26·0
Krakau	1881	2 5·4	0·0583	—1 7·6
K.	1850	1 57·8	0·0502	—1 5·0
Teschen	1881	—	0·0505	—0 51·5
K.	1850	0 59·8	0·0424	—0 48·0
Troppau	1881	—	0·0557	—1 1·9
K.	1850	0 47·6	0·0543	—1 4·0
Olmütz	1881	—	0·0663	—1 5·2
K.	1850	0 28·2	0·0568	—1 2·0
Brünn	1881	0 22·0	0·0445	—0 47·9
K.	1850	—0 19·3[3]	0·0621	—0 58·0

[1] Die Azimutalbestimmung wurde nach meiner Abreise vom Herrn Prof. v. Niessel ausgeführt.

[2] Nur mit Nadel I, weil später Regen eintrat.

[3] In der Zusammenstellung Kreil's in der obgenannten Publication steht irrthümlicher Weise —0°14'3.

Wie man sieht, stimmen die von mir bestimmten Differenzen mit jenen Kreil's nicht für alle Orte überein; die grösste Abweichung ergibt sich für Brünn, wo ich die Declination um 41'3 kleiner, die Horizontalintensität um 0·0176 und die Inclination um 10'1 grösser fand als Kreil. Da Kreil in Brünn zweimal beobachtet hatte und zwar 1848·4 und 1856·7, seine Werthe ausserdem untereinander nicht schlecht übereinstimmen, wäre ich geneigt, die Verschiedenheit dieses Resultates einem Localeinflusse zuzuschreiben, der sich an dem von mir gewählten Beobachtungsorte fühlbar machte, dessen Ursache anzugeben ich aber nicht im Stande bin. Es wäre für die Entscheidung dieser Frage vom grössten Interesse, wenn man diese Messungen nochmals vornehmen könnte. Da der von mir benützte Beobachtungsort am Südfusse des Spielbergs liegt, so wäre die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass letzterer anziehend gewirkt habe, wodurch sich die erhaltene Differenz erklären liesse.

Die jährliche Änderung der Elemente würde nach den älteren Beobachtungen Kreil's und jenen vom Jahre 1881 an den einzelnen Orten folgenden Werth haben:

	Jährliche Änderung der		
Ort	Declin.	Hor.-Int.	Inclin.
Lundenburg	—7'07	+0·0021	—1'71
Krakau	—7 32	+0·0017	—1·69
Teschen	—	+0·0018	—1·35
Troppau	—	+0·0022	—1·79
Olmütz	—	+0·0019	—1·61
Brünn	—8 30	+0·0025	—2·00

Um diese Änderungen zu erhalten, habe ich die in den einzelnen Jahren von Kreil ermittelten absoluten Werthe der Elemente mit den im Jahre 1881 bestimmten direct verglichen und dann das Mittel der so erhaltenen jährlichen Änderungen genommen. Selbstverständlich können diese Daten auf vollkommene Verlässlichkeit keinen Anspruch machen, weil ja sowohl die periodischen Änderungen als auch etwaige Störungen nach dieser Methode unbeachtet bleiben mussten.

Wie man ersieht, weichen die jährlichen Änderungen der Intensität nicht nur von dem gewöhnlich für unsere Breiten

angegebenen von 0·0023, sondern auch an den einzelnen Orten untereinander stark ab; die Änderung der Horizontalintensität scheint also an den sehr benachbarten Orten nicht ganz gleichmässig zu wachsen, wie gewöhnlich angenommen wird. Es wäre möglich (was übrigens in nächster Zeit entschieden wird), dass die mittelst des Reisetheodoliten erhaltenen Werthe im Jahre 1881 etwas zu klein waren, dass also hiedurch auch die jährliche Änderung vermindert erscheint; die ungleichmässige Änderung an den einzelnen Orten bleibt aber durch diesen Umstand unbeeinflusst. Würden die Differenzen der magnetischen Elemente gegen einen Normalort stets dieselben bleiben, so müssten die Isogonen, Isoklinen und Isodynamen immer dieselbe Form behalten, nur ihr Werth wäre variabel; dies scheinen die eben angeführten Beobachtungen nicht zu bestätigen. Es wäre daher für die Wissenschaft von grossem Interesse, wenn in jenen Gebieten, wo vor vielen Jahren diese magnetischen Linien ermittelt worden sind, d. i. besonders in Österreich und Bayern, die magnetische Aufnahme wiederholt werden möchte, um zu ersehen, wie weit und in welcher Weise die neu bestimmten Linien von den früheren abweichen. [1])

Zum Schlusse sei es mir gestattet, allen Jenen, die meine Arbeiten förderten, hier öffentlich meinen Dank aussprechen zu dürfen. Besonders hat mich der hochwürdigste Herr Prälat Gregor Mendl und der k. k. Professor der technischen Hochschule v. Niessl zu Dank verpflichtet; der letztere Herr hatte die Güte gehabt, nach meiner Abreise von Brünn das Azimut der Miren zu bestimmen.

---

[1]) Für Ungarn ist dies bereits durch den Director der kön. ung. Centralanstalt für Meteorologie u. Erdmagnetismus Herrn Dr. Guido Schenzl geschehen. Das von ihm verfasste und soeben erschienene Werk: „Beiträge zur Kenntniss der magnetischen Verhältnisse in den Ländern der ungarischen Krone", das mir erst bei der Correctur dieses Aufsatzes zugänglich wurde, bestätigt meine oben ausgesprochene Ansicht.

Bestimmungen der Diamagnetisirungszahl des metallischen Wismuths in absolutem Masse.

Von **Albert v. Ettingshausen** in Graz.

(Mit 2 Holzschnitten.)

Seit längerer Zeit habe ich mich mit verschiedenen Methoden zur directen, experimentellen Ermittlung der im Titel dieser Arbeit bezeichneten Grösse beschäftigt; die Gründe, welche eine solche directe Bestimmung wünschenswerth erscheinen lassen, hat bereits Herr Prof. Boltzmann in seiner Abhandlung: „Über die auf Diamagnete wirksamen Kräfte“ [1] hervorgehoben und dort zu diesem Zwecke auch für einige Fälle die Wirkung berechnet, welche auf diamagnetische Körper im nicht homogenen elektromagnetischen Felde einer von einem galvanischen Strome durchflossenen Drahtspirale ausgeübt werden.

Ich habe zunächst mit geringen Abänderungen die Versuche wiederholt, welche vor mehreren Jahren von Herrn Hofrath Toepler und mir nach einer von jenem erdachten Methode ausgeführt worden sind, die auf der Messung der durch die diamagnetische Polarität hervorgebrachten Inductionswirkungen beruht. [2] Zur Bestimmung des absoluten diamagnetischen Moments wurden Vergleiche mit der inducirenden Wirkung eines dem Wismuth an Gestalt möglichst gleichkommenden Solenoides gemacht, welches von einem Strome bekannter Stärke durchflossen wird. Ein ähnliches Vergleichsverfahren hat, wie ich später ersah, schon H. Christie [3] bei Versuchen mit dem Diamagnetometer eingeschlagen; die von ihm für Wismuth erhaltene Zahl stimmt

---

[1] Sitzungsber. d. k. Ak. d. W. in Wien, Bd. LXXX, S. 687, Oct. 1879.

[2] Pogg. Ann. Bd. CLX, S. 1, 1877.

[3] Pogg. Ann. Bd. CIII, S. 589, 1858.

mit der grössten der aus meinen Versuchen hervorgehenden sehr gut überein.

Eine zweite Methode besteht darin, dass man die Kraft misst mit welcher ein diamagnetischer Körper, der nahe dem Ende einer von einem Strome durchflossenen Spirale conaxial mit dieser aufgehängt ist, aus der Spirale herausgestossen wird. Nach diesem Verfahren, bei welchem weit kleinere Mengen der untersuchten Substanz genügen, als beim ersten, habe ich für drei verschiedene Wismuthcylinder die Diamagnetisirungszahl ermittelt. Ein Cylinder (Nr. 1) war aus demselben Wismuth gegossen worden, welches vor fünf Jahren zu den oben erwähnten Versuchen gedient hatte und eisenfrei gefunden worden war; die beiden anderen Cylinder (Nr. 2 und Nr. 3) bestanden aus Wismuth, welches von zwei verschiedenen Fabriken in grösserer Quantität bezogen und mit möglichster Sorgfalt chemisch rein war dargestellt worden; namentlich wurde darauf geachtet, das Wismuth von jeder Spur einer magnetisirbaren Substanz frei zu erhalten.

Herr Assistent Hinteregger an der hiesigen technischen Hochschule hatte die Gefälligkeit, hiezu eine Quantität Wismuth (Nr. 2) zu übernehmen; die andere (Nr. 3) habe ich selbst im chemischen Institute der Universität rein darzustellen versucht. [1] Ich fühle mich verpflichtet, sowohl dem Herrn Institutsvorstande Prof. v. Pebal für sein gütiges Entgegenkommen und seine freundliche Unterstützung, wie auch Herrn Assistenten Hinteregger meinen wärmsten Dank hiermit auszusprechen.

Man kann ferner zur Bestimmung der Diamagnetisirungszahl auch das Drehmoment messen, welches ein Cylinder im unhomogenen Magnetfelde erfährt, wenn derselbe um eine zu seiner Längsrichtung senkrechte Axe schwingt. Durch die Einwirkung

---

[1] Etwa 1 Kilo käufliches Wismuth wurde in reiner Salpetersäure gelöst, dann in Wismuthchlorid übergeführt und als Wismuthoxychlorid in Wasser gefällt; nach wiederholter Auflösung in Salzsäure und erneutem Fällen in Wasser wurde aus der salzsauren Lösung durch Einleiten von Schwefelwasserstoff Schwefelwismuth dargestellt, dies in verdünnter Salpetersäure gelöst und die Lösung elektrolysirt. Das dadurch erhaltene Wismuthoxyd wurde getrocknet und im Wasserstoffstrom unter Glühen zu metallischem Wismuth reducirt; endlich wurde es mit kohlensaurem Natrium zusammengeschmolzen.

der diamagnetischen Kräfte, wird die Schwingungsdauer des Cylinders geändert und die Änderung wird beobachtet. Dieses Verfahren hat Herr W. W. Jacques eingeschlagen, um nach von Prof. H. A. Rowland berechneten Formeln für Wismuth und Kalkspath die Constanten zu bestimmen;[1] auch Schuhmeister[2] hat sich derselben Methode zur Ermittlung der Magnetisirungszahl für eine Eisenchloridlösung bedient. In dem zwischen den Polen eines Ruhmkorff'schen Elektromagnetes erzeugten, unhomogenen Felde wurden die zu untersuchenden Körper in Schwingungen versetzt, wobei die Ausmessung des Feldes durch die Verschiebungen einer kleinen Inductionsrolle geschah. — Ich liess einen Wismuthcylinder im unhomogenen Felde nahe dem Ende einer Spirale schwingen und suchte die Änderung der Schwingungsdauer zu bestimmen, wenn die Spirale von einem bekannten Strome durchflossen wurde. Die Bestimmung des Magnetfeldes entfällt hier, da die Gesetzmässigkeit, nach der sich das Feld verändert, bekannt ist.

Endlich kann die diamagnetische Fernwirkung ein Mittel zur Bestimmung der Diamagnetisirungszahl abgeben und habe

---

[1] American Journal of Science and Arts, Vol. XVIII, S. 360. Nov. 1879. (Beibl. Bd. IV, S. 291.)

Die daselbst für Wismuth angegebenen Zahlen stimmen mit den von mir gefundenen durchaus nicht überein, überdies ist die Zahl für Kalkspath nahe dreimal so gross, als jene für Wismuth. Herr Prof. Rowland in Baltimore, den ich brieflich auf diesen Umstand aufmerksam machte, theilte mir mit, dass in Herrn Jacques' Berechnungen ein Irrthum unterlaufen sei und stellte, da die Beobachtungsdata des Herrn Jacques nicht mehr vorliegen, eine Wiederholung der Messungen und Verbesserung der Resultate in nächste Aussicht.

[2] Sitzungsber. der Akad. in Wien, Bd. LXXXIII, S. 45, Jänner 1881. Schuhmeister hat für schwach magnetische und diamagnetische Substanzen absolute Bestimmungen auch dadurch ausgeführt, dass er die Anziehung oder Abstossung derselben vor den Polen eines geradlinigen, cylindrischen Elektromagnetes mass; die Ausmessung des Magnetfeldes geschah wie oben angegeben. Das Verhalten der Körper vor den Polen von Magneten ist wiederholt zu quantitativen Vergleichungen ihres Magnetismus und Diamagnetismus benutzt worden (s. Wiedemann Galv. II. 1. S. 684 ff.): absolute Bestimmungen erfordern die genaue Kenntniss der Beschaffenheit des Magnetfeldes, welcher Forderung bei einer Drahtspirale von bekannten Dimensionen jedenfalls in sehr vollkommener Weise genügt wird.

ich auch nach dieser vierten Methode einige Messungen ausgeführt.

Was die praktische Verwendbarkeit der verschiedenen Methoden betrifft, so ist die als „zweite" bezeichnete den anderen weitaus überlegen. Sie erfordert keine grossen Mengen der zu untersuchenden Substanzen und man erhält sehr sicher zu beobachtende Wirkungen. Die nach der ersten Methode ausgeführten Messungen haben zwar ebenfalls sehr gute Resultate geliefert; doch leidet diese Methode einigermassen durch die Complicirtheit des Apparates und bedarf bedeutender Vorsicht zur Vermeidung von Fehlerquellen. Es sind meist grössere Quantitäten der diamagnetischen Substanzen nöthig, da man die Wirkung durch Vergrösserung der Scheidekraft oder durch Vermehrung der Zahl der Inductionsstösse wegen der starken Öffnungsfunken und tertiärer Induction (bei gut leitenden Substanzen) nicht über eine gewisse Grenze steigern darf. Wenig sicher ist das dritte Verfahren, wenn man eine Spirale zur Herstellung des unhomogenen Magnetfeldes anwendet, da die Wirkung selbst bei starken Strömen nur klein und die Erwärmung der Spirale auf die Beobachtungsresultate von sehr störendem Einflusse ist.

Die vierte von mir angewendete Methode gibt ebenfalls nur sehr geringe Wirkungen und sind die erhaltenen Zahlen überhaupt nur als angenähert richtig zu bezeichnen; nichtsdestoweniger stimmen die nach den beiden letzten Methoden angestellten Messungen in ihren Resultaten mit den nach den beiden ersten gefundenen recht befriedigend überein. Selbstverständlich gilt das über die Verwendbarkeit der verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Diamagnetisirungszahlen Gesagte auch für die Magnetisirungszahlen schwach magnetischer Körper.

Bezüglich des absoluten Werthes der Zahl für Wismuth gab die zweite Methode für die drei untersuchten Proben etwas verschiedene Werthe; die kleinste (für Nr. 3) erhaltene Zahl ist $k = 13{\cdot}5 \times 10^{-6}$, die grösste (für Nr. 2) ist: $14{\cdot}5 \times 10^{-6}$. Letztere ist noch merklich kleiner, als man sie bisher nach den Vergleichungen mit Eisenstäbchen annahm; aus W. Weber's Inductionsversuchen [1] ergibt sich $16{\cdot}4 \times 10^{-6}$, aus den von Toepler und mir

[1] Elektrodynamische Massbestimmungen insbesondere über Diamagnetismus, S. 523.

angestellten Messungen (l. c. S. 25) folgt $15{\cdot}1\times10^{-6}$, während sich aus Christie's Beobachtungen (l. c. S. 609) als Moment der Masseneinheit Wismuth: $1{\cdot}488\times10^{-6}$, daher $k = 14{\cdot}6\times10^{-6}$ herausstellte. [1]

Ich werde nun die nach den vier Methoden ausgeführten Messungen und erhaltenen Resultate eingehender mittheilen.

Erste Methode. Der von Toepler angegebene Differentialinductor (l. c. pag. 2) wurde unverändert beibehalten; an dem rotirenden Stromunterbrecher habe ich jedoch insoferne eine Änderung getroffen, als der Strom in den Hauptspiralen durch die Rotationsvorrichtung nicht abwechselnd in entgegengesetztem Sinne geschlossen, sondern nur einfach abwechselnd geschlossen und geöffnet wurde. Die in den gegen einander geschalteten Inductionsrollen erzeugten Ströme werden durch den auf der Rotationsaxe befestigten Commutator gleichgerichtet zum Galvanometer geleitet. Die Constanz der Rotationsgeschwindigkeit wird auf die l. c. S. 7 angegebene Weise controlirt.

Zur Messung der rasch folgenden Inductionsströme benutzte ich ein Spiegelgalvanometer nach Wiedemann, zu dem ich mir Multiplicatorrollen von passendem Widerstande (jede 50 S. E.) gewickelt habe. Der leichte, mit Kupferdämpfer umgebene, Ringmagnet des Galvanometers ist durch genäherte Magnetstäbe stark astasirt, so dass er fast aperiodisch schwingt. Nachdem die Wirkungen der beiden Inductionsrollen möglichst genau gegen einander abgeglichen sind, beobachtet man die Veränderung der Ruhelage am Galvanometer in Folge des Einschiebens eines cylindrischen Wismuthkörpers in eine der Inductionsrollen, während durch die Hauptrollen des Inductors ein Strom von der Intensität i (nach abs. Masse) fliesst. Sodann wird zur Bestimmung des diamagnetischen Moments des Wismuths der Strom in den Hauptrollen dauernd unterbrochen und ein Solenoid von genau bekannter Windungsfläche, welches einen Cylinder von sehr nahe gleichen Dimensionen, wie das Wismuth, bildet, an Stelle des letzteren in die Inductionsrolle gebracht. Fliesst nun durch das

[1] Die Zahl k ist, wie bei Boltzmann, positiv eingeführt; das diamagnetische Moment der Volumeinheit bei der magnetisirenden Kraft 1 ist also mit $-k$ zu bezeichnen.

Solenoid ein Strom von der absoluten Intensität i' und wird derselbe genau ebenso oft geschlossen und unterbrochen, wie früher der Strom i in den Hauptrollen, werden endlich die dabei in der Inductionsrolle entstandenen Ströme wieder gleichgerichtet zum Galvanometer geleitet, so ist dadurch das diamagnetische Moment des Wismuthcylinders in absolutem Masse bestimmt.

Sei v das Volum des Wismuths, X die Scheidekraft in der Hauptrolle, k die Diamagnetisirungszahl, so ist das Moment des Wismuths $\Delta = -kvX$, die am Galvanometer durch die einander folgenden Inductionsströme hervorgerufene Ausweichung A ist diesem Moment proportional; ferner ist $X = Ci$, wo C einen aus den Dimensionen der Hauptrolle oder durch Versuche zu bestimmenden Factor bedeutet. Um allzustarke Funken am Quecksilberunterbrecher zu verhüthen, musste vor die Hauptrollen eine Nebenschliessung n aus zickzackförmig gespanntem Kupferdraht gelegt werden; ist w der Widerstand der beiden Hauptrollen zusammen, und wird $\frac{n}{n+w} = c$ gesetzt, so ist $i = Rc\frac{\alpha}{2d}$, unter R den Reductionsfactor der Tangentenbussole (mit Spiegelablesung und starkem Dämpfer), die den Strom i misst, auf elektromagnetisches Mass verstanden: α ist die (reducirte) Ablenkung der Nadel der Bussole in Scalentheilen, d die ebenso gemessene Distanz der Scala vom Spiegel. Somit ist

$$\Delta = -kvCc\,R\frac{\alpha}{2d} = -\gamma A,$$

wo γ eine Constante; A ist mit negativem Zeichen zu nehmen.

Umschliessen ferner die Windungen des Solenoides, welches an Stelle des Wismuths in die Inductionsrolle gebracht wird, zusammen die Fläche F, so ist sein Moment, wenn es vom Strome i' durchflossen wird, $M = Fi'$; heisst A' die Ausweichung der Galvanometernadel in Folge der Inductionsströme, welche von den entstehenden und verschwindenden Solenoidströmen herrühren, und wird der Strom i' an der Tangentenbussole, deren Reductionsfactor jetzt R' heissen möge, gemessen, so ist $i' = \frac{R'\alpha'}{2d}$, wo α' die Ablenkung in Scalentheilen: man hat folglich

$$M = FR' \frac{\alpha'}{2d} = \gamma A'$$

daher

$$k = \frac{F}{Ccv} \frac{R'}{R} \frac{\alpha'}{\alpha} \frac{A}{A'}. \qquad 1)$$

Hierbei wird also vorausgesetzt, dass die Anzahl der Inductionsstösse, welche in der Zeiteinheit auf die Galvanometernadel in Wirksamkeit gelangen, beim Wismuth und beim Solenoid genau die gleiche sei; dieser Anforderung entspricht aber der durch den Helmholtz'schen elektromagnetischen Motor (unter Einschaltung eines Schwungrades) getriebene Rotations-Commutator — wie die Beobachtungen zeigten — in vollkommen befriedigender Weise.

Der bei den Versuchen gebrauchte Cylinder war aus einer, durch Zusammenschmelzen mehrerer grösserer Stücke von verschiedenem Wismuth erhaltenen Masse gegossen; er hat eine Länge von 175 Mm., sein Volum ist 95460 Cmm., daher der Durchmesser = 26·3 Mm.; seine Dichte ist $\sigma = 9 \cdot 81$. Das zum Vergleich verwendete Solenoid besteht aus einer Lage dünnen, sehr gut umsponnenen Kupferdrahtes, der auf einem Glasrohr in 511 Windungen aufgewickelt ist; dasselbe hat eine Länge von 173·5 Mm. und einen Durchmesser von nahe 27·5 Mm.: die aus der Drahtlänge berechnete Fläche ergab sich $F = 303030$ □Mm. Der Widerstand des Nebenschliessungsdrahtes betrug $n = 12 \cdot 90$ S. E., jener der Hauptrollen sammt Zuleitungsdrähten von den Verzweigungsstellen $w = 4 \cdot 09$ S. E., daher $c = 0 \cdot 7593$.

Was den Factor C betrifft, so kann derselbe bekanntlich aus den Dimensionen der Spirale gerechnet werden; man erhält für Punkte, welche sich auf der Axe der Spirale nahe der Mitte derselben befinden, C durch die Gleichung

$$C = \frac{2N l \pi}{b - \beta} \int_{\beta}^{b} \frac{db}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + b^2}} = \frac{2N l \pi}{b - \beta} \log \frac{b + \sqrt{\frac{l^2}{4} + b^2}}{\beta + \sqrt{\frac{l^2}{4} + \beta^2}},$$

wo l die Länge der Spirale, β und b die Halbmesser der innersten und äussersten Lage, N die auf die Längeneinheit der Spirale

entfallende Zahl der Windungen bedeuten. Mit den für die benutzte Rolle geltenden Werthen[1]

$$l = 420 \text{ Mm.}, \; Nl = 1476, \; \beta = 45{\cdot}0 \text{ Mm.}, \; b = 85{\cdot}1 \text{ Mm.}$$

ergibt sich $C = 42{\cdot}12$.

An den von der Mitte der Spirale entfernteren Stellen der Axe herrscht aber eine kleinere Scheidekraft, als sie nach der Gleichung $X = Ci$ mit dem eben angeführten Werthe von C erhalten wird; es wäre daher wegen der bedeutenden Länge des Wismuthcylinders an dem Factor C eine Correction anzubringen. Am besten schien es mir, den Factor ebenfalls durch Versuche zu bestimmen, indem ich das in der Rolle befindliche Solenoid mit einem Meyerstein'schen Galvanometer verband, das einen Magnet von grossem Trägheitsmoment besitzt; durch die Hauptrolle wurde ein Strom von bekannter Stärke geleitet und man beobachtete den Inductionsstrom, der im Solenoide bei Umkehrung der Stromrichtung der Hauptrolle inducirt wurde. Nennt man G den Reductionsfactor des Galvanometers, T die Schwingungsdauer der Magnetnadel, λ das Decrement der natürlichen Logarithmen ihrer Schwingungen, g den Ausschlag in Scalentheilen bei Umkehrung des Hauptstroms, δ die Scalendistanz am Galvanometer, ω den Gesammtwiderstand der Inductionsleitung, so gilt

$$C = \frac{\omega}{2F} \cdot \frac{G}{R} \cdot \frac{T}{\pi} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} \cdot \frac{g}{a} \cdot \frac{d}{\delta};$$

a bedeutet die Ablenkung an der Tangentenbussole, die den Hauptstrom misst. Aus drei auf diese Weise ausgeführten Messungen, die sehr wenig differirten, ergab sich als Mittelwerth

$$C = 41 \cdot 09.$$

Endlich ist noch das Verhältniss der Reductionsfactoren $\frac{R'}{R}$ zu bestimmen; die Tangentenbussole besitzt einen in ein kreisförmiges Brett eingelassenen dicken Drahtkreis von etwa 400 Mm. Durchmesser; neben demselben ist eine Lage von 34 Windungen aufgewickelt. Der kreisrunde Magnetspiegel (20 Mm. Durchm.)

[1] Innerer und äusserer Durchmesser sind Pogg. Ann. Bd. CLX, S. 20, etwas fehlerhaft angegeben; nach jenen Daten wäre C = 42·33.

befindet sich in der Axe des Drahtringes in einer Entfernung, welche dem halben Radius des Ringes gleichkommt. Ein zweiter Drahtkreis ist in grösserer Entfernung von der Nadel angebracht, während in der Nähe derselben eine Multiplicatorrolle von 120 Windungen fest aufgestellt ist: durch jeden der Kreise und Multiplicatoren können die Ströme geleitet werden. Die Verhältnisse zwischen den Reductionsfactoren lassen sich dabei mit grosser Genauigkeit ermitteln und wurden wiederholt Vergleichungen ausgeführt; es ist dadurch auf bequeme Art möglich, Ströme von sehr verschiedener Intensität mit demselben Instrument zu messen. Da der Reductionsfactor auf elektromagnetisches Strommass für den einen dicken Drahtring genau bekannt ist, so sind auch alle anderen mit der Bussole gemachten Strommessungen leicht auf absolutes Mass reducirbar. Für den vorliegenden Fall genügt die Kenntniss des Verhältnisses der Reductionsfactoren; es war $\frac{B}{R'} = 2426 \cdot 4$.

Ich habe anfänglich die Beobachtungen auf andere Art auszuführen versucht. Als Stromunterbrecher nahm ich eine elektromagnetisch angeregte Stimmgabel, an deren einer Zinke ein Drahtbügel befestigt war, der beim Schwingen der Gabel in Quecksilbernäpfchen tauchte und dadurch die Schliessung und Öffnung des Hauptstromes besorgte. Eine zweite, mit der ersten gleichgestimmte Gabel schloss und öffnete in ähnlicher Weise die Leitung der Inductionsrollen. Diese zweite Gabel, deren Zinken magnetisirt sind, wird durch denselben galvanischen Strom in Bewegung erhalten, den die erste Gabel selbstthätig unterbricht; es stellt sich dann zwischen den Bewegungen der Gabeln eine constante Phasendifferenz ein, welche sich durch vorsichtige Verstimmung einer Gabel auf etwa ein Viertel einer Ganzschwingung bringen lässt.[1] Stellt man die Näpfchen derart, dass die Bügel nahe in der Ruhelage der Zinken ins Quecksilber tauchen, so gelangen (je nach der Stromesrichtung in den Elektromagneten der zweiten Gabel) entweder nur die Schliessungs- oder nur die Öffnungsströme zum Galvanometer. Da die Anzahl der Inductionsstösse in der Zeiteinheit hierbei ziemlich gross ist — die Stimm-

[1] Pogg. Ann. Bd. CLIX, S. 60, 1876.

gabeln machten 32 Schwingungen in der Secunde (Ut_{-1}) — so konnten schon mit kleineren Wismuthmassen und geringen Scheidekräften bedeutende Ablenkungen der Galvanometernadel erwartet werden. In der That waren unter Anwendung eines Bunsenelementes bereits sehr merkliche Inductionswirkungen beim Einlegen eines kurzen Wismuthstückes in eine der Inductionsrollen zu beobachten; indess ergaben sich aus der Vergleichung mit dem Solenoid bei verschiedenen Versuchen sehr abweichende und auffallend grosse Werthe für k.

Ebensowenig führte ein anderes Verfahren zum Ziele, bei dem ich beide Gabeln, sowohl die der Hauptstromleitung, als auch jene der Inductionsleitung, unabhängig von einander betrieb, aber den beiden Gabeln eine solche Verstimmung gegen einander gab, dass die mittelst Spaltschirmen, welche an einer Gabel angebracht waren, beobachtete stroboskopische Bewegung der anderen etwa 10—15 Secunden dauerte. Man erhält dann, wie leicht ersichtlich, entsprechend der Periode der stroboskopischen Bewegung Schwingungen der (stark gedämpften) Galvanometernadel mit constanten Umkehrpunkten, da während einer stroboskopischen Schwingung einmal nur die Öffnungs-, dann nur die Schliessungsströme aufs Galvanometer übertragen werden. Es war wegen der stets vorhandenen kleinen Abweichung von der vollständigen Compensation der beiden Inductionsrollen natürlich auch ein Schwingungsbogen der Galvanometernadel zu beobachten, wenn kein Wismuth eingelegt war; dieser Bogen wurde durch Einschieben des Wismuths verändert. Die für k erhaltenen Werthe variirten wieder bei Anwendung verschieden starker Primärströme und waren weit grösser, als sich nach den älteren Beobachtungen erwarten liess. Die Inductionsströme, welche das Solenoid lieferte, ergaben dagegen vollkommene Proportionalität mit der Intensität der durch das Solenoid geleiteten Ströme; so standen z. B. als die Ströme i' im Solenoid im Verhältniss $100 : 52 \cdot 64 : 23 \cdot 27$ verändert wurden, die Schwingungsbogen der Galvanometernadel im Verhältnisse $100 : 52 \cdot 55 : 23 \cdot 32$.

Es kann also die Ursache der Abweichungen nur im Wismuth selbst gesucht werden und in der That sind es die in der Wismuthmasse entstehenden Ströme, welche in der umgebenden Spirale abwechselnd gerichtete tertiäre Ströme (Inductionsströme

zweiter Ordnung) hervorrufen, die in der kurzen Zeit der Schliessung der Inductionsleitung noch nicht vollkommen abgelaufen sind. Bei den rasch auf einander folgenden Schliessungen und Unterbrechungen des Stromes in den Hauptspiralen, wie es bei Anwendung der Stimmgabeln der Fall ist, können die tertiären Ströme in der Inductionsleitung, obwohl sie galvanometrisch gleichwerthig sind, eine Wirkung auf die Nadel haben, da ein Theil dieser Ströme wegen Unterbrechung der Leitung nicht zur Ausgleichung gelangt. Bei den mit dem rotirenden Commutator (Pogg. Ann. CLX) angestellten Versuchen hat sich ein derartiger Einfluss nicht bemerkbar gemacht; es wurden dort auch stets so kleine Rotationsgeschwindigkeiten angewendet, dass eine Speiche der Galvanometerleitung etwa $^1/_4$ Sec. nach jedem Inductionsstoss noch im Quecksilber ihres Troges blieb; das Vorhandensein der tertiären Ströme zeigte sich aber bei den Versuchen mit der Probespirale und dem massiven Kupfercylinder (l. c. S. 13 und 14). Es sind nämlich die nach einander verlaufenden, entgegengesetzt gerichteten, tertiären Ströme, wenn sie sich vollständig durch das Galvanometer ausgleichen, an dem Zittern der Nadel zu erkennen, wird hingegen ein Theil der Ströme durch Unterbrechung der Leitung abgeschnitten, so entsteht eine dauernde Ablenkung der Magnetnadel.[1]

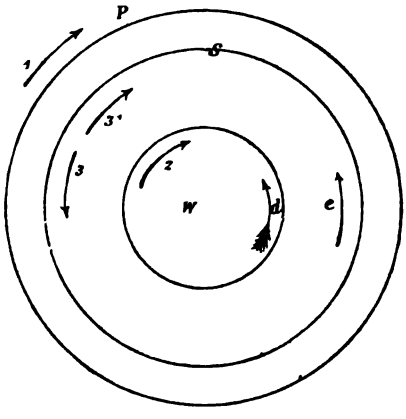
Nehmen wir an, es verschwinde in der Hauptrolle *P* der primäre Strom, dessen Richtung durch den Pfeil 1 angedeutet sei; die directe Induction dieses verschwindenden Stromes auf die

---

[1] Faraday, Exp. Res. XXIII. Pogg. Ann. Bd. LXXXII, 1851. Auf der Wirkung der Induction zweiter Ordnung beruhen auch die interessanten Anwendungen, welche Prof. D. E. Hughes und Herr Chandler Roberts von der von ersterem erfundenen „Inductionswage" gemacht haben. Phil. Mag. (5) VIII, S. 50. 57 u. 551, 1879 (Beibl III, S. 647; IV, S. 138 und 481). Ersetzt man nämlich das Galvanometer in der Leitung der Inductionsrollen durch ein Telephon, so vernimmt man in demselben keinen Laut bei durch ein Mikrophon verursachten Schwankungen der Intensität des Hauptstroms, wenn die Wirkungen der Inductionsrollen gegen einander vollkommen abgeglichen sind. Nähert man aber der einen Rolle einen leitenden Körper, in dem Inductionsströme entstehen können, so erregt dieser tertiäre Ströme in den Inductionsrollen entsprechend seiner Masse und seinem Leitungsvermögen, und es werden daher jetzt die Schwankungen des Hauptstroms vernehmbar. (O. J. Lodge, Phil. Mag. (5) IX S. 123, 1880; Beibl. IV. S. 293.)

Inductionsrolle S kann wegen der Compensation ausser Acht gelassen werden. In der Wismuthmasse W wird der Strom 2 erzeugt, welcher beim Entstehen und beim Verschwinden in der Inductionsrolle zwei galvanometrisch gleiche, entgegengesetzte tertiäre Ströme, dargestellt durch die Pfeile 3 und 3′ hervorruft. Durch das Verschwinden des Primärstroms 1 wird aber auch der verschwindende Diamagnetismus des Wismuths auf die Inductionsrolle S inducirend wirken. Den Diamagnetismus können wir uns durch Ströme von der Richtung des Pfeiles d vorstellen; sein Verschwinden verursacht daher in S einen Strom e, welcher mit dem ersten (3) der tertiären Ströme gleichgerichtet ist. Da die diamagnetische Polarität des Wismuths schnell zu verschwinden scheint, so wird der Verlauf des Stromes e viel rascher sein, als jener von 3 und 3′. Wird durch Unterbrechung der Inductionsleitung (wie dies bei den Stimmgabeln oder bei sehr rasch rotirendem Stromunterbrecher der Fall ist) ein Theil des Stromes 3′ abgeschnitten, so erscheint der Strom e zu gross; die gleiche Überlegung gilt für den in P entstehenden Strom 1 und somit erklärt sich, warum die Versuche mit den Stimmgabeln die Zahl k stets zu gross ergaben.

Fig. 1.



Ich musste daher zur Anwendung des rotirenden Quecksilberunterbrechers zurückkehren und überdies durch Versuche die Grenze feststellen, bis zu welcher die Geschwindigkeit der Rotation gesteigert werden darf, ohne dass dadurch zu Fehlern Veranlassung gegeben wird. Am zweckmässigsten schien dazu die Anwendung einer Probespirale zu sein — wie sie auch bei den früheren Versuchen gebraucht wurde — welche in die eine der Inductionsrollen eingelegt und abwechselnd geöffnet oder geschlossen wird. Die Probespirale bestand aus dickem Kupferdraht und hatte gegen 1200 Windungen von etwa 30 Mm. mittlerem Durchmesser. Zunächst wurde mit derselben die Galvanometer-

wirkung der bei Öffnung des Primärstromes entstehenden tertiären Ströme beobachtet, wenn die Inductionsleitung nach Unterbrechung des Primärstromes nur eine gewisse kurze Zeit hindurch geschlossen blieb. Die Schliessung und Unterbrechung des Primärstromes erfolgt in bekannter Weise dadurch, dass die Speichen eines rotirenden, dreizackigen Sternes durch das Quecksilber eines untergestellten Troges hindurchgehen; die Leitung von den Inductionsrollen zum Galvanometer wird durch einen zweiten ähnlichen Stern vermittelt. Es wird nun dieser zweite Stern an der Rotationsaxe so gestellt, dass eine Speiche desselben sich im Quecksilber befindet, wenn die entsprechende Speiche der Primärleitung ihr Quecksilber verlässt und zugleich wird an einem auf der Axe befestigten Gradbogen der Winkelweg abgelesen, den die Sternspeiche der Inductionsleitung im Quecksilber zurücklegt, nachdem die Primärleitung unterbrochen worden ist. Hieraus und aus der bekannten Rotationsgeschwindigkeit der Axe findet sich die Zeit, durch welche die Inductionsleitung nach Unterbrechung des Hauptstromes noch geschlossen bleibt. Die Axe rotirte dabei stets langsam, so dass sie nur etwa zwei Umdrehungen in der Secunde machte. An einem Meyerstein'schen Galvanometer wurden nun die Scalenablenkungen s bestimmt, welche eintraten, wenn die Probespirale geschlossen wurde, wobei die Zeitdauer ϑ der Schliessung der Inductionsleitung verschieden lang gewählt wurde. Es war für

ϑ: 0·010, 0·030, 0·059, 0·12 Sec.
s: 357, 93, 38, 1.

Nach etwas mehr als 0·1 Sec. sind also die durch die Probespirale erzeugten, tertiären Ströme so gut wie vollständig abgelaufen; der Primärstrom war dabei von drei Bunsenelementen geliefert, vor den Hauptrollen befand sich die Nebenschliessung n.

In ähnlicher Weise konnte die Dauer der tertiären Ströme dadurch gefunden werden, dass man die Contactspeiche der Inductionsleitung erst nach Unterbrechung des Primärstromes in das Quecksilber ihres Troges eintreten liess; unter ϑ' ist die Zeit angegeben, welche nach der Öffnung des Hauptstromes bis zur Schliessung der Inductionsleitung verfliesst, unter s' die entsprechenden Scalenablenkungen: letztere waren jetzt entgegen-

gesetzt jenen im früheren Falle (bei gleicher Richtung des Hauptstromes), da nun die Wirkung des zweiten Theiles des tertiären Stromes überwog.

ϑ': 0·0096, 0·024, 0·036 Sec.

s': 395, 49, 10.

Für die bei Schliessung des Hauptstromes entstandenen tertiären Ströme ergaben die Beobachtungen folgende Werthe von ϑ und s

ϑ: 0·033, 0·060, 0·078, 0·11

s: 41, 11, 6, 0.

Wurde dagegen die Inductionsleitung um eine Zeit ϑ' später als der Primärstrom geschlossen, so war für

ϑ': 0·040, 0·053, 0·069, 0·098

s': 22, 10, 5, $^1/_2$.

Aus diesen vorläufigen Versuchen ergibt sich, dass bei den angewandten Stromstärken die tertiären, durch die Probespirale in der sie umgebenden Inductionsrolle erregten, Ströme sowohl bei Schliessung als auch bei der Öffnung des Primärstromes in der Zeit von $^1/_{10}$ Sec. nahe vollständig abgelaufen sind. Wurde an Stelle der Probespirale ein massiver Kupfercylinder (Länge 160 Mm., Durchm. 20 Mm.) genommen, so war die Wirkung nur etwa $^1/_{10}$ von jener; da nun die im Wismuth entstehenden Ströme jedenfalls noch weit schwächer wirken (vielleicht aber etwas länger dauern), so wird man bei den diamagnetischen Inductionsversuchen den Stromunterbrecher noch mit einer Geschwindigkeit rotiren lassen dürfen, bei der 8—9 Inductionsstösse in der Secunde aufs Galvanometer gelangen.[1] Die Wirkung eines massiven Wismuthcylinders darf nicht durch weitere Vermehrung der Zahl der Inductionsstösse gesteigert werden, auch die Stärke des Primärstromes darf wegen der trotz Nebenschliessung auftretenden Unterbrechungsfunken eine gewisse Grenze nicht überschreiten; es musste daher eine grosse Wismuthmenge angewendet werden, um mit Sicherheit messbare Ausweichungen am Galvanometer zu erhalten.

[1] Über die Verzögerung der Induction in körperlichen Leitern s. Wiedemann, Galv. II, 2, S. 204, 212 ff.

Ich erlaube mir hier noch einer Versuchsreihe mit der Probespirale Erwähnung zu thun, bei der die tertiären Ströme für verschiedene Intensitäten des primären Stromes beobachtet wurden; der Stromunterbrecher rotirte dabei stets mit gleicher Geschwindigkeit (etwa 7 Stösse pro Secunde). Es wirkten sowohl die Öffnungen als die Schliessungen des primären Stromes inducirend und durch den Galvanometer-Commutator gelangten die tertiären Strompaare insoferne in gleicher Weise zum Galvanometer, dass in jedem Paare die Aufeinanderfolge der beiden tertiären Ströme die gleiche war. Die Sternspeichen des Commutators verliessen jedoch natürlich das Quecksilber, bevor noch die tertiären Ströme vollständig abgelaufen waren. Als die Stärke des Primärstromes im Verhältniss 100 : 193 : 280 : 360 zunahm, wuchsen die durch die tertiären Ströme entstandenen Galvanometerablenkungen im Verhältniss 100 : 195 : 258 : 329; das Zurückbleiben der Wirkungen deutet auf den ungleichen zeitlichen Verlauf hin, den die tertiären Ströme bei verschiedener Intensität des Primärstromes haben.

Bevor zum definitiven Vergleich der durch das Wismuth erzeugten Ströme mit den durch das Solenoid hervorgerufenen geschritten wurde, habe ich noch geprüft, ob innerhalb der bei den Versuchen zur Anwendung gelangenden Rotationsgeschwindigkeiten des Stromunterbrechers Proportionalität zwischen dieser Geschwindigkeit und der Galvanometerwirkung stattfinde. Jeder Versuch wurde 6—7 Mal wiederholt, indem der Wismuthcylinder abwechselnd in seine Inductionsrolle gelegt und wieder herausgezogen wurde, wobei man jedesmal den Galvanometerstand notirte; in derselben Weise wird der Versuch sodann bei entgegengesetzter Richtung des Hauptstromes ausgeführt. So erhielt man die in der folgenden Tabelle mitgetheilten Resultate. A ist die Ausweichung der Galvanometernadel, hervorgerufen durch das Wismuth; z die Anzahl der Inductionsstösse in der Secunde, die bei jedem Versuch mehrmals bestimmt wurde; α bedeutet die Ablenkung an der Tangentenbussole (R) für den Primärstrom (i), die vor und nach jedem Versuch abgelesen wird, während die Quecksilbertröge des Unterbrechers dauernd überbrückt sind: unter A_1 sind endlich die auf gleiche Stromstärke ($\alpha = 280 \cdot 0$)

reducirten Ausweichungen verstanden. Der Primärstrom rührte von 12 Bunsen'schen Elementen her.

Nr.	A	z	α	A_1	Verhältniss der A_1	Verhältniss der z
1	18·34	2·562	280·0	18·34	32·3	32·1
2	30·8	4·602	271·8	31·7	55·8	57·6
3	39·5	5·824	268·2	41·2	72·5	72·9
4	53·6	7·986	264·2	56·8	100·0	100·0

Zur weiteren Controle, dass die beobachteten Wirkungen von tertiären Strömen unbeeinflusst sind, wurde jedesmal auch der massive Kupferstab in die Inductionsrolle eingelegt; es waren dabei ausser den Zuckungen stets nur kleine Ausweichungen der Galvanometernadel und zwar entgegengesetzt jenen beim Wismuth zu bemerken, welche wohl einem geringen Eisengehalt des Kupfers zuzuschreiben sein dürften.

Die Vergleichungen mit dem Solenoid sind so ausgeführt worden, dass vor und nach den Versuchen mit dem Wismuth das Solenoid in die Inductionsrolle genau an die Stelle des Wismuths gebracht, der Strom i' durch Überbrückung am Unterbrecher geschlossen und seine Stärke an der Tangentenbussole (R') gemessen wurde. Sodann wird nach weggenommener Überbrückung die Wirkung des Solenoids mehrmals beobachtet, indem die Ablenkungen der Galvanometernadel sowohl bei entgegengesetzten Richtungen des Stromes i', als auch mit Anwendung eines vor dem Galvanometer befindlichen Commutators gemessen wurden; während eines solchen Vergleiches rotirte der Stromunterbrecher fortwährend, ohne angehalten zu werden; seine Geschwindigkeit wurde wiederholt auf die bekannte Weise bestimmt.

In der folgenden Tabelle sind einige der erhaltenen Resultate zusammengestellt; A, α, A', α' und k haben die Bedeutung wie in der Formel 1). Es ist $k = 41 \cdot 93 \times 10^{-6} \frac{A\alpha'}{A'\alpha}$. Unter z ist noch die Zahl der Inductionsstösse pro Secunde angegeben.

Nr.	A	α	A'	α'	z	k
1	23·5	212·8	127·4	377·5	6·55	$13·72\times10^{-6}$
2[1]	64·8	214·0	457·8	482·9		·39
3	45·4	246·1	217·8	380·9	7·22	·53
4	53·05	284·5	216·5	379·2		·69

Bei einer anderen Reihe von Messungen war zur Bestimmung der Stromstärken i' der weniger empfindliche Multiplicator der Tangentenbussole angewendet; es war nun $\frac{R}{R'} = 306·99$, daher ist $k = 331·4\times10^{-6}\frac{A\alpha'}{A'\alpha}$

Nr.	A	α	A'	α'	z	k
6	23·5	212·8	170·5	64·4	6·55	$13·82\times10^{-6}$
7	23·16	214·6	200·0	75·6		·52
8[1]	57·0	213·0	405·8	61·1	5·80	·35

Mittel aus beiden Reihen: $k = 13·57\times10^{-6}$.

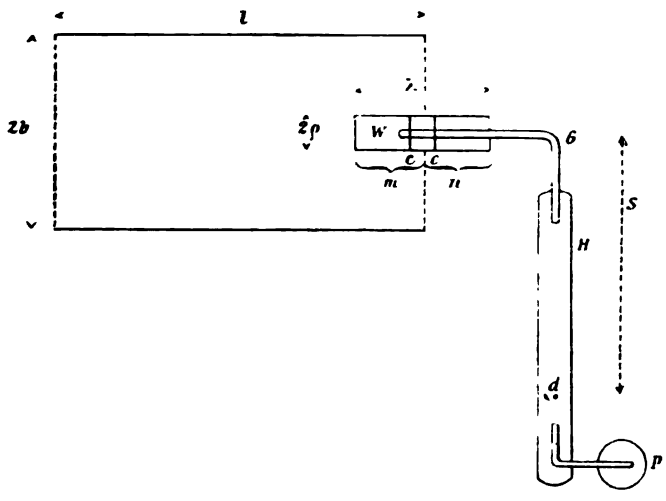
Bei den im Vorhergehenden beschriebenen Versuchen, deren Ausführung zwei Beobachter erforderte, bin ich von Herrn stud. Paul Czermak aufs Thatkräftigste unterstützt worden, dem ich für seine freundliche Mithilfe an dieser Stelle meinen Dank ausspreche.

Zweite Methode. Zur Messung der Wirkung einer cylindrischen von einem Strome durchflossenen Spirale auf einen coaxialen diamagnetischen Cylinder verwendete ich eine grosse Rolle aus sehr gut isolirtem 2·5 Mm. dickem Kupferdraht, dieselbe hat eine Länge $l = 497$ Mm. und besteht im Ganzen aus 2303 Windungen in 13 Lagen. Der Radius der innersten Lage ist 32·9 Mm., jener der äussersten 62·3 Mm; man kann den Strom durch jede beliebige Zahl von Lagen hindurchsenden. Die

[1] Galvanometer sehr stark astasirt.

Wismuthcylinder W waren mit Coconfäden c an dem einen Arme des rechtwinklig gebogenen Glasstäbchens G aufgehangen, welches mit seinem anderen Arme auf einen leichten Holzbalken H aufgekittet ist (s. Fig.); das ganze System hängt an einem dünnen,

Fig. 2.



circa 30 Ctm. langen Neusilberdraht d und ein Gegengewicht p aus Messing ist so angebracht, dass Balken und Wismuthcylinder in horizontalen Ebenen schwingen.

Wenn die Spirale aus einer einzigen Lage von Windungen vom Radius b besteht und N die Anzahl der Windungen auf die Längeneinheit bedeutet, so wird ein Wismuthcylinder, dessen Radius ρ ist und der sich in solcher Lage conaxial zur Spirale befindet, dass das aus der Spirale herausragende Stück n desselben dem in der Spirale befindlichen m gleich ist, mit einer Kraft ξ aus der Spirale herausgestossen, welche gegeben ist durch

$$\xi = \frac{8\pi^3 k N^2 i^2 \rho^2 m}{\sqrt{b^2+m^2}}\left[1 + \frac{3\rho^2 b^2}{8(b^2+m^2)^2} - \frac{b^2(l^2+m^2)}{2(l^2-m^2)^2} - \frac{b^2 l\sqrt{b^2+m^2}}{(l^2-m^2)^2}\right]$$

Boltzmann, l. c. S. 703, Formel 18), 19) und 20).

k ist wieder die Diamagnetisirungszahl des Wismuths, i die Stromstärke in der Spirale nach elektromagnetischem Masse. Es wird dabei noch vorausgesetzt, dass das Wismuthstäbchen so

dünn und die Spirale so lang sei, dass in der Klammer Glieder von der Ordnung $\frac{\rho^4 b^2}{(b^2+m^2)^3}$, ferner von der Ordnung $\frac{b^4}{l^4}$ und $\frac{\rho^2 b^4}{l^2(b^2+m^2)^2}$ bereits vernachlässigt werden können.

Um die Wirkung für den Fall zu erhalten, dass die Spirale aus ν Lagen von Windungen besteht, wobei der Radius der innersten Lage $= \beta$, jener der äussersten $= b$ sei, habe ich die Kraft nach der Formel

$$\xi = \frac{\nu^2}{b-\beta}\int_\beta^b \xi db$$

gerechnet; man erhält dadurch

$$\xi = \frac{8\pi^3 k N^2 \nu^2 i^2 \rho^2 m}{b-\beta}\left[\log\frac{b+\sqrt{b^2+m^2}}{\beta+\sqrt{\beta^2+m^2}} + \frac{\rho^2}{8m^2}\left(\frac{b^3}{\sqrt{b^2+m^2}^3} - \frac{\beta^3}{\sqrt{\beta^2+m^2}^3}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{l^2+m^2}{4(l^2-m^2)^2}\left(b\sqrt{b^2+m^2} - \beta\sqrt{\beta^2+m^2} - m^2\log\frac{b+\sqrt{b^2+m^2}}{\beta+\sqrt{\beta^2+m^2}}\right) - \frac{l(b^3-\beta^3)}{3(l^2-m^2)^2}\right]$$

oder kürzer

$$\xi = \gamma k i^2[\varepsilon+\zeta-\eta-\vartheta],$$

wo γ, ε, ζ, η und ϑ leicht ersichtliche Bedeutungen haben. [1]

Das Drehmoment, welches die Spirale auf den Balken übt, ist ξs, wenn s die Länge des Hebelarmes bedeutet, an dem die

---

[1] Es hat übrigens Boltzmann später untersucht, inwieweit eine genaue Formel für die aus vielen Lagen bestehende Spirale sich von der obigen, bei der Rechnung verwendeten, unterscheidet (Sitzungsber. d. k. Ak. d. W. in Wien, Bd. LXXXIII, S. 576, März 1881), und gefunden, dass unter den gemachten Voraussetzungen nur der als drittes Glied in der Klammer stehende Ausdruck (η) etwas anders ausfällt. Der Unterschied der beiden Werthe ist sehr nahe $\frac{(b-\beta)(l^2+m^2)b_1^2}{3(l^2-m^2)^2\sqrt{b_1^2+m^2}}$, wobei $b_1 = \frac{b+\beta}{2}$, und zwar ist der Absolutwerth des Ausdrucks in der genäherten Formel um diesen Unterschied zu gross. Die numerische Berechnung eines Falles zeigte, dass der Werth von k unter Anwendung der genauen Formel sich um etwa $\frac{1}{3}$ % kleiner ergibt, als er nach der obigen Näherungsformel sich herausstellt; da die Grenzen der Beobachtungsfehler jedoch erheblich grösser sind, so habe ich die bereits nach der genäherten Formel gerechneten Werthe für k beibehalten.

Kraft $\bar{\xi}$ angreift. Dasselbe bewirkt eine Ablenkung des Balkens aus seiner Lage um einen Winkel φ und es gilt $\bar{\xi}s = D\varphi$, wo D das von der Torsion des Aufhängedrahtes herrührende Moment ausdrückt: letzteres ist durch Schwingungsdauer T und Trägheitsmoment K gegeben, $D = \frac{\pi^2 K}{T^2}$, daher

$$\bar{\xi}s = \frac{\pi^2 K}{T^2}\varphi.$$

Die Bestimmung von φ geschah mit Hilfe eines nahe der Drehaxe am Balken befestigten Spiegels; heisst δ die Distanz der Scala vom Spiegel und A die auf den Bogen reducirte Anzahl der Scalentheile, um welche die Ruhelage des Balkens verschoben wird, so hat man $\varphi = \frac{A}{2\delta}$. Die Messung der Stromstärke i wird an der entfernt von der Rolle aufgestellten Spiegeltangentenbussole (Reductionsfactor auf absol. magn. Mass $= R$) vorgenommen; ist die auf die Tangente des Winkels reducirte Scalenablenkung α und d wie früher die Scalendistanz, also $i = \frac{R\alpha}{2d}$, so ergibt sich

$$\frac{R^2\alpha^2}{4d^2}\gamma ks(\varepsilon+\zeta-\eta-\vartheta) = \frac{\pi^2 K}{T^2}\cdot\frac{A}{2\delta}$$

und daraus mit Rücksicht auf die Bedeutung von γ

$$k = \frac{K(b-\beta)}{4\pi N^2\nu^2\rho^2 msR^2(\varepsilon+\zeta-\eta-\vartheta)}\frac{d^2}{\delta}\cdot\frac{A}{\alpha^2T^2} = f\frac{A}{\alpha^2T^2}, \qquad 2)$$

wo f ein durch die Dimensionen des Wismuths, der Spirale und des Aufhängesystemes bestimmter Factor ist. Die Formel 2) gilt für den Fall, dass die Mitte des Wismuthcylinders in der abgelenkten Lage des Balkens mit dem Ende der Spirale zusammenfalle. Um dies bei den Versuchen mit Sicherheit zu erreichen, war (einigermassen ähnlich wie bei G. Wiedemann's Versuchen, Pogg. Ann. Bd. CXXVI, S. 1), der Torsionskopf der Aufhängevorrichtung durch eine Mikrometerschraube mit Trommeltheilung drehbar und dadurch leicht zu erzielen, dass bei abgelenktem Balken nahe derselbe Theilstrich der Scala gespiegelt wurde, welcher am Fernrohr erschien, wenn die Wismuthmitte gerade

mit dem Spiralenende zusammenfiel; zur Erkennung dieser Lage des Cylinders diente eine kleine auf Papier gezeichnete Scala, die nahe dem Wismuthstabe am Spiralenende passend befestigt war. Die Aufhängevorrichtung ist in ein horizontales Brett eingelassen, welches von zwei starken Säulen getragen wird; die Säulen selbst sind an die Tischplatte festgeschraubt.

Weil bei der Bestimmung des Trägheitsmomentes nach der Gauss'schen Methode die Schwingungsdauer des Balkens mit angehängten Gewichten sehr gross ausfiel, war unterhalb des Balkens an einem in seiner verlängerten Drehaxe befindlichen Stift noch ein Messingschiffchen zur Aufnahme eines cylindrischen Magnetes angebracht. Bei der Bestimmung des Trägheitsmomentes wird der Magnet in das Schiffchen eingelegt und sein aus den Dimensionen berechnetes Trägheitsmoment wird dann von dem Gesammtmoment in Abzug gebracht.

Um die in Folge der Erwärmung der Rolle entstehenden Luftströmungen unschädlich zu machen, war folgende Einrichtung getroffen. In das Innere des Messingrohrs, auf welches die Rolle gewickelt ist, ist eine kurze, doppelwandige, an einem Ende verschlossene Pappröhre eingeschoben; ein Pappkasten mit entsprechenden Glaswänden, um die Bewegung des Balkens zu beobachten, umgibt ferner den Balken seiner ganzen Länge nach und schliesst an die Pappröhre an; oben hat der Kasten eine kleine Öffnung, um den Aufhängedraht hindurchzulassen. Endlich steht die Rolle sammt der Aufhängevorrichtung noch unter einem grossen Kasten mit Glaswänden, von denen die dem Beobachtungsfernrohr zugewendete aus Spiegelglas besteht. Die Verschiebungen, welche der Balken beim Hindurchleiten eines Stromes durch die Rolle zeigte, erfolgten nun auch mit grosser Regelmässigkeit, während sich ohne die erwähnten Vorsichtsmassregeln der störende Einfluss der Erwärmung der Rolle sehr bemerkbar machte.

Bei jedem Versuch wird durch eine vorläufige Bestimmung ungefähr die Grösse der Verschiebung der Ruhelage des Balkens ermittelt und dann mit der Schraube am Torsionskopfe der Aufhängung dem Balken eine solche Stellung gegeben, dass die Wismuthmitte in der abgelenkten Lage des Balkens ziemlich genau in die Endfläche der Spirale fällt. Sodann wird eine

Bestimmung der Schwingungsdauer des Balkens ausgeführt; diese geschieht durch elektrische Registrirung der Durchgänge durch die Ruhelage, während auf dem Papierstreifen des Registrirapparates zugleich die Secundenmarken einer astronomischen Uhr verzeichnet werden. Nachdem die Stärke des die Rolle durchfliessenden Stromes i gemessen ist, bestimmt man aus mehreren Umkehrpunkten die Ruhelagen des Balkens abwechselnd bei offenem und geschlossenem Stromkreise; auch werden zuweilen Versuche bei entgegengesetzter Stromrichtung gemacht; schliesslich wird die Stromstärke nochmals gemessen.

Ich gebe zunächst ein vollständiges Protocoll einer solchen Versuchsreihe.

Wismuth Nr. 1; Länge $\lambda = 2m = 95{\cdot}0$ Mm., Durchmesser $2\rho = 9{\cdot}65$ Mm., Dichte $\sigma = 9{\cdot}813$, die Mitte des Cylinders befindet sich in der Endfläche der Spirale, wenn die Zahl 550 der Scala am Fadenkreuze des Fernrohrs erscheint. Der Strom wird von acht Bunsenelementen geliefert und durchfliesst sämmtliche Drahtlagen der Rolle. Schwingungsdauer $T = 55{\cdot}79$ Sec.; Ausweichung der Nadel der Tangentenbussole : 156·4 Scalenstriche. Die Ruhelagen des Balkens, bei offenem (o) und geschlossenem (g) Strome sind bei den Zahlen

o:	443·4	444·8	446·2	447·3	448·8
g:	550·0	551·6	553·0	554·5.	

Die Ruhelage bei offenem Strom verschiebt sich allmälig, aber ziemlich regelmässig; nimmt man daher das Mittel je zweier auf einander folgenden Ruhelagen bei offenem Strom und verbindet es mit dem dazwischenliegenden Werthe derselben bei geschlossenem Strom, so erhält man die Verschiebungen

$$105{\cdot}9,\ 106{\cdot}1,\ 106{\cdot}3,\ 106{\cdot}5.$$

Die nochmalige Strommessung gibt 156·9 Sc. Ausweichung. Nun war die Scalendistanz an der Tangentenbussole $d = 1932$, jene beim Wismuth $\delta = 3411$ Scalentheile, die Mittelwerthe von α und A reduciren sich daher mit Rücksicht auf jene Distanzen auf $A = 106{\cdot}09$, $\alpha = 156{\cdot}4$ und es ist

$$\frac{A}{\alpha^2 T^2} = 1{\cdot}393 \times 10^{-6}.$$

In gleicher Weise sind die Beobachtungen bei anderen Stromstärken angestellt, jedesmal wurden sämmtliche 13 Lagen der Rolle verwendet; die nachstehende Tafel gibt die erhaltenen Resultate.

Nr.	Zahl der Bunsenelemente	T	A	α	$\frac{A}{\alpha^2 T^2}$
1	2	55·82	8·94	45·10	$1·392 \times 10_{-6}$
2	3	55·82	19·18	66·55	·390
3	4	55·79	32·59	87·14	·378
4	8	55·79	106·09	156·4	·393
5	12	55·69	212·4	223·8	·367

Bei den folgenden Angaben sind stets Millimeter, Milligramm und Secunden als Einheiten zu Grunde gelegt.

Das Trägheitsmoment des Balkens mit dem Wismuth wurde $K = 5259·1 \times 10^6$ gefunden; die Länge des Hebelarmes ist $s = 221·1$, der Reductionsfactor der Tangentenbussole $R = 763·1$, $N = \frac{2303}{497} = 4·6336$; mit Rücksicht auf die oben angegebenen Werthe von m, ρ, b, β und l, ferner von d und δ berechnet sich der Factor $f = 10·108$ und damit ergeben die Versuche

Nr.	k	X
1	$14·07 \times 10^{-6}$	258
2	·05	381
3	13·93	499
4	14·08	895
5	13·82	1280

Mittel $k = 13·99 \times 10^{-6}$. [1]

[1] Aus den Messungen der diamagnetelektrischen Induction ergab sich für dasselbe Wismuth das Moment der Masseneinheit durch die Scheide-

Unter X ist noch die „mittlere Scheidekraft“ angeführt, gemessen in den angegebenen Einheiten, d. i. die Grösse der Scheidekraft, welche in der Endfläche der Rolle in der Axe derselben herrscht; die Berechnung hat hier nach der Formel

$$X = \frac{2\pi N\nu li}{b-\beta} \log \frac{b+\sqrt{l^2+b^2}}{\beta+\sqrt{l^2+\beta^2}} = 28\cdot 97i$$

zu geschehen.

Ich theile weiter die Resultate mit, welche sich bei Versuchen mit zwei anderen Wismuthcylindern Nr. 2 und Nr. 3 herausstellten. An dem Apparate war insoferne eine kleine Veränderung vorgenommen, als der an dem Balken befestigte Glasstab, welcher die Wismuthcylinder trägt, unter spitzem Winkel derart gebogen worden war, dass bei einer kleinen Drehung des Balkens die Axe des Cylinders sich möglichst genau in der Axe der Drahtrolle verschob; es fiel also die Drehungsaxe des Balkens in die durch die Endfläche der Rolle gelegte Ebene. Der Drahtring an der Tangentenbussole, den der Strom i durchfloss, war etwas entfernter von der Nadel aufgestellt, als bei den früheren Messungen, der Reductionsfactor war $R = 796\cdot 9$. Es wurden ferner die Drahtlagen der Rolle in verschiedener Zahl angewendet, indem entweder nur die innerste oder die drei innersten Lagen ausgeschaltet waren.

Wismuth Nr. 2; Länge 99·5, Durchmesser 8·34, Dichte 9·820.

---

kraft 1 hervorgerufen: $\frac{1}{670117} = 1\cdot 492 \times 10^{-6}$ (Pogg. Ann. CLX, S. 25). Wie (S. 8 Anm.) angegeben wurde, ist damals die Scheidekraft in der Rolle (1343) etwas zu gross berechnet worden, sie betrug nur 1304. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich aus den älteren Beobachtungen für die Masseneinheit Wismuth die Zahl $1\cdot 535 \times 10^{-6}$ und für die Volumeinheit (Dichte 9·81) $k = 15\cdot 06 \times 10^{-6}$. Nimmt man dagegen den aus den obigen Versuchen hervorgehenden Werth $k = 13\cdot 99 \times 10^{-6}$ als richtig an, so folgt umgekehrt für die Grösse m (Moment der Masseneinheit des Eisenellipsoides bei der Scheidekraft 1304) der Werth 2091; rechnet man hieraus c (Maximum des Moments eines Milligramms Eisens), so findet man 2157, was mit dem von v. Waltenhofen (Sitzb. d. k. Ak. in Wien Bd. LIX, S. 780; Pogg. Ann. Bd. CXXXVII, S. 529) als Mittel aus den Beobachtungen verschiedener Forscher angegebenen Werth 2125 nahe übereinstimmt. (S. auch J. Haubner, Sitzb. d. Wiener Ak., Bd. LXXXII, S. 771, 1880.)

Nr.	Zahl der Elemente	Zahl der Drahtlagen	T	A	α	$\frac{A}{\alpha^2 T^2}$
1	6	13	47·34	36·97	121·1	$1{\cdot}125\times10^{-6}$
2	10	13	47·34	87·90	186·9	·123
3	10	12	47·41	76·95	190·2	0·946
4	6	10	47·33	29·17	141·2	0·653
5	10	10	47·33	66·70	215·2	.643

Es war $K = 3769{\cdot}3\times10^6$, $s = 212{\cdot}2$, $d = 1957$, $\delta = 2458$. Für die Versuche Nr. 1 und 2 berechnet sich $f = 12{\cdot}833$, für Nr. 3 ist $f = 15{\cdot}333$, endlich für Nr. 4 und 5 folgt $f = 22{\cdot}667$; damit ergeben sich folgende Werthe

Nr.	k	X
1	$14{\cdot}44\times10^{-6}$	714
2	·41	1102
3	·50	1038
4	·80	641
5	·57	978.

Mittel $k = 14{\cdot}54\times10^{-6}$.

Wismuth Nr. 3; Länge 99·5, Durchmesser 8·35, Dichte 9·818. Zahl der verwendeten Drahtlagen 12, Mittel der Schwingungsdauer vor und nach den Versuchen 43·53.

Nr.	Zahl der Elemente	A	α	$\frac{A}{\alpha^2 T^2}$
1	4	10·62	88·61	$0{\cdot}7135\times10^{-6}$
2	6	21·07	125·0	·7114
3	8	31·55	153·1	·7104
4	10	46·22	185·8	·7066

Der Factor f ergibt sich $= 18{\cdot}974$ und damit folgt

Nr.	k	X
1	$13{\cdot}54 \times 10^{-6}$	392
2	·50	552
3	·48	676
4	·41	822

Mittel $k = 13{\cdot}48 \times 10^{-6}$.

Die Differenzen, welche die Werthe k für die drei verschiedenen Wismuthcylinder zeigen, sind sehr merklich; man könnte vermuthen, dass die Beobachtungsfehler, namentlich die Unsicherheit in der Bestimmung der Trägheitsmomente die Unterschiede von k verursacht haben. Dagegen scheint aber der folgende Umstand zu sprechen: Der Neusilberdraht, an dem der Balken hing, war bei den Versuchen mit Wismuth Nr. 1 und Nr. 2, obwohl sie zu verschiedenen Zeiten gemacht wurden, derselbe, es muss daher das statische Directionsmoment D der Torsionskraft des Drahtes sehr nahe dasselbe sein; berechnet man mit den oben angegebenen Werthen der Trägheitsmomente und dem Mittelwerthe der Schwingungsdauer jenes Moment D, so erhält man für dasselbe 16·68 und $16{\cdot}80 \times 10^6$, welche Werthe so gut übereinstimmen, dass bedeutende Fehler bei den Bestimmungen der K wohl ausgeschlossen sind. Es dürfte vielmehr die Verschiedenheit von k in der Beschaffenheit der verwendeten Wismuthcylinder ihren Grund haben. Zunächst wäre auf geringen Eisengehalt zu schliessen.[1] Herr Hinteregger hatte die Güte, Proben des Metalls, aus dem die drei Cylinder hergestellt waren, auf ihren Eisengehalt zu untersuchen; er fand in allen drei Wismuthproben Spuren von Eisen. Durch ein Titrirverfahren mit übermangansaurem Kali ergaben sich die Eisengehalte zwischen 0·02 und 0·05 Pct., doch hat das Wismuth mit dem stärksten Eisengehalt (Nr. 1) nicht die kleinste Diamagnetisirungszahl. Übrigens möchten die angegebenen Mengen wohl nahe an der Grenze des auf chemischem Wege Nachweisbaren gelegen sein.

[1] Vergl. Christie, l. c. §. 24.

Ich habe endlich auch aus derselben Wismuthmasse, aus welcher der bei den Inductionsversuchen (erste Methode) gebrauchte grosse Cylinder gegossen worden war, noch eine kleine Stange hergestellt und nach der zweiten Methode untersucht. Die Dimensionen des kleinen Cylinders waren: Länge 72·8, Durchmesser 10·01, Dichte 9·814. Trägheitsmoment $K = 3896 \times 10^6$, der Factor f berechnete sich zu 16·83. Zwei Versuchsreihen ergaben folgende Resultate: $T = 44{\cdot}89$.

Zahl der Elemente	A	α	$\frac{A}{\alpha^2 T^2}$	k	X
6	27·12	126·6	$0{\cdot}8397 \times 10^{-6}$	$14{\cdot}13 \times 10^{-6}$	559
9	52·50	176·4	8373	·09	780

Das Mittel der beiden Werthe $k = 14{\cdot}11 \times 10^{-6}$ weicht von dem nach der ersten Methode gefundenen (13·57) allerdings um nahe 4 Pct. ab, doch kann in Anbetracht der Kleinheit von k die Übereinstimmung der auf zwei von einander gänzlich verschiedenen Wegen erhaltenen Resultate immerhin eine gute genannt werden. [1]

Ich muss noch bemerken, dass auch untersucht wurde, ob eine Einwirkung der vom Strom durchflossenen Rolle auf die Aufhängevorrichtung allein vorhanden sei. Bei schwächeren Strömen zeigte sich keine bemerkbare Wirkung; erst bei Anwendung eines Stromes von zehn Bunsenelementen, der sämmtliche Lagen der Rolle durchfloss, war eine kleine Bewegung des Balkens zu sehen: sie betrug etwa 0·8 Theilstriche der Scala und zwar wurde der Balken gegen die Spirale hingezogen. Es wären daher die bei grossen Scheidekräften (etwa von $X = 900$ angefangen) gefundenen Ablenkungen A etwas zu klein beobachtet worden; indess ist der Betrag, um den die Ablenkungen zu vergrössern wären, so unbedeutend, dass er weit innerhalb der

[1] Bei diesen Versuchen und jenen mit Wismuth Nr. 3 war ein anderer Neusilberdraht verwendet, als bei Nr. 1 und Nr. 2; rechnet man D für diesen Draht aus K und T, so findet man 19·12 und $19{\cdot}14 \times 10^6$, also wieder sehr gute Übereinstimmung.

Fehlergrenzen der Messungen liegt und daher füglich vernachlässigt werden kann.

Dritte Methode. In der zweiten, bereits oben erwähnten Abhandlung Boltzmann's ist das Drehungsmoment berechnet, welches eine Spirale von grosser Länge auf einen nahe ihrem Ende befindlichen und nahe conaxialen diamagnetischen Cylinder ausübt. Haben ρ, b, λ, N, i und k dieselben Bedeutungen wie früher, und ist h die Entfernung der Wismuthmitte von der Endfläche der Spirale, so findet Boltzmann für das Drehmoment, welches den Winkel α (zwischen der Axe des Cylinders und der Spiralaxe) zu vergrössern sucht, den Ausdruck

$$M = -2\pi^3 k N^2 i^2 \rho^2 b^2 \alpha F(h),$$

worin

$$F(h) = \left[\frac{b^2-2h(h+u)}{b^2\sqrt{w}} - \frac{b^2-h^2}{\sqrt{w^3}} + \frac{2h(h+u)}{b^2\sqrt{w^3}} + \frac{2h}{u} + \right.$$

$$+ \frac{(9h^2-13b^2)(h+u)}{16b^2w} - \frac{5b^2h}{4w^2} - \frac{5(h^2-b^2)(h+u)}{8w^2} +$$

$$\left. + \frac{3(3h^2+b^2)}{16b^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{h+u}{b}\right]_{u=-\frac{\lambda}{2}}^{u=+\frac{\lambda}{2}}$$

$$w = b^2+(h+u)^2 \quad \text{(l. c. S. 587, Formel 28).}$$

Für den Fall, dass die Spirale aus ν Lagen besteht, soll angenommen werden, dass man statt der den verschiedenen Lagen entsprechenden Werthe von b, deren Mittelwerth setzen dürfe. N bedeutet natürlich dann die auf die Längeneinheit entfallende Windungszahl der ganzen Spirale. Es sei der Cylinder in seiner Mitte so aufgehängt, dass er in horizontaler Ebene schwingt und es falle seine Ruhelage mit der Axe der Rolle zusammen, so wird durch die Wirkung der vom Strome durchflossenen Rolle die Schwingungsdauer des Cylinders vergrössert; heisst dieselbe, wenn kein Strom durch die Rolle fliesst, T und ϑ die kleine Änderung der Schwingungsdauer beim Strome i, K das Trägheitsmoment des Cylinders bezogen auf die Aufhängungsaxe, so folgt zur Bestimmung von k die Gleichung

$$k = -\frac{K}{\pi N^2 \rho^2 b^2 F(h)} \cdot \frac{\vartheta}{i^2 T^3}\left(1 - \frac{3\vartheta}{2T}\right). \qquad 3)$$

Ein Wismuthcylinder von der Länge $\lambda = 100{\cdot}9$ und dem Durchmesser $2\rho = 7{\cdot}02$ wurde an Coconfäden bifilar vor dem Ende der bei den vorigen Versuchen (zweite Methode) gebrauchten Rolle aufgehängt, so dass in der Ruhelage seine Axe in die Spiralaxe fiel. Um seine Schwingungsdauer bestimmen zu können, sind an seinen beiden Endflächen kurze, feine Glasfäden mit Schellak angekittet, und ein Fernrohr ist derart eingestellt, dass sich die Bilder der Glasfäden genau decken, wenn der Cylinder sich in der Ruhelage befindet; es werden dann, wenn der Cylinder schwingt, auf elektrischem Wege die Momente registrirt, in denen die Bilder der Glasfäden sich kreuzen. Solche Beobachtungen werden nun abwechselnd bei offenem und geschlossenem Stromkreise ausgeführt, ohne dass dabei das Wismuth von Neuem zum Schwingen angeregt wird; die einzelne Beobachtung einer Schwingungsdauer erforderte eine Zeit von circa 12 Minuten. Indem dann die Differenzen zwischen den bei geschlossener und offener Kette erhaltenen Werthen genommen werden, ergeben sich wegen der Abnahme der Schwingungsweite abwechselnd grössere und kleinere Werthe für ϑ; die Mittel aus je zwei auf einander folgenden Werthen weichen meist nur wenig von einander ab und zeigen die Wirkung der vom Strom durchflossenen Rolle auf das Wismuth an. Um Störungen durch die Erwärmung der Rolle möglichst hintanzuhalten, befindet sich der schwingende Cylinder in einer doppelwandigen Röhre, die beiderseits mit Glasplatten verschlossen ist und oben einen Schlitz hat, um die Aufhängefäden hindurchzulassen; die Röhre ragte bei den ersten Versuchen zum Theil ins Innere der Rolle hinein. Neben das Wismuth war in die Röhre die Kugel eines Thermometers gebracht und dieses zeigte, dass in der Zeit einer Versuchsreihe die Temperatur im Innern allmälig um 3—4 Grade stieg. Über die Rolle und die Aufhängevorrichtung war wieder der grosse Glaskasten gestellt.

Bei verschiedenen Entfernungen (h) der Wismuthmitte von der Endfläche der Rolle wurden Beobachtungen gemacht, desgleichen jedesmal bei verschiedenen Stromstärken (i). Dabei floss der Strom durch die acht äusseren Lagen der Rolle, welche eine Gesammtzahl von 1412 Windungen haben, so dass $N = \frac{1412}{497} = 2{\cdot}841$ zu setzen ist; der mittlere Radius ist $b = 53{\cdot}7$ Mm.

Obwohl nun die bei demselben h erhaltenen Werthe von k verhältnissmässig gut übereinstimmten, ergab sich k aus den bei verschiedenen h gemachten Beobachtungen sehr abweichend. Je kleiner h war, je grösser also der in die Rolle hineinragende Theil des Cylinders war, um so grösser wurde k gefunden. [1]

Da es nicht wahrscheinlich schien, dass die geringe, allmälige Temperaturerhöhung von so bedeutendem Einflusse sei, so konnte die Richtigkeit der bei der Berechnung zu Grunde gelegten Formel in Zweifel gezogen werden. Ich habe desshalb versucht, die Formel für das Drehungsmoment auf einem anderen Wege zu berechnen, der von dem von Boltzmann eingeschlagenen vollkommen verschieden ist. Ich gebrauchte dazu die von Herrn Hofrath Stefan[2] angewandte Methode, indem ich das Potential der vom Strom durchflossenen Spirale auf einen in ihrer Axe befindlichen Punkt in der Form

$$U = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots .$$

darstellte. Der Anfangspunkt der Coordinaten liege in der Wismuthmitte, also in der Axe der Spirale im Abstande h vom Ende derselben und die X-Axe fällt mit der Spiralenaxe zusammen. Es ist dann für eine Spirale von der Länge l

$$U = 2\pi Ni[l - \sqrt{b^2 + (l+h+x)^2} + \sqrt{b^2 + (h+x)^2}].$$

Entwickelt man diesen Ausdruck unter der Voraussetzung, dass l gegen b gross ist, nach Potenzen von x, so ergeben sich für die Coëfficienten die Werthe

$$A_1 = -2\pi Ni\frac{e-h}{e},$$

$$A_2 = 2\pi Ni\frac{b^2}{2e^3}$$

$$A_3 = -2\pi Ni\frac{b^2 h}{2e^5},$$

[1] Für $h = 18$ Mm. folgte k fast doppelt so gross, als für $h = 50$; in letzterem Falle fiel das Ende des Cylinders mit der Endfläche der Rolle zusammen, so dass sich das Wismuth ausserhalb der Rolle befand, die den Cylinder umgebende Röhre war aber dabei in den Innenraum der Spirale eingeschoben.

[2] Sitzungsber. Bd. LXXXIII, S. 45, Jänner 1881.

$$A_4 = 2\pi Ni\frac{b^2(4h^2-b^2)}{8e^7},$$

$$A_5 = -2\pi Ni\frac{b^2h(4h^2-3b^2)}{8e^9}, \text{ etc.,}$$

wo $e^2 = b^2+h^2$.

Für einen ausserhalb der Axe im Abstande a von derselben befindlichen Punkt ist sodann das Potential (l. c. S. 47.)

$$V = A_0+A_1x+A_2(x^2-\frac{a^2}{2})+A_3(x^3-\frac{3}{2}xa^2)+$$

$$+A_4(x^4-3x^2a^2+\frac{3}{8}a^4)+\ldots$$

Um das Drehungsmoment M zu finden, welches auf einen schwingenden diamagnetischen Körper ausgeübt wird, dessen Drehungsaxe in die Z-Axe des Coordinatensystems fällt, hat man zu bilden

$$M = \frac{k}{2}\iiint\left\{y\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{da}\right)^2\right]-x\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{da}\right)^2\right]\right\}dxdydz;$$

die Integrationsgrenzen sind durch die Dimensionen des Körpers bestimmt. Für einen cylindrischen Körper, dessen Radius ρ klein im Vergleich zu seiner Länge λ ist und dessen Axe mit der Axe der Spirale den kleinen Winkel α bildet, so erhält man:

$$M = k\frac{\pi\rho^2\lambda^3}{4}\alpha[3A_1A_3+A_2^2+(9A_3^2+22A_2A_4+25A_1A_5)\frac{\lambda^2}{10}+\ldots];$$

setzt man darin für die Coëfficienten ihre oben angegebenen Werthe, so folgt

$$M = k\frac{\pi^3N^2i^2b^2\rho^2\lambda^3}{4e^5}\cdot\alpha\left[6h+\frac{b^2-6h^2}{e}-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda^2}{20e^2}\left(25h(3b^2-4h^2)+\frac{11b^4-137b^2h^2+100h^4}{e}\right)+\ldots\right]$$

Dieser Ausdruck des Drehmoments, der für den Fall, wo λ gegen e nicht gross ist, verwendet werden kann, ist nun in vollständiger Übereinstimmung mit demjenigen, den man aus

Boltzmann's Formel (S. 64) erhält, wenn man daselbst nach Potenzen von λ entwickelt und bei den Gliedern mit λ^5 stehen bleibt.

Da hienach die Formel bestätigt erscheint, so müssen die Abweichungen in den Werthen von k, welche die Beobachtungen bei verschiedenen h ergeben, dem Einfluss der Temperatur zugeschrieben werden; es bleibt dabei bemerkenswerth, dass die Wirkung verhältnissmässig rasch beim Schliessen des Stromes auftritt und beim Öffnen wieder bald verschwindet. Jedenfalls sind die Abweichungen nicht aus der Veränderung des Trägheitsmoments in Folge der Temperaturerhöhung des Wismuths zu erklären, natürlich auch nicht aus der Änderung der Bifilarkraft, sondern vermuthlich aus der Veränderung der Torsionskraft der Coconfäden.[1]

Der Verlauf der Function $F(h)$ für die oben angegebenen Dimensionen der Spirale und des Wismuthcylinders ist aus folgender Zusammenstellung zu ersehen:

h	$F(h)$
0	—0·00366
9	640
18	869
30	1048
35	1083
40	1072
50	968
88	248

Ich habe auch einige Beobachtungen angestellt, wo sich das Wismuth sammt der Röhre ganz ausserhalb der Spirale befand und überdies noch zwischen der Spirale und dem Schwingungskästchen des Cylinders eine Glasplatte aufgestellt war. h hatte in diesem Falle den Werth 88; hier konnte der Temperatureinfluss jedenfalls nur mehr sehr gering sein, freilich ist aber auch die Veränderung der Schwingungsdauer sehr klein und sind desshalb die erhaltenen Resultate mit verhältnissmässig grossen Beobachtungsfehlern behaftet. Ich beschränke mich daher auf die

[1] Von der Richtigkeit dieser Annahme habe ich mich nachträglich durch besondere Versuche überzeugt.

Mittheilung zweier Versuchsreihen, die bei verschiedenen Schwingungsdauern ausgeführt wurden.

Für die mittlere Schwingungsdauer $T = 37{\cdot}543$ ergab sich bei der Stromstärke $i = 33{\cdot}62$ (sechs Bunsen) als Mittel von vier Werthen $\vartheta = 0{\cdot}061$; bei einer Wiederholung der Beobachtung war $T = 37{\cdot}570$, $i = 34{\cdot}28$, $\vartheta = 0{\cdot}064$; mit den Mittelwerthen von T, i und ϑ ist $\frac{\vartheta}{i^2T^3} = 10{\cdot}2 \times 10^{-10}$.

Bei einer grösseren Schwingungsdauer $T = 49{\cdot}88$ und der Stromstärke $i = 34{\cdot}00$ war im Mittel $\vartheta = 0{\cdot}155$, somit $\frac{\vartheta}{i^2T^3} = 10{\cdot}8 \times 10^{-10}$.

Das Trägheitsmoment des Wismuthcylinders, aus seinen Dimensionen berechnet, ist $K = 32{\cdot}66 \times 10^6$, damit folgt

$$\frac{K}{\pi N^2 \rho^2 b^2 F(h=88)} = -14630$$

und für

$$\frac{\vartheta}{i^2T^3} = 10{\cdot}5 \times 10^{-10}$$

ergibt sich

$$k = 15{\cdot}3 \times 10^{-6}.$$

In Anbetracht der Kleinheit der Wirkung ist die Übereinstimmung des Werthes von k mit den nach den beiden ersten Methoden gefundenen befriedigend. Eine Verstärkung der Wirkung durch Vergrösserung der Stromstärke schien mir ohne erheblichen Vortheil, da die Erwärmung der Rolle ebenfalls (prop. mit i^2) zunimmt; auch für diamagnetische Körper von kleinerer Dichte als Wismuth werden die Verhältnisse kaum erheblich günstiger sein. Es kann daher diese Methode wohl nur unter Anwendung kräftiger Elektromagnete, wie sie bei den Versuchen von Jacques und Schuhmeister benutzt wurden, [1] genaue Resultate ergeben, vorausgesetzt, dass für die Abhaltung der Erwärmung ausreichend Sorge getragen wird.

[1] In der Mitte zwischen den Polen des von Schuhmeister angewendeten Elektromagnets war die magnetisirende Kraft (gegeben durch den Coëfficienten A_1) bei Erregung durch ein Bunsenelement etwa $4\frac{1}{4}$, bei Erregung durch sechs Bunsen aber fast 30mal so gross, als bei den obigen Versuchen für die Stelle der Wismuthmitte.

Vierte Methode. Bei dieser habe ich versucht, durch directe Messung der Fernwirkung des diamagnetisirten Wismuths die Zahl k zu ermitteln. Die Anordnung des Versuchs ist im Wesentlichen dieselbe wie bei W. Weber (Pogg. Ann. Bd. LXXIII, S. 241, 1848) zur Nachweisung der diamagnetischen Polarität. Ein kurzer Wismuthcylinder wird zwischen zwei starke Magnetpole gebracht und die Einwirkung beobachtet, welche dadurch auf eine in der Nähe aufgehängte Magnetometernadel hervorgebracht wird. Die Scheidekraft X zwischen den Magnetpolen wird durch den Inductionsstrom bestimmt, der in einer dem Wismuth an Grösse nahe gleichen Drahtrolle beim Umdrehen derselben im Magnetfeld oder Herausbewegen aus dem Felde entsteht. Das Drehmoment der Magnetpole auf die Nadel ist durch einen von der Seite genäherten Magnetstab compensirt und das zwischen die Pole gebrachte Wismuth befindet sich gegen die Nadel in der ersten Hauptlage. Bezeichnen wir wieder mit λ die Länge, mit 2ρ die Dicke des Wismuthcylinders, sei ferner H' die Grösse der an der Stelle der Magnetometernadel herrschenden magnetischen Richtkraft, δ das Torsionsverhältniss des Aufhängefadens und φ der Ablenkungswinkel der Nadel beim Einbringen des Wismuths zwischen die Pole, endlich r die Entfernung der Wismuthmitte von der Nadel, so ist

$$k = \frac{H'(1+\delta)\cdot\varphi}{X\rho^2\pi\left[\frac{1}{\left(r-\frac{\lambda}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(r+\frac{\lambda}{2}\right)^2}\right]}; \qquad 4)$$

dabei muss die Länge der Magnetometernadel klein sein gegen r.

H' wurde bestimmt entweder durch Vergleichung der Schwingungsdauer der Nadel beim Versuche mit jener, welche unter Einwirkung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus herrscht, oder durch Vergleichung der Ablenkungen, welche ein stets in dieselbe Lage zur Nadel gebrachter Magnetstab in beiden Fällen hervorruft. Die Magnetometernadel, deren Länge 18 Mm. war, befand sich in einem gut verschlossenen Glaskasten und trug einen Spiegel; ihre Schwingungen waren durch eine kleine in Wasser tauchende Fahne gedämpft. Man beobachtete sowohl direct aus Umkehrpunkten die vom Wismuth bewirkten Ablen-

kungen der Magnetnadel, als auch die Schwingungsbogen, welche entstanden, wenn das Wismuth im Rhythmus der Nadelschwingungen zwischen die Magnetpole gebracht und wieder entfernt wurde; aus diesen lässt sich mit dem beobachteten Decrement der Schwingungen die Ablenkung A nach der Formel

$$A = g\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}$$

berechnen, wo g der Multiplicationsgrenzbogen, $\varkappa$ das Dämpfungsverhältniss ist. [1]

Die Magnete, zwei breite, sehr stark magnetisirte Stahllamellen von van Wetteren, waren auf einer Eisenplatte vertical befestigt, so dass sie mit dieser einen Hufeisenmagnet bildeten. Die Verbindungslinie ihrer Pole stand, wie erwähnt, senkrecht zum magnetischen Meridian und traf verlängert die kleine Magnetometernadel. Der Wismuthcylinder war bifilar an der Zimmerdecke aufgehängt und konnte mit Hilfe eines über eine Rolle laufenden Fadens leicht zwischen die Magnetpole gebracht oder entfernt werden.

Versuch 1. Länge des Wismuths $\lambda = 60$, Durchmesser $2\varrho = 14$, Entfernung der Wismuthmitte von der Nadel $r = 170$, Schwingungsdauer t der Nadel unter Einfluss der Horizontalcomponente (H): 3·50, Schwingungsdauer beim Versuch $t' =$ 3·79; daher $H' = H\frac{t^2}{t'^2} = 1{\cdot}81$, da $H = 2{\cdot}13$. δ ist verschwindend. An einer im Abstande $d = 4360$ vom Spiegel aufgestellten Scala gemessen, ergaben sich die Mittelwerthe aus drei Versuchsreihen $A = 0{\cdot}96$, 0·90, 0·94 Sc.; die durch Multiplication erhaltenen Grenzbogen waren bei zwei Versuchen $g = 9{\cdot}29$ und 8·86 Sc., woraus sich mit $\varkappa = 1{\cdot}215$ die Werthe $A = 0{\cdot}90$ und 0·86 ergeben. Die Scheidekraft zwischen den Magnetpolen, deren Distanz etwa 90 Mm. betrug, war $X = 901$; daraus folgt

$$k = 13{\cdot}1 \times 10^{-6}.$$

---

[1] Bei der gewöhnlichen Multiplicationsmethode, wo die Richtung der ablenkenden Kraft im Rythmus der Nadelschwingungen umgekehrt wird, steht der Grenzbogen G mit der Ablenkung A bekanntlich in der Beziehung $A = \frac{G}{2}\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}$.

Versuch 2. Mit einem anderen Wismuthcylinder von demselben Durchmesser, aber nur 23 Mm. Länge wurde in ähnlicher Weise beobachtet; die Magnetlamellen hatten nur etwa 30 Mm. Abstand von einander und das Magnetfeld zwischen den Polen, in dem die Scheidekraft $X = 2102$ herrschte, war bis auf etwa 3 % homogen. Die Grösse der magnetischen Richtkraft H' wurde aus der Ablenkung bestimmt, die ein Magnetstab bewirkte, der in eine bestimmte Entfernung von der Nadel in die zweite Hauptlage gebracht wurde; diese Ablenkung war beim Versuch 26·9 Sc., während dieselbe 70·0 Sc. betrug, wenn die Magnetometernadel durch die horizontale Erdkraft gerichtet wurde; es ist also $H' = 2{\cdot}13 \frac{70{\cdot}0}{26{\cdot}9} = 5{\cdot}54$. Die Ablenkungen durch das Wismuth bei der Entfernung $r = 97$ ergaben sich in vier Versuchsreihen, auf die beiden oben erwähnten Weisen bestimmt, $A =$ 1·43, 1·45, 1·41, 1·48 Sc., wonach der Werth $k = 13{\cdot}6 \times 10^{-6}$ hervorgeht.

Es sind in neuerer Zeit über die Magnetisirungsfähigkeit wässriger Lösungen von Eisenchlorid mehrere Bestimmungen gemacht worden; [1] bei den Untersuchungen, wo schwache Scheidekräfte zur Anwendung kamen, (Silow), zeigte sich, dass diese Lösungen, ebenso wie das Eisen selbst, eine mit der Scheidekraft veränderliche Magnetisirungszahl besitzen. Ich habe nach der oben als „zweite" angeführten Methode auch einige Versuche mit einer Eisenchloridlösung angestellt; dieselbe befand sich in einem cylindrischen Glasröhrchen, welches gerade so, wie die Wismuthcylinder an dem am Ende des Holzbalkens befestigten Glasstäbchen aufgehängt wurde (s. S. 18). Die Dichte der untersuchten Flüssigkeit war 1·48, die Länge des Glasröhrchens $2m = 102{\cdot}4$, sein innerer Durchmesser $2\rho = 7{\cdot}14$. Die erhaltenen Resultate sind

---

[1] Silow, Wiedem. Ann. Bd. I, S. 481, 1877; Bulletin de Moscou LIII. S. 398 (Beibl. III, S. 810); Wiedem. Ann. Bd. XI, S. 324, 1880. Borgmann, Journal d. Petersb. phys. Ges. Bd. X, S. 129 (Beibl. III, S. 812). Schuhmeister l. c.

Anzahl der Elemente	k	X
1	59×10^{-6}	142
2	57	297
4	57	532
6	56	770

Die Magnetisirungszahl k ist bei den angewandten grossen Scheidekräften fast constant; ihr Werth ist etwas grösser als der von Borgmann aus Versuchen mit Flüssigkeitsringen (nach der zuerst von Stoletow [1] angewandten Methode) bei grossen magnetisirenden Kräften erhaltene (49×10^{-6}), während Schuhmeister für seine untersuchte Lösung (Dichte 1·395) aus Schwingungsbeobachtungen zwischen Magnetpolen im Mittel 35×10^{-6} fand.

[1] Pogg. Ann. Bd. CXLVI, S. 439, 1872.

II. SITZUNG VOM 12. JÄNNER 1882.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach in Prag übersendet eine Mittheilung: „Bemerkung über die Grundbegriffe der Elektrostatik".

Das c. M. Herr Director C. Hornstein übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. G. Gruss, Adjuncten der Prager Sternwarte, betitelt: „Bahnbestimmung des Kometen V, 1877."

Der Secretär legt eine Abhandlung des Herrn Prof. C. Pelz an der technischen Hochschule in Graz, betitelt: „Zum Normalenproblem der Kegelschnitte" vor.

Der Secretär überreicht eine von Herrn Dr. J. Haubner, Assistenten am physikalischen Institute der Wiener Universität, verfasste Abhandlung: „Über die stationäre Strömung der Elektricität in flächenförmigen Leitern."

Der Artillerie-Hauptmann Albert v. Obermayer in Wien überreicht eine Abhandlung: „Versuche über Diffusion von Gasen." (I. Abhandlung.)

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 2e série, 45e année. Tome X, Nr. 52. Paris, 1881; 8°.

Accademia, R. delle Scienze di Torino: Atti. Vol. XVI., Disp 7ª. (Guigno 1881) Torino; 8°.

Akademie der Wissenschaften, königl. Preussische zu Berlin. Monatsbericht, November 1881. Berlin, 1881; 8°.

Annales des Ponts et Chaussées. Mémoires et Documents. 1re année, 6e série, 11e cahier. 1881. Novembre. Paris; 8°.

Archiv für Mathematik und Physik. LXVII. Theil, 3. Heft. Leipzig, 1881; 8°.

— for Mathematik og Naturvidenskab; Separataftryk: Lofoten og Vesteraalen af Karl Pettersen. Kristiania, 1881; 8°.

Archivio per le Scienze mediche. Volume V, Fascicolo 3°. Torino e Roma, 1881; 8°.

Central-Station, königliche meteorologische: Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern. Jahrgang III. 1881. Heft 3. München; 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VI. Nr. 1. Cöthen, 1882; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCIII. Nr. 26. Paris, 1881; 4°. — Tables des Comptes rendus. 1er semestre 1881. Tome XCII. 4°.

Gesellschaft, physikalisch-chemische: Journal. Tome XIII. 8°. Lieferung. St. Petersburg, 1881; 8°.

— königl. ungar. naturwissenschaftliche, in Budapest: A Föld; irta Elisée reclus. II Az Óczeán. — A Légkör. — Az Élet; forditották Király Pál és Révész Samu. Budapest, 1880; 8°.

— — Népszerü egészségtan, irta Dr. Erismann Frigyes; forditotta Dr. Imre József. Budapest, 1880; 8°. — Az Anthropologia kézi-könyve; forditották Pethö Gyula és Török Aurél. Budapest, 1881; 8°. — Monographie der Anguilluliden von Dr. Ladislaus Örley. Budapest, 1880; 8°. — Népszerü természettudományi elöadások gyüjteménye III. Band. Budapest, 1880; 8°. — IV. Band. Budapest 1881; 8°. — Magyarország vasércz-fekhelyei. Maderspach Livius. Budapest, 1880; 4°. — Beiträge zur Kenntniss der erdmagnetischen Verhältnisse in den Ländern der ungarischen Krone; verfasst von Dr. Guido Schenzl. Budapest, 1881; 4°. — Ungarns Spinnenfauna, verfasst von Otto Hermann II. Band: Das System. Budapest, 1878; 4°.

Gibson, George A. M. D. D. Sc. Edin., F. R. S. E.: The action of Duboisia on the Circulation. Edinburgh, 1881; 8°.

Institute, the Anthropological of Great Britain and Ireland. The Journal Nr. XI. Nos. 1 u. 2. London, 1881; 8°.

Johns Hopkins University: American Journal of Mathematics. Vol. IV. Number 1. Baltimore, 1881; 4°.

Journal the American of Science. 3d series, Vol. XXII. — (Whole number CXXII) Nr. 132, December, 1881. New-Haven, 1881; 8°.

Local Government Board: Ninth annual report 1879—80. Supplement containing report and papers submitted by the medical officer on the Recent progress of Levantine Plague and on Quarantaine in the Red Sea. London, 1881; 8°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. XXVIe année de publication; 3e série, tome XII, 481e livraison. Janvier 1882. Paris; 8°.

Museum-Verein in Bregenz: XX. Rechenschaftsbericht über den Vereinsjahrgang 1880. Bregenz; 8°.

Nature. Vol. XXV. Nr. 636. London, 1881; 8°.

Nuovo Cimento, il: 3^a serie, Tomo X. Settembre, Ottobre e Novembre 1881. Pisa; 8°.

Observatory, the: A monthly review of Astronomy. No. 57. January, 1882. London; 8°.

Osservatorio centrale del Real Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bollettino mensuale. Ser. II. Vol. I. Num. 8. Torino, 1881; 4°.

— Reale di Brera in Milano: Publicazioni. Nr. XIX. Milano, Napoli, Pisa, 1881; 4°.

Plantamour, E.: Resumé météorologique de l'année 1880 pour Genève et le Grand Saint-Bernard. Genève, 1881; 8°.

Regel, E.: Descriptiones plantarum novarum et minus cognitarum. Fasciculus VIII. Petropoli, 1881; 8°.

Rostock, Universität: Akademische Schriften aus dem Jahre 1880—1881. 26 Stücke; 8°.

Société géologique de Belgique: Annales. Tome VII. 1879—80. Berlin, Liège, Paris, 1879—81; 8°.

Stanley, W.M. Ford: Experimental Researches into the properties and motions of Fluids. London, 1881; 8°.

Tromsø Museums Aarshefter. II. u. III. Tromsø 1879 u. 1880; 8°.

Turner, A.: Die Kraft und Materie im Raume. II. Auflage. Frankfurt a/M., 1882; 8°.

Verein, naturhistorisch-medicinischer zu Heidelberg: Verhandlungen, N. F. III. Band, 1. Heft. Heidelberg, 1881; 8°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. I. Jahrgang 1881. 4. bis 12. Heft. Berlin, 1881; 4°.

Über die stationäre Strömung der Elektricität in flächenförmigen Leitern.

Von **J. Haubner**,
Assistenten am physikalischen Institute.

I.

Die zahlreichen Abhandlungen, welche bisher über stationäre Strömung der Elektricität oder der Wärme in flächenförmigen Leitern erschienen sind, beschränken sich meines Wissens in den speciellen Problemen auf Leiter von überall gleichem Leitungsvermögen.

In der vorliegenden Arbeit werden nun auch einige der einfachsten Aufgaben gelöst über stationäre Strömung in flächenförmigen Leitern, welche aus Stücken von verschiedenem Leitungsvermögen zusammengesetzt sind.

Vor der Besprechung specieller Aufgaben sei es mir gestattet, die hierzu nöthigen, theoretischen Bemerkungen in Kürze zu wiederholen.

Man denke sich der Einfachheit halber, dass die Fläche nur aus zwei Theilen A und A' von gleicher Dicke δ bestehe. Der specifische Leitungswiderstand von A sei k, der von A' sei k'. — Das Potenzial wird in den beiden Theilen der Fläche durch verschiedene Formeln V und V' dargestellt sein, und zu den bekannten Bedingungsgleichungen für das Potenzial

$$(1)\quad \Delta V = 0,\ \Delta V' = 0$$

im Inneren jedes Flächentheils und

$$(2)\quad \frac{dV}{dn} = 0,\ \frac{dV'}{dn} = 0$$

an der isolirenden Begrenzung C des gesammten Leiters, treten dann noch die Bedingungen hinzu, erstens, dass das Potenzial V von A beim Übergang nach A' continuirlich in V' übergehe, dass also an der Grenzcurve G der beiden Medien

$$V = V' \tag{3}$$

zweitens, dass an der Curve G

$$\frac{1}{k}\frac{dV}{d\nu} = \frac{1}{k'}\frac{dV'}{d\nu} \tag{4}$$

ist, unter ν die Normale zu G verstanden.

Es ist klar, dass man auch bei diesen Problemen das Abbildungsverfahren anwenden kann,[1] denn wenn man die Fläche F mit den Coordinaten x, y auf eine andere Fläche F', deren Coordinaten u, v sind, durch die Beziehungen

$$x + yi = f(u + vi) = f_1(u,v) + if_2(u,v)$$

$$\begin{aligned} x &= f_1(u,v) \\ y &= f_2(u,v) \end{aligned} \tag{5}$$

abbildet, so ziehen nicht blos die Gleichungen

$$\Delta V(x,y) = 0,\ \frac{dV}{dn} = 0$$

die Gleichungen

$$\Delta U(u,v) = 0,\ \frac{dU}{dN} = 0$$

nach sich, wobei U den Ausdruck in u, v darstellt, in welchen V durch die Substitution (5) übergeht und N die Normale an die Bildcurve von C bezeichnet, sondern es folgt auch aus

$$\frac{1}{k}\frac{dV}{d\nu} = \frac{1}{k}\frac{dU}{dN}\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2}$$

---

[1] Kirchhoff: Über stationäre elektrische Strömung in gekrümmten Flächen, Monatsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 1875.

$$\frac{1}{k'}\frac{dV}{dv} = \frac{1}{k'}\frac{dU}{dN}\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2}$$

und der Gleichung (4), dass

$$\frac{1}{k}\frac{dU}{dN} = \frac{1}{k'}\frac{dU}{dN},$$

unter N aber nun die Normale zur Bildcurve von G gemeint.

Dieselben Überlegungen gelten natürlich auch dann, wenn die leitende Fläche aus mehr als zwei Stücken besteht.

Hat man also für eine Fläche, die aus mehreren Theilen von verschiedenem Leitungsvermögen besteht, einen Strömungszustand gefunden und ist man im Stande, die Stücke dieser Fläche sammt dem auf ihnen verzeichneten Strömungsnetz in den kleinsten Theilen ähnlich auf eine andere Fläche abzubilden, in der man die Bilder der Stücke mit den homologen Leitungsvermögen belegt, so gibt das Bildnetz abermals ein Netz für eine mögliche Strömung ab.

II.

1. Strömung in einer Ebene, welche aus zwei Halbebenen von verschiedenem Leitungswiderstand zusammengesetzt ist.

Die Berührungslinie der beiden Halbebenen sei die X-Axe, die Halbebene E_1 auf Seiten der positiven Y-Axe habe den specifischen Leitungswiderstand k_1, die zweite Halbebene E_2 den Widerstand k_2, die Dicke der Ebenen sei δ, das Potenzial V_1 respective V_2 und die Lage des Punktes, für den das Potenzial gesucht wird, werde durch die complexe Zahl

$$z = x + yi$$

bezeichnet.

Hat man in einer Ebene vom Leitungswiderstand k eine Elektrode $\alpha = a + bi$, durch welche die Elektricität S einströmt, — eine positive Elektrode, — so ist in der Umgebung des Punktes α das Potenzial durch

$$V = C - \frac{kS}{2\pi\delta}\log \operatorname{mod}(z-a)$$

gegeben, wofür man schreiben kann

$$V = C - \frac{S}{2\pi\delta} \log \text{ mod } (z-\alpha)^k$$

d. h., in einer Ebene vom Leitungswiderstande k ist eine Elektrode equivalent k zusammenfallenden Elektroden in einer Ebene vom Leitungswiderstand $k=1$.

Wenn man die Strömung in der Halbebene untersucht, für welche die X-Axe eine vollkommen isolirende Grenze bildet, erreicht man die Befriedigung der Bedingung

$$\left[\frac{dV}{dy} = 0\right]_{y=0}$$

dadurch, dass man in dem zu α bezüglich der X-Axe conjugirten Punkte $\alpha' = a - bi$, oder im Bildpunkte von α, eine mit α gleichartige Elektrode fingirt. Es wird, so zu sagen, die gesammte Elektricität an der Grenze reflectirt.

Bildet die X-Axe dagegen keine isolirende Begrenzung, dann wird auch nur eine theilweise Reflexion stattfinden, und es fragt sich nun, — wie viel zusammenfallende (μ) Elektroden hat man in α' zu fingiren und andererseits, — einer wie vielfachen (ν) Elektrode ist α equivalent, wenn die Strömung in die zweite Halbebene übertritt, damit die Bedingungen

$$V_1 = V_2$$

$$(1) \qquad \frac{1}{k_1}\frac{dV_1}{dy} = \frac{1}{k_2}\frac{dV_2}{dy}$$

für $y=0$ erfüllt werden, und, — kann man sie überhaupt auf diese Art erfüllen?

Es wäre demnach in reeller Form:

$$V_1 = C - \frac{S}{4\pi\delta} \log [(x-a)^2 + (y-b)^2]^{k_1}$$

$$(2) \qquad - \frac{S}{4\pi\delta} \log [(x-a)^2 + (y+b)^2]^{\mu}$$

$$V_2 = C - \frac{S}{4\pi\delta} \log [(x-a)^2 + (y-b)^2]^{\nu}$$

Die Bedingungen (1) liefern zur Bestimmung von μ und ν die Gleichungen:

$$\nu - \mu = k_1$$

$$\frac{\nu}{k_2} + \frac{\mu}{k_1} = 1,$$

aus welchen folgt:

$$(3) \qquad \mu = k_1 \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}$$

$$\nu = \frac{2k_1 k_2}{k_2 + k_1}$$

Legt man den μ und ν die hier berechneten Werthe bei, so erfüllen die Ausdrücke (2) alle bestehenden Bedingungen, — es lässt sich also auch bei flächenförmigen Leitern, die aus verschieden leitenden Stücken zusammengesetzt sind, die Methode der Spiegelung anwenden, und damit sind, in Verbindung mit der ähnlichen Abbildung, bereits eine Menge von Strömungsaufgaben gelöst.

Nur sind in diesem Fall, wie der Ausdruck für μ lehrt, die Bildelektroden weder von gleicher Stärke, noch immer von gleichem Zeichen mit den Urelektroden. Ist $k_2 > k_1$, besteht also E_2 aus einer schlechter leitenden Substanz als E_1, dann verhält es sich so, als würde im Bildpunkt eines Einströmungspunktes gleichfalls Elektricität einströmen, wenn dagegen $k_2 < k_1$ ist, so, als würde im Bildpunkt des Einströmungspunktes Elektricität ausströmen. Jeder wirkliche Ausströmungspunkt ist hingegen auch für den zweiten Leiter ein solcher, nur von geringerer Stärke.

Für den extremen Fall $k_2 = \infty$ erhält man die Strömung in der Halbebene, wenn dagegen k_1 sehr klein ist gegen k_2, dann entspricht jeder Elektrode eine gleich starke Bildelektrode von entgegengesetztem Zeichen.

Ist in der Halbebene E_1 ausser dem Einströmungspunkt α auch ein Ausströmungspunkt α_1 vorhanden, so sind die Ausdrücke für das Potenzial

$$4, \quad V_1 = C - \frac{k_1 S}{2\pi\delta} \log \operatorname{mod} \frac{z-\alpha}{z-\alpha_1} \left(\frac{z-\alpha'}{z-\alpha_1'} \right)^{\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}}$$

$$V_2 = C - \frac{k_1 S}{2\pi\delta} \log \operatorname{mod} \left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha_1} \right)^{\frac{2k_2}{k_2-k_1}}$$

$$= C - \frac{k_2}{2\pi\delta} \left(\frac{2k_1 S}{k_2+k_1} \right) \log \operatorname{mod} \frac{z-\alpha}{z-\alpha_1}$$

In der Halbebene E_2, welche keine Elektroden enthält, geht die Strömung gerade so vor sich, als wäre E_2 in's Unendliche ausgedehnt, als würde aber in den Elektroden statt S die Elektricitätsmenge

$$(5) \qquad S' = \frac{2k_1}{k_2+k_1} \cdot S$$

ein- und ausströmen. Die Niveaulinien sind eine Kreisschaar um α und α_1, die Strömungslinien ein Kreisbüschel mit den Basispunkten α, α_1 wie bei der Strömung in der unendlichen Ebene, selbstverständlich kommen nur die auf E_2 fallenden Theile dieser Kreise in Betracht.

In der Ebene E_1 hängt jedoch der Charakter der Niveau- und Strömungslinien von dem Verhältnisse

$$\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}$$

ab. Die Curven können rational oder transcendent sein. Die Construction derselben lässt sich auf bekannte Art mit Hülfe von Kreisbüscheln bewerkstelligen.

2. Strömung in der unendlichen Ebene, in welcher sich ein Kreis mit einem anderen Leitungsvermögen befindet.

Durch die Beziehung

$$(6) \quad w = r \frac{z-z_0}{z-z_0'}$$

worin z_0 und z_0' zwei bezüglich der X-Axe conjugirte Punkte

sind, werden bekanntlich die Halbebenen, welche zu beiden Seiten der X-Axe liegen, die eine auf das Innere, die andere auf das Äussere eines Kreises mit dem Radius r um den Nullpunkt in der w-Ebene abgebildet.[1] Conjugirten Punkten der z Ebene, wie es die Elektroden und deren Bilder waren, entsprechen hierbei Punkte, welche in Bezug auf jenen Kreis harmonisch conjugirt sind und auf demselben Radius liegen. Wählt man z_0 mit negativer Ordinate, so bildet sich die Halbebene E_1 auf die Fläche K_a ausserhalb des Kreises ab.

Denkt man sich K_a mit dem Leitungswiderstand k_1 von E_1, den Kreis K_i mit dem Leitungswiderstand k_2 von E_2 belegt, so liefert das Bildnetz in der w-Ebene wieder ein Netz für eine mögliche Strömung. Sind A und A_1 die Abbilder von α und α_1 A' und A'_1 die von α' und α'_1, so gibt die Elimination von z aus (6) und (4) und die Unterdrückung eines constanten Factors für die Potenziale

$$(7)\quad V_a = C - \frac{k_1 S}{2\pi\delta} \log \operatorname{mod} \frac{w-A}{w-A_1} + \frac{k_1 S}{2\pi\delta}\sigma \log \operatorname{mod} \frac{w-A'}{w-A'_1}$$

$$V_i = C - \frac{k_1 S}{2\pi\delta}(1-\sigma) \log \operatorname{mod} \frac{w-A}{w-A_1}$$

wobei der Würze halber

$$(8)\quad \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \sigma.$$

gesetzt wurde, und V_a, V_i sich auf K_a und K_i beziehen. Diese Ausdrücke haben dieselbe Form wie die in der vorigen Nummer behandelten.

Es zeigt sich abermals, dass die Strömung innerhalb des Theiles der Ebene, welcher keine Elektroden enthält, ganz so vor sich geht, wie in der unendlichen Ebene.

Hat man also in einer unbegrenzten Ebene zwei Punktelektroden und setzt dann in dieselbe eine Scheibe von verschie-

[1] Dr. L. Königsberger: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. 7. Vorl. pag. 96.

denem Leitungsvermögen ein, so ändert sich die Form des Strömungsnetzes ausserhalb der Scheibe. Es werden, wie man sich durch die graphische Darstellung überzeugen kann, die Strömungslinien mehr gegen die Scheibe zusammengedrängt, oder sie werden schütterer in ihrer Umgebung, je nachdem die Scheibe besser oder schlechter leitet als die übrige Ebene, während das Umgekehrte mit den Niveaulinien[1] stattfindet. Hingegen behält das Strömungsnetz in der Scheibe dieselbe Form wie früher, nur dass es lockerer oder dichter erscheint.

Was geschieht nun, wenn man das Leitungsvermögen der eingesetzten Scheibe immermehr steigert?

Man könnte vermuthen, — namentlich wenn man sich die Scheibe zwischen die Elektroden gesetzt denkt, dass dann die gesammte Elektricität durch die Scheibe ströme. Dem ist aber nicht so, wie folgende Überlegung zeigt.

Nehmen wir zuerst die Strömung in der unendlichen Ebene vom Leitungswiderstand k_1 —, die aufeinanderfolgenden Strömungslinien sind Kreise, welche sich unter gleichen Winkeln schneiden. Denken wir uns, um gleich auf den allgemeinsten Fall zu kommen, irgendwo in der Ebene einen Kreis, der aber auf keine Elektrode fallen soll, — so wird durch den Kreis nur jene Elektricität fliessen, welche sich zwischen den zwei Strömungslinien bewegt, die den Kreis berühren. Schneiden sich diese zwei Strömungslinien unter dem Winkel γ, dann geht durch den Kreis die Elektricität

$$(9) \qquad i = \frac{\gamma}{2\pi} . S,$$

unter S die gesammte Elektricität verstanden, die in der Zeiteinheit aus der Elektrode austritt.

Setzen wir nun an Stelle dieses Kreises eine Substanz vom Leitungswiderstand k_2, so geht innerhalb des Kreises die Strömung so vor sich, als ob auch der Rest der Ebene den

---

[1] Wie üblich, denke ich die Niveaulinien so verzeichnet, dass von einer bis zur nächsten das Potenzial um gleiche Werthe abfällt, die Strömungslinien derart, dass zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleiche Elektricitätsmengen fliessen.

Leitungswiderstand k_2 besässe, als ob aber in den Elektroden die Elektricität

$$S' = \frac{2k_1}{k_2+k_1} \cdot S$$

einströmen würde (Vergl. (5).) Demnach fliesst jetzt durch den Kreis die Elektricität

$$i' = \frac{\gamma}{2\pi} \cdot S'$$

und es ist

$$\frac{i'}{i} = \frac{2k_1}{k_2 + k_1}.$$

Mit steigendem Leitungsvermögen der Scheibe, d. i. mit abnehmendem k_2, nähert sich dieses Verhältniss dem Werthe 2. Das heisst:

Auch wenn man das Leitungsvermögen der Scheibe ins Unendliche steigert, bringt man durch sie doch nie mehr als das Doppelte von der Elektricität hindurch, welche über denselben Raum in der unendlichen Ebene strömen würde.[1]

Es erübrigt nur noch, γ durch jene Stücke auszudrücken, welche die Lage und Grösse der Scheibe bestimmen. Ich will diese Rechnung nur für einen speciellen Fall durchführen.

Die Scheibe vom Radius r habe ihren Mittelpunkt im Coordinatenursprung, die Elektroden mögen sich in den Entfernungen a und b vom Ursprung auf der X-Axe befinden. Wenn φ und φ' die Winkel bezeichnen, welche die von einem Punkt einer Strömungslinie nach den Elektroden gezogenen Geraden mit der positiven X-Axe bilden, lautet die Gleichung der Strömungslinien

---

[1] Dieser Satz wurde von Herrn Hofrath Stefan im Wintersemester 1881/82 in den Vorlesungen über „Magnetismus und Elektricität" nachgewiesen für den Fall, dass die Elektroden zwei im Unendlichen liegende parallele Geraden sind. Man kann die entsprechenden Formeln auch erhalten, wenn man die Punktelektroden in diametraler Lage gegen die Scheibe, gleichweit entfernt vom Mittelpunkt, annimmt, dann ins Unendliche rücken lässt, den Logarithmus entwickelt und bei den Gliedern erster Ordnung stehen bleibt.

$$\varphi - \varphi' = \text{const} = c$$

oder, da

$$tg\varphi = \frac{y}{x-a},\ tg\varphi' = \frac{y}{x-b}$$

ist,

$$(10)\quad x^2 + y^2 - (a+b)x - \frac{a-b}{tgc}\cdot y + ab = 0.$$

Welchen Werth muss man c beilegen, damit der Kreis (10) den Kreis

$$x^2 + y^2 = r^2$$

berühre? Die Bedingung, dass die Schnittpunkte der beiden Kreise zusammenfallen sollen, liefert

$$tgc = \pm \frac{r(a-b)}{\sqrt{(r^2+ab)^2 - r^2(a+b)^2}},$$

und da c dem Winkel gleich ist, den die Tangente an die Strömungslinie in der Elektrode mit der X-Axe bildet, so gibt die Differenz der beiden für c erhaltenen Werthe den Winkel

$$\gamma = 2\,\text{arc}\,tg\,\frac{r(a-b)}{\sqrt{(r^2+ab)^2 - r^2(a+b)^2}}.$$

der Ausdruck hinter arc tg seinem absoluten Werthe nach genommen.

Für $b=-a$, wenn also die Elektroden auf den entgegengesetzten Enden eines Durchmessers und gleichweit entfernt von der Scheibe liegen, wird

$$(11)\qquad \gamma = 4\,\text{arc}\,tg\,\frac{r}{a}$$

$$i' = \frac{2S}{\pi}(1+\sigma)\,\text{arc}\,tg\,\frac{r}{a}.$$

Das letztere Resultat erhält man noch leichter, wenn man den entsprechenden Ausdruck für V_i auf die reelle Form bringt,

$$V_i = C - \frac{k_2 S}{2\pi\delta}(1+\sigma)\log\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}$$

und das Integral

$$i' = \int_{-r}^{+r}\frac{\delta\, dy}{k_2}\left(\frac{dV_i}{dx}\right)_{x=0}$$

ausrechnet.

Änderung des Widerstands durch Einsetzen einer Scheibe.

Bezeichnet d die Distanz ρ_1 den Radius der Elektroden, so stellt bekanntlich

$$w = \frac{k_1}{\pi\delta}\log\frac{d}{\rho_1}$$

den Widerstand dar, welchen die unendliche Ebene dem Strom entgegensetzt. Fügt man in die Ebene eine Scheibe vom Radius r ein, so ergiebt sich der Widerstand

$$w' = \frac{k_1}{\pi\delta}\log\frac{d}{\rho_1} + \frac{k_1\sigma}{2\pi\delta}\log\frac{(a^2-r^2)(b^2-r^2)}{a^2b^2-2abr^2\cos\psi+r^4},$$

worin a und b die Abstände der Elektroden vom Mittelpunkt der Scheibe und ψ den Winkel bedeutet, unter dem sie vom Mittelpunkt aus gesehen werden.

Wie der Anblick dieser Formel lehrt und wie nach der Gewinnung von w' selbstverständlich ist, hat das Zusatzglied gegen das erste Glied im Allgemeinen einen sehr kleinen Werth. Nur wenn die Elektroden so nahe an die Scheibe gerückt werden, dass ihre Distanz von derselben von der Grössenordnung des Elektrodenradius ist, wird das Zusatzglied mit dem ersten vergleichbar. Im Allgemeinen sind aber die Änderungen des Widerstandes, welche durch Einsetzen einer Scheibe in einer Ebene hervorgebracht werden, nur von der Grössenordnung jener Änderungen des Widerstandes, welche durch eine endliche Vergrösserung oder Verkleinerung des sehr kleinen Elektrodenradius bewirkt werden.[1]

---

[1] Vergleiche Töpler: „Zur Theorie der stationären Strömung der Elektricität. Poggend. Ann. B. 160, 1877.

Vertauscht man in (7) die Ausdrücke für V_i und V_a und lässt A und A_1 Punkte innerhalb K_i, A' und A'_1 die conjugirten Punkte ausserhalb K_i bedeuten, so hat man die Formeln für die Strömung, bei der sich die Elektroden in K_i befinden. Die im Vorstehenden geführte Untersuchung lautet, auf diesen Fall übertragen:

Beschreibt man in der unbegrenzten Ebene einen Kreis, welcher die Elektroden einschliesst und steigert man sodann das Leitungsvermögen des Theiles der Ebene ausserhalb des Kreises in's Unendliche, so geht durch diesen Raum doch nie mehr als doppelt so viel Elektricität wie vorher.

3. Strömung in einer Ebene mit ringförmigem Ausschnitt.

A. Der Ring sei begrenzt von den concentrischen Kreisen 1 und 2 um den Coordinatenursprung mit den Radien R und r; k_1, k_2, k_3 bezeichnen die specifischen Leitungswiderstände für den äusseren Raum, den Ring und den inneren Kreis; V_1, V_2, V_3 die entsprechenden Potenziale; die Elektroden mögen sich im äusseren Raume befinden, ihre Lage werde durch die complexen Grössen

$$A = a(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$B = b(\cos\beta + i\sin\beta)$$

dargestellt, der Punkt, für welchen das Potenzial gesucht wird, durch:

$$z = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Die Bedingungen, welche für die Grenzlinien der drei Medien bestehen, kann man wieder erfüllen durch Zuhilfenahme von fingirten Elektroden in den zu A und B bezüglich 1 und 2 harmonisch conjugirten Punkten, diese sind durch neue Hilfselektroden zu compensiren u. s. f. Dabei muss man sich jedoch vor Augen halten, dass die fingirte Elektrode für das Medium, in welches sie fällt, gar nicht existirt.

Bezeichnet man die Hilfselektroden durch Beifügung der Indices 1 und 2, je nachdem sie in Bezug auf den Kreis 1 oder 2 genommen werden, so ist ihre Lage ausgedrückt durch:

$$A_1 = \frac{R^2}{a^2} \cdot A, \quad A_{21} = \frac{R^2}{r^2} A, \quad A_{2121} = \frac{R^4}{r^4} A, \quad \ldots\ldots$$

$$A_2 = \frac{r^2}{a^2} A, \quad A_{212} = \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{r^2}{a^2} A, \quad A_{2121} = \frac{r^4}{R^2} \frac{r^2}{a^2} A, \ldots\ldots$$

Zur Bildung von V_1 sind $A, A_1, A_2, A_{212}, A_{21212} \ldots\ldots$

„ „ „ V_2 „ $A, A_2, A_{21}, A_{212}, A_{2121}, A_{21212} \ldots\ldots$

„ „ „ V „ $A, A_{21}, A_{2121}, \ldots\ldots$

zu verwenden. Was die Werthigkeit derselben anbelangt, so erhält man, wenn

$$\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \sigma, \quad \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2} = \sigma'$$

gesetzt wird, — da A im ersten Medium eine k_1-fache Elektrode ist, für das

I. Medium.

$A \ldots\ldots$	k_1-fach
$A_1 \ldots\ldots$	$-\sigma k_1$ „
$A_2 \ldots\ldots$	$\sigma'(1-\sigma^2)k_1$ „
$A_{212} \ldots\ldots$	$\sigma'(1-\sigma^2)\sigma\sigma' k_1$ „
$A_{21212} \ldots$	$\sigma'(1-\sigma^2)(\sigma\sigma')^2 k_1$ „

II. Medium.

$A \ldots\ldots$	$(1-\sigma)k_1$-fach
$A_2 \ldots\ldots$	$\sigma'(1-\sigma)k_1$ „
$A_{21} \ldots\ldots$	$(1-\sigma)\sigma\sigma' k_1$ „
$A_{212} \ldots\ldots$	$\sigma'(1-\sigma)\sigma\sigma' k_1$ „
$A_{2121} \ldots$	$(1-\sigma)(\sigma\sigma')^2 k_1$ „
$A_{21212} \ldots$	$\sigma'(1-\sigma)(\sigma\sigma')^2 k_1$-fach

III. Medium.

$A \ldots\ldots$	$(1+\sigma')(1-\sigma)k_1$-fach
$A_{21} \ldots$	$(1+\sigma')(1-\sigma)(\sigma\sigma')k_1$ „
A_{2121}	$(1+\sigma')(1-\sigma)(\sigma')^2 k_1$ „

Die Ausdrücke für die Potenziale lauten demnach:

$$V_1 = C_1 - \frac{k_1 S}{2\pi\delta}\log \operatorname{mod}\frac{z-A}{z-B} + \frac{k_1 S\sigma}{2\pi\delta}\log \operatorname{mod}\frac{z-\frac{R^2}{a^2}A}{z-\frac{R^2}{b^2}B}$$

$$-\frac{k_1 S}{2\pi\delta}\cdot\sigma'(1-\sigma^2)\log \operatorname{mod}\prod_0^{\infty}{}_n\left(\frac{z-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{r^2}{a^2}A}{z-\left[\frac{r}{R}\right]^{2n}\frac{r^2}{b^2}B}\right)^{(\sigma\sigma')^n}$$

$$V_2 = C_2 - \frac{k_1 S}{2\pi\delta}(1-\sigma)\log \operatorname{mod}\prod_0^{\infty}{}_n\left(\frac{z-\left(\frac{R}{r}\right)^{2n}A}{z-\left(\frac{R}{r}\right)^{2n}\cdot B}\right)^{(\sigma\sigma')^n}$$

$$-\frac{k_1 S}{2\pi\delta}\sigma'(1-\sigma)\log \operatorname{mod}\prod_0^{\infty}{}_n\left(\frac{z-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\cdot\frac{r^2}{a^2}A}{z-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\cdot\frac{r^2}{b^2}\cdot B}\right)^{(\sigma\sigma')^n}$$

$$V_3 = C_3 - \frac{k_1 S}{2\pi\delta}(1+\sigma')(1-\sigma)\log \operatorname{mod}\prod_0^{\infty}{}_n\left(\frac{z-\left(\frac{R}{r}\right)^{2n}A}{z-\left(\frac{R}{r}\right)^{2n}B}\right)^{(\sigma\sigma')^n}$$

oder in reeller und zur Entwicklung in convergente Reihen geeigneter Form:

$$V_1 = C - \frac{k_1 S}{4\pi\delta}\log\frac{1-2\frac{\rho}{a}\cos(\varphi-\alpha)+\frac{\rho^2}{a^2}}{1-2\frac{\rho}{b}\cos(\varphi-\beta)+\frac{\rho^2}{b^2}}$$

$$+\frac{k_1 S}{4\pi\delta}\sigma\log\frac{1-2\frac{R^2}{a^2}\cdot\frac{a}{\rho}\cos(\varphi-\alpha)+\frac{R^4}{a^4}\cdot\frac{a^2}{\rho^2}}{1-2\frac{R^2}{b^2}\cdot\frac{b}{\rho}\cos(\varphi-\beta)+\frac{R^4}{b^4}\cdot\frac{b^2}{\rho^2}}$$

$$-\frac{k_1 S}{4\pi\delta}\sigma'(1-\sigma^2)\sum_{n=0}^{n=\infty}(\sigma\sigma')^n\log\frac{1-2\frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{a}{\rho}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\cos(\varphi-\alpha)+\frac{r^4}{a^4}\cdot\frac{a^2}{\rho^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{4n}}{1-2\frac{r^2}{b^2}\cdot\frac{b}{\rho}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\cos(\varphi-\beta)+\frac{r^4}{b^4}\cdot\frac{b^2}{\rho^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{4n}}$$

$$(12)\quad V_2 = C - \frac{k_1 S}{4\pi\delta}(1-\sigma)\sum_{n=0}^{n=\infty}(\sigma\sigma')^n \log \frac{1-2\frac{\rho}{a}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\cos(\varphi-\alpha)+\frac{\rho^2}{a^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{4n}}{1-2\frac{\rho}{b}\left(\frac{r}{R}\right)\cos(\varphi-\beta)+\frac{\rho^2}{b^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{4n}}$$

$$-\frac{k_1 S}{4\pi\delta}(1-\sigma)\sigma'\sum_{n=0}^{n=\infty}(\sigma\sigma')^n \log \frac{1-2\frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{a}{\rho}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\cos(\varphi-\alpha)+\frac{r^4}{a^4}\cdot\frac{a^2}{\rho^2}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{4n}}{1-2\frac{r^2}{b^2}\cdot\frac{b}{\rho}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\cos(\varphi-\beta)+\frac{r^4}{b^4}\cdot\frac{b^2}{\rho^2}\left(\frac{r}{R}\right)}$$

$$V_3 = C - \frac{k_1 S}{4\pi\delta}(1-\sigma)(1+\sigma')\sum_{n=0}^{n=\infty}(\sigma\sigma')^n \log \frac{1-2\frac{\rho}{a}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\cos(\varphi-\alpha)+\frac{\rho^2}{a^2}\left(\frac{R}{r}\right)^{4n}}{1-2\frac{\rho}{b}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\cos(\varphi-\beta)+\frac{\rho^2}{b^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{4n}}$$

Diese Ausdrücke genügen, wie man sich noch nachträglich leicht überzeugen kann, allen gestellten Bedingungen.

Um eine bessere Vorstellung zu gewinnen von dem Einfluss, welchen das Einsetzen eines Ringes in eine Ebene auf die Elektricitätsmenge hat, die durch den innerhalb des Ringes befindlichen Kreis strömt, wollen wir die Lage der Elektroden specialisiren und

$$\alpha = 0,\ b = a,\ \beta = 180°$$

setzen. Die gesuchte Elektricitätsmenge i' ist dann gegeben durch

$$i' = 2\int_0^r \frac{\delta}{k_3}\left(\frac{dV_3}{dx}\right)_{x=o} dy = \frac{2S}{\pi}(1+\sigma)(1-\sigma')\sum_{n=0}^{n=\infty}(\sigma\sigma')^n \operatorname{arctg}\frac{r}{a}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}$$

Ist überdies die Entfernung a der Elektroden vom Anfangspunkt der Coordinaten sehr gross gegen den Radius r des Kreises 2, so kann man den Bogen mit der Tangente vertauschen und findet

$$i' = \frac{2S}{\pi}(1+\sigma)(1-\sigma')\frac{r}{a}\cdot\frac{1}{1-\sigma\sigma'\left(\frac{r}{R}\right)^2},$$

während unter gleichen Umständen in der unendlichen Ebene durch diesen Kreis die Elektricität (9, 11)

$$i = \frac{2S}{\pi}\cdot\frac{r}{a}$$

strömt. Hat der innere Kreis dasselbe Leitungsvermögen wie der äussere Raum, ist also $k_3 = k_1$, $\sigma' = \sigma$, so wird das Verhältniss dieser beiden Elektricitätsmengen

$$\frac{i'}{i} = (1-\sigma^2)\frac{R^2}{R^2-\sigma^2 r^2}.$$

Der Grenzwert dieses Verhältnisses ist $=0$, sowohl für $\sigma=+1$ als für $\sigma=-1$, d. h.

Ob man in eine Ebene einen Ring von sehr gutem oder sehr schlechtem Leitungsvermögen einsetzt, — der Effect bezüglich der Elektricitätsmenge, welche durch den vom Ring umschlossenen Raum geht, ist derselbe, — der Raum wird gegen die Strömung isolirt.

Wenn man beachtet, dass das Nullwerden dieses Verhältnisses blos durch den Factor

$$(1+\sigma)(1-\sigma'),$$

welcher vor dem Summenzeichen steht, herbeigeführt wurde, so sieht man sofort ein, dass der vorhergehende Satz ganz allgemeine Giltigkeit hat, welches auch die Lage der Elektroden sein mag.

Insolange aber σ und σ' von -1, respective $+1$ verschieden sind, ist natürlich der Betrag von $\frac{i'}{i}$ eine Function von r, R, a, α, b und β.

Die Elektricität, welche bei dieser speciellen Lage der Elektroden durch den Ring strömt, ist

$$i' = \frac{2S}{\pi}(1+\sigma)\sum_{0}^{\infty}(\sigma\sigma')^n\left[\operatorname{arctg}\frac{R}{a}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n} - \sigma' \operatorname{arctg}\frac{r^2}{aR}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\right]$$

und wenn a gegen r und R sehr gross ist

$$i' = \frac{2S}{\pi}(1+\sigma)\frac{R}{a}\cdot\frac{R^2-\sigma' r^2}{R^2-r^2\sigma\sigma'}$$

während der analoge Ausdruck für die unendliche Ebene

$$i = \frac{2S}{\pi}\cdot\frac{R}{a}$$

ist. Für σ nahe $=1$, also für einen Ring aus sehr gut leitender Substanz ist

$$\frac{i'}{i} = (1+\sigma) = 2,$$

es macht also wenig Unterschied, ob man in eine Ebene einen vollen Kreis oder einen Ring von grossem Leitungsvermögen einsetzt, durch den so von der Ebene abgetrennten Raum gehen in beiden Fällen nahezu doppelt so viel Strömungslinien wie vorher, nur dass sie in letzterem Falle fast alle den Weg durch den Ring nehmen, da, wie wir gesehen haben, durch den inneren Kreis fast gar keine Strömungslinien gehen.

B. Der Fall, in welchem sich die Elektroden A und B innerhalb des Kreises 2 befinden, ergibt sich aus dem Vorigen durch Abbildung mittelst reciproker radii vectores $\left(z=\frac{1}{Z}\right)$. Die Formeln für die Potenziale erhält man, wenn man in (12)

$$\frac{r}{a}, \frac{R}{a}, \frac{\rho}{a} \text{ einfach durch } \frac{a}{R}, \frac{a}{r}, \frac{a}{\rho} \text{ etc.}$$

ersetzt und das übrige an seinem Platze lässt. V_1, V_2, V_3 gehen dann über in die Potenziale für den inneren Kreis, den Ring und den äusseren Raum; k_1, k_2, k_3 sind die entsprechenden Leitungs-

widerstände. Was früher für den inneren Kreis galt, gilt in Folge der ähnlichen Abbildung nun für den äusseren Raum:

Umschliesst man in einer unendlichen Ebene beide Elektroden mit einem Ring von sehr grossem oder sehr geringem Leitungsvermögen, so wird dadurch der äussere Raum gegen die Strömung isolirt.

C. Der Fall, dass die Elektroden im Ringe liegen, lässt sich aus den bisher behandelten Aufgaben durch ähnliche Abbildung nicht herleiten, da man eine zweifach zusammenhängende Fläche auf eine einfach zusammenhängende nicht so abbilden kann, wie es das Strömungsproblem fordern würde. Demnach muss dieser Fall eigens behandelt werden.

Bezeichne nun 1 den inneren, 2 den äusseren Kreis, k_2, k_1, k_3 die specifischen Leitungswiderstände von Innen nach Aussen (II., I., III. Medium), V_2, V_1, V_3 die respectiven Potenziale. Die Hilfselektroden sind:

$$A_1 = \frac{r^2}{a^2} A,\ A_{121} = \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{r^2}{a^2} A, \ldots\ldots$$

$$A_2 = \frac{R^2}{a^2} A,\ A_{212} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{R^2}{a^2} \cdot A, \ldots\ldots$$

$$A_{12} = \frac{R^2}{r^2} A,\ A_{1212} = \frac{R^4}{r^4} A, \quad \ldots\ldots$$

$$A_{21} = \frac{r^2}{R^2} A,\ A_{2121} = \frac{r^4}{R^4} A, \quad \ldots\ldots$$

und wenn

$$\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} = \sigma,\quad \frac{k_3 - k_1}{k_3 + k_1} = \sigma',$$

gesetzt wird, ist für das

	I. Med.	II. Med.
A	k_1-fach	$(1+\sigma)k_1$-fach
A_1	σk_1 "	——— "
A_2	$\sigma' k_1$ "	$\sigma'(1+\sigma)k_1$ "
A_{12}	$\sigma\sigma' k_1$ "	$(1+\sigma)(\sigma\sigma')k_1$ "
A_{21}	$\sigma\sigma' k_1$ "	——— "
A_{121}	$\sigma(\sigma\sigma')k_1$ "	——— "
A_{212}	$\sigma'(\sigma\sigma')k_1$ "	$\sigma'(1+\sigma)(\sigma\sigma')k_1$ "
⋮	⋮	⋮

	III. Med.
A	$(1+\sigma')k_1$-fach
A_1	$\sigma(1+\sigma')k_1$ "
A_2	——— "
A_{12}	——— "
A_{21}	$(1+\sigma')\sigma\sigma' k_1$ "
A_{121}	$\sigma(1+\sigma')(\sigma\sigma')k^1$ "
A_{212}	——— "
.	.
.	.
.	.

mithin

$$V_1 = C - \frac{k_1 S}{2\pi\delta}\log\mathrm{mod}\frac{z-A}{z-B} - \frac{k_1 S}{2\pi\delta}\sigma\sum_0^\infty(\sigma\sigma')^n\log\mathrm{mod}\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{r^2}{a^2}\frac{A}{z}}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{r^2}{b^2}\frac{B}{z}}$$

$$-\frac{k_1 S}{2\pi\delta}\sigma'\sum_0^\infty(\sigma\sigma')^n\log\mathrm{mod}\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{a^2}{R^2}\frac{z}{A}}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{b^2}{R^2}\frac{z}{B}}$$

$$-\frac{k_1 S}{2\pi\delta}\sum_1^\infty(\sigma\sigma')^n\log\mathrm{mod}\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{z}{A}}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{z}{B}}\cdot\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{A}{z}}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{B}{z}}$$

(13)... $$V_2 = C - \frac{k_1 S}{2\pi\delta}(1+\sigma)\sum_0^\infty(\sigma\sigma')^n\log\mathrm{mod}\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{a^2}{R^2}\frac{z}{A}}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{b^2}{R^2}\frac{z}{B}}$$

$$-\frac{k_1 S}{2\pi\delta}(1+\sigma)\sigma'\sum_0^\infty(\sigma\sigma')^n\log\mathrm{mod}\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{z}{A}}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{z}{B}}$$

$$V_3 = C - \frac{k_1 S}{2\pi\delta}(1+\sigma')\sigma\sum_0^\infty(\sigma\sigma')^n\log\mathrm{mod}\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{A}{z}}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{B}{z}}$$

$$-\frac{k_1 S}{2\pi\delta}(1+\sigma')\sigma\sum_0^\infty(\sigma\sigma')^n\log\mathrm{mod}\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{r^2}{a^2}\frac{A}{z}}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{r^2}{b^2}\cdot\frac{B}{z}}$$

Anhang.

Die eben behandelten Aufgaben enthalten viele bereits bekannte Strömungsprobleme als specielle Fälle in sich, so geben z. B. die Formeln (7) für $\sigma = -1$ die Strömung in der unendlichen Ebene, aus der ein kreisförmiges Loch ausgeschnitten ist und wenn V_a und V_i vertauscht werden und die Elektroden in K_i liegen, die von Kirchhoff[1] behandelte Strömung in einem isolirten Kreise, die Formeln (13) liefern die Strömung in einem Ring, der von concentrischen Kreisen begrenzt ist.[2] Da ferner durch die Beziehung

$$(14) \qquad z = \frac{w - e}{w + e}$$

worin e eine positive Grösse bedeuten mag, die concentrischen Kreise um den Nullpunkt der z-Ebene als excentrische Kreise in der w-Ebene abgebildet werden, so kann man durch Substitution dieses Ausdrucks in die Formeln der vorhergehenden Nummer und durch Specialisirung der k noch folgende Fälle erledigen:

1. In der unendlichen Ebene befindet sich ein von excentrischen Kreisen begrenzter Ring, die Elektroden liegen im äusseren, im inneren Raum, oder im Ring.
2. Aus einer Ebene ist ein kreisförmiges Loch ausgeschnitten, anderswo eine Scheibe in sie eingefügt, Elektroden in der Scheibe, oder in der zweifach zusammenhängenden Fläche.
3. In einer Ebene befinden sich zwei kreisförmige Öffnungen.
4. In einen isolirten Kreis ist eine Scheibe eingesetzt, Elektroden in der Scheibe oder im Ringraum, u. s. w.

Durch die stereographische Projection kann man die gefundenen Resultate auf die Kugelfläche übertragen und ist die Discussion des Falles, wo die Kugelfläche aus zwei Calotten von verschiedenem Leitungsvermögen besteht und die Elektroden auf

---

[1] Kirchhoff: Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige. Poggend. Annal. Bd. 64.

[2] Ditscheiner: Über den galvanischen Widerstand eines ebenen Ringes. Wiedemann's Annalen. Bd. 5.

derselben Calotte liegen, ebenso einfach, wie die des entsprechenden Falls in der Ebene. Die Theile der Strömungslinien auf der elektrodenfreien Calotte gehören Kreisen an, deren Ebenen sich in der Verbindungslinie G der Elektroden schneiden; die Niveaulinien Kreisen, deren Ebenen sich in einer Geraden G' schneiden, welche reciproke Polare zu G in Bezug auf die Kugelfläche ist etc. — Wie die Aufgaben zu lösen sind, wenn sich die Elektroden in verschiedenen Medien befinden, ergibt sich für die behandelte Zusammensetzung der Ebene von selbst. Dieser Fall wurde aber von der Betrachtung ausgeschlossen, da er von geringerem Interesse ist, als die Stromverzweigung, welche stattfindet, wenn die Elektroden in demselben Medium liegen.

Bahnbestimmung des Kometen V, 1877.

Von Dr. **Gustav Gruss,**
Adjunct der k. k. Sternwarte in Prag.

Der Komet wurde am 2. October 1877 von Tempel in Arcetri entdeckt; zur Zeit der Entdeckung erschien er als ein runder Nebelkopf von 2′ Durchmesser mit starker, heller Verdichtung in der Mitte und mit einem Schweife von wenigstens 5′ Länge, der an den Seiten sich verwaschen verbreitete; dasselbe Aussehen hatte der Komet noch am 14. October, nach dem Mondscheine am 26. October war der Komet nur noch eine verwaschene runde Nebelmasse ohne Schweif und ohne besondere helle Mitte. Die Dauer der eigentlichen Beobachtungen umfasst bloss 12 Tage (Oct. 2—14); merkwürdig ist dieser Komet dadurch, dass er bei sehr günstiger Stellung am Himmel von Niemandem vor dem 2. October aufgefunden wurde.[1] Der Komet erhielt die Bezeichnung *f* 1877, seiner Perihelzeit nach ist derselbe der V. dieses Jahres. Das gesammelte Beobachtungsmaterial wurde zur genauen Bahnbestimmung zu Grunde gelegt, hiezu dienten mir als Ausgangspunkt die von Herrn K. Ginzel in den astronomischen Nachrichten Nr. 2169 angegebenen Elemente:

$$\begin{aligned} T &= 1877 \text{ Juni } 27{\cdot}093000 \text{ m. Berl. Zt.} \\ i &= 115°40'58''{\cdot}26 \\ \Omega &= 184\ \ 16\ 24{\cdot}96 \quad \text{Ecl. } 1877{\cdot}0 \\ \pi &= 287\ \ 35\ 19{\cdot}52 \\ lgq &= 0{\cdot}0301116. \end{aligned}$$

---

[1] Über die späte Auffindung schreibt Prof. Schiaparelli (Astr. Nachr., Bd. 91): „Cette comète a du être visible depuis le commencement de l'année! Car elle se trouvait du côté opposé par rapport au soleil justement il y a six mois, et il est probable, qu'elle ait poussée après le passage au périhelie".

Nach diesen Elementen wurde die folgende Ephemeride berechnet, mit welcher die sämmtlichen Beobachtungen verglichen wurden.

1877 Mittl. Berl. Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entf. von der Erde
October 1·5	23ʰ54ᵐ39ˢ51	— 9°15′28″0	9·93747
2·5	23 50 41 76	—10 26 20·1	9·94635
3·5	23 46 52 87	—11 33 55·3	9·95544
4·5	23 43 12 71	—12 38 17·5	9·96470
5·5	23 39 40 98	—13 39 30·2	9·97410
6·5	23 36 17 59	—14 37 39·2	9·98360
7·5	23 33 2 44	—15 32 50·1	9·99318
8·5	23 29 55 39	—16 25 9·1	0·00281
9·5	23 26 56 25	—17 14 43·2	0·01248
10·5	23 24 4 84	—18 1 39·4	0·02215
11·5	23 21 20 96	—18 46 4·6	0·03181
12·5	23 18 44 42	—19 28 6·0	0·04144
13·5	23 16 15 05	—20 7 49·7	0·05104
14·5	23 13 52 53	—20 45 23 0	0·06057

Die folgende Übersicht enthält nun die Vergleichung der Ephemeride mit den Beobachtungen mit Ausnahme der Beobachtungen in Göttingen, weil die Position der Vergleichsterne theilweise gar nicht, theilweise sehr ungenau bekannt ist.

Nr.	1877	Beobachtungsort	Beob.—Rechnung $d\alpha$ (Rectasc.)	Beob.—Rechnung $d\delta$ (Declin.)
I. 1	October 2·63	Mailand	+ 4ˢ4	+ 1″9
2	3·43	Pola	+10·9	— 5·8
3	3·45	Pola	+ 3 4	— 2·9
4	3·44	Berlin	+ 2.2	— 7·2
5	4·36	Wien	+22 8	+ 2·7
6	4·37	Pola	+24·3	(+22·0)
7	4·40	Kiel	+16·8	— 1·0
8	4·44	Mailand	+13·4	+ 8·1
9	4·53	Greenwich	+ 7·5	— 0·8
10	4·54	Leipzig	— 1·3	+ 1·0
II. 11	5·35	Leipzig	+ 1·9	— 7·9
12	5·40	Lund	—11·6	+ 4·2
13	5·40	Bonn	+16·5	— 7·1
14	5·41	Hamburg	(+40·0	(+28·9)
15	5·42	Berlin	+ 1·8	— 0·6
16	5·44	Leipzig	— 6·1	+ 5·0

Nr.	1877	Beobachtungsort	Beob.—Rechnung	
			da (Rectasc.)	$d\delta$ (Declin.)
II. 17	October 6·40	Berlin	0ˢ0	+ 0ˢ5
18	6·41	Leipzig	+ 5·1	— 6·2
19	6·46	Hamburg	(—38·2)	+ 2·0
20	6·56	Greenwich	+ 3·1	+ 2·9
21	6·56	Pola	+10·2	+ 2·9
22	6·48	Strassburg	— 2·0	+ 2·6
23	7·50	Mailand	+ 1·5	+ 9·9
24	8.40	„	— 4·0	+ 9·8
25	8·41	Berlin	— 1·0	+ 6·9
26	8·53	Greenwich	—10·8	+14·4
III. 27	October 9·42	Mailand	— 1·5	+10·4
28	9·43	Berlin	— 7·3	+ 2·9
29	9·49	Hamburg	(+21·3)	— 5·5
30	9·43	Leipzig	+ 7·9	— 5·0
31	10·36	Mailand	— 4·9	+11·1
32	10·35	Pola	— 3·4	— 0·8
33	10·41	Leipzig	—14·2	— 1·2
34	10·44	Berlin	—14·3	— 5·7
35	11·37	Mailand	— 9·9	+ 2·9
36	11·43	Leipzig	—20·5	— 1·2
37	11·50	Hamburg	(+40·7)	(+104·9)
38	11·54	Greenwich	— 9·7	+ 3·6
IV. 39	October 12·42	Leipzig	—32·6	— 9·7
40	12·43	Mailand	— 6·5	+ 3·5
41	12·44	Berlin	—20·8	(+150·5)
42	13·40	Athen	—14·7	+ 0·5
43	13·48	Mailand	+ 8·4	+29·5
44	14·44	Leipzig	—12·4	+46·3
45	14·49	Mailand	—18·3	+ 7·7
46	14·51	Greenwich	—16·8	— 8·8

Bemerkungen.

Nr. 5 Wien. Die Beobachtung ist in Rectascension um 10^s verbessert worden.

Nr. 6 Pola. In Declination ausgeschlossen.

Nr. 14 und 37 Hamburg ganz ausgeschlossen.

Nr. 18 und 29 Hamburg in Rectascension weggelassen.

Nr. 41. Die Beobachtung wurde nur in Rectascension benützt.

Die angeführten Abweichungen wurden in IV Gruppen vereinigt und aus ihnen und den zugehörigen Zeiten nachstehende Mittel abgeleitet.

	Beobacht.—Rechnung	
	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
I. Oct. 4·0	+10'20	—0'44
II. Oct. 6·5	+ 0·32	+2·62
III. Oct. 10·5	— 7·40	+1·05
IV. Oct. 13·5	—13·34	+9·86.

Um die Fehler möglichst wegzuschaffen, wurde die Methode der Differentialformalen zu Hilfe genommen, und es ergaben sich folgende Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
&\bar{,}9\cdot29401\,dT + 9\cdot77463\,dlgq + \bar{,}8\cdot98959\,dw' + 0\cdot30904\,d\Omega' \\
&\quad + \bar{,}9\cdot09062\;\; di' + 9\cdot29835\;\; de' + \bar{,}1\cdot00849 \qquad = 0 \\
&0\cdot41537\,dT + 1\cdot01561\,dlgq + \bar{,}0\cdot30768\,dw' + \bar{,}8\cdot74761\,d\Omega' \\
&\quad + 7\cdot91877\;\; di' + 9\cdot53388\;\; de' + 9\cdot64345 \qquad = 0 \\
&\bar{,}9\cdot42723\,dT + 9\cdot79868\,dlgq + \bar{,}9\cdot01622\,dw' + 0\cdot28918\,d\Omega' \\
&\quad + \bar{,}9\cdot18191\;\; di' + 9\cdot39895\;\; de' + \bar{,}9\cdot50420 \qquad = 0 \\
&0\cdot37026\,dT + 0\cdot99306\,dlgq + \bar{,}0\cdot28856\,dw' + \bar{,}8\cdot92052\,d\Omega' \\
&\quad + 8\cdot09982\;\; di' + 9\cdot60171\;\; de' + \bar{,}0\cdot41830 \qquad = 0 \\
&\bar{,}9\cdot53249\,dT + 9\cdot82776\,dlgq + \bar{,}9\cdot06089\,dw' + 0\cdot25561\,d\Omega' \\
&\quad + \bar{,}9\cdot27810\;\; di' + 9\cdot49976\;\; de' + 0\cdot86912 \qquad = 0 \\
&0\cdot30127\,dT + 0\cdot95689\,dlgq + \bar{,}0\cdot25708\,dw' + \bar{,}9\cdot09587\,d\Omega' \\
&\quad + 8\cdot31754\;\; di' + 9\cdot66879\;\; de' + \bar{,}0\cdot02119 \qquad = 0 \\
&\bar{,}9\cdot56994\,dT + 9\cdot86547\,dlgq + \bar{,}9\cdot11845\,dw' + 0\cdot23000\,d\Omega' \\
&\quad + \bar{,}9\cdot32675\;\; di' + 9\cdot54698\;\; de' + 1\cdot12521 \qquad = 0 \\
&0\cdot25303\,dT + 0\cdot92951\,dlgq + \bar{,}0\cdot23368\,dw' + \bar{,}9\cdot17745\,d\Omega' \\
&\quad + 8\cdot43948\;\; di' + 9\cdot69394\;\; de' + \bar{,}0\cdot99388 \qquad = 0.
\end{aligned}$$

$d\Omega'$, dw', di' sind Correctionen der Äquatorelemente, dT ist in Einheiten der dritten Decimale des mittleren Tages, $dlgq$ in Einheiten der fünften und de' gleichfalls in Einheiten der fünften Decimale zu nehmen; überall sind statt der Zahlenangaben ihre Logarithmen gesetzt. Die Richtigkeit der Gleichungen wurde geprüft.

Diese Bedingungsgleichungen führen, nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, zu folgenden sechs Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
19{\cdot}8499\,dT - 16{\cdot}3925\,dw' - 3{\cdot}0259\,d\Omega' + 0{\cdot}3503\,di' \\
+ 3{\cdot}3112\,de' + 82{\cdot}6170\,dlgq - 30{\cdot}1438 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-16{\cdot}3925\,dT - 14{\cdot}1524\,dw' - 0{\cdot}0728\,d\Omega' - 0{\cdot}0485\,di' \\
- 3{\cdot}2985\,de' - 71{\cdot}4030\,dlgq + 21{\cdot}4080 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
- 3{\cdot}0259\,dT - 0{\cdot}0728\,dw' + 14{\cdot}1190\,d\Omega' - 1{\cdot}2572\,di' \\
+ 1{\cdot}8745\,de' + 1{\cdot}0864\,dlgq + 16{\cdot}3970 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ 0{\cdot}3503\,dT - 0{\cdot}0485\,dw' - 1{\cdot}2572\,d\Omega' + 0{\cdot}1207\,di' \\
- 0{\cdot}1660\,de' + 0{\cdot}1796\,dlgq - 3{\cdot}2520 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ 3{\cdot}3112\,dT - 3{\cdot}2985\,dw' - 1{\cdot}8745\,d\Omega' - 0{\cdot}1660\,di' \\
+ 1{\cdot}0705\,de' + 16{\cdot}6986\,dlgq - 1{\cdot}3840 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+82{\cdot}6170\,dT - 71{\cdot}4030\,dw' + 1{\cdot}0864\,d\Omega' + 0{\cdot}1796\,di' \\
+16{\cdot}6986\,de' + 360{\cdot}3195\,dlgq - 106{\cdot}0650 = 0.
\end{aligned}
$$

Lässt man bei Auflösung dieser Gleichungen die von de' abhängigen Glieder unberücksichtigt, so ergeben sich folgende Correctionen der Elemente:

$$
\begin{aligned}
dlgq &= - 54{\cdot}50 \\
di' &= +175'05 \\
d\Omega' &= + 20'39 \\
dw' &= -259'01 \\
dT &= + 14{\cdot}475.
\end{aligned}
$$

Führt man diese Correctionen der Elemente in die Bedingungsgleichungen ein, so erhält man folgende Fehler, die in den Normalorten übrig bleiben:

		$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
I.	Oct. 4·0	+0'23	+0'51
II.	Oct. 6·5	−1·48	+1·17
III.	Oct. 10·5	+0·87	−3·67
IV.	Oct. 13·5	+0·52	+1·93,

Bringt man die oben gefundenen Correctionen an die Elemente an, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
T &= 1877 \text{ Juni } 27{\cdot}1074750 \text{ mittl. Berl. Zeit} \\
i' &= 92°20'\ 0'29) \\
\Omega' &= 183\ \ 5\ 34{\cdot}04 \text{ mittl. Äquat. } 1877{\cdot}0 \\
w' &= 101\ 52\ 31{\cdot}73) \\
lgq &= 0{\cdot}0295666.
\end{aligned}
$$

Rechnet man aus diesen Elementen die Darstellung der Orte, so findet man:

	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
I. Oct. 4·0	+0'30	+0'30
II. Oct. 6·5	—1·68	+1·04
III. Oct. 10·5	+0·80	—3·79
IV. Oct. 13·5	+0·75	+1·88,

welche Fehler mit den obigen Werthen in befriedigender Übereinstimmung sind.

Die Summe der Fehlerquadrate, welche ursprünglich 443·14 betrug, ist durch die angeführten Correctionen auf 22·10 herabgesetzt worden.

Betrachtet man jedoch die fünf Unbekannten dT, $dlgq$, dw', $d\Omega'$ und di' als Functionen von de', so ergeben sich folgende Werthe der Correctionen:

$$\begin{aligned}
dlg &= [{}_n1\cdot73640] + [8\cdot45117]\,de' \\
di' &= [2\cdot24316] + [9\cdot49538]\,de' \\
d\Omega' &= [1\cdot30942] + [8\cdot14636]\,de' \\
dw' &= [{}_n2\cdot41332] + [9\cdot93102]\,de' \\
dT &= [1\cdot16062] + [9\cdot72782]\,de'.
\end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die Bedingungsgleichungen ein, so liefert diese Einsetzung zur endlichen Bestimmung des de' die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
+0\cdot23 - 0\cdot017\,de' &= 0 \\
+0\cdot51 - 0\cdot295\,de' &= 0 \\
-1\cdot48 - 0\cdot017\,de' &= 0 \\
+1\cdot17 - 0\cdot280\,de' &= 0 \\
+0\cdot87 - 0\cdot021\,de' &= 0 \\
-3\cdot67 - 0\cdot254\,de' &= 0 \\
+0\cdot52 - 0\cdot020\,de' &= 0 \\
+1\cdot93 - 0\cdot242\,de' &= 0
\end{aligned}$$

Der Anblick dieser Gleichungen lehrt, dass bei der Annahme $de' = 0$ die übrig bleibenden Fehler in den Gleichungen nur mässige Werthe zeigen, also die einfache Parabel die Normalorte schon befriedigend darstellt, und dass in Folge des Widerspruches

in einzelnen der Gleichungen auch ein bedeutender Werth für de' die Fehler nicht sonderlich herabzusetzen im Stande ist. Verlässt man die Voraussetzung einer parabolischen Bahn und bestimmt de' nach der Methode der kleinsten Quadrate, so ergibt sich dafür der Werth $-1\cdot06$ oder $de = -0\cdot0000106$. Der Einfluss, den dieser Werth, wenn man ihn gelten lassen wollte, auf die Herabsetzung der Fehler in den Normalorten ausübt, ist aber so gering, dass man annehmen kann, dass das Beobachtungsmaterial durch folgende wahrscheinlichste Parabel dargestellt wird:

$T = 1877$ Juni $27\cdot1074750$ mittl. Berl. Zeit

$i = 115°44'30''70$
$\pi = 287\ 31\ 43\cdot67$ } Ecliptik und mittl. Äquin. $1877\cdot0$
$\Omega = 184\ 16\ 54\cdot70$

$lgq = 0\cdot0295666.$

Über die Rotationsbewegung einer homogenen, tropfbaren Flüssigkeit um eine Achse unter den Einfluss der Reibung.

Von Dr. O. Tumlirz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. December 1881.)

I. Die Integration der Differentialgleichungen für die Rotationsbewegung einer homogenen, tropfbaren Flüssigkeit, hervorgerufen durch die Rotation einer unendlich langen, starren Kreiscylinderfläche um ihre Achse, beschränkte sich bisher, so viel mir bekannt ist, blos auf den Fall des stationären Zustandes und ergab als Resultat für die Geschwindigkeit V in der Richtung des Radiusvektors r und für die Winkelgeschwindigkeit ψ die Gleichungen:

$$V = 0, \qquad 1)$$

$$\psi = \frac{A}{r^2} + B, \qquad 2)$$

wo A und B Constante bezeichnen, die durch die Grenzbedingungen bestimmt sind.[1] Lassen wir aber jene Beschränkung hinweg und stellen wir blos die Forderung auf, dass für alle Punkte, die von der Achse gleichweit entfernt sind, die Geschwindigkeit denselben Werth besitzt, so gelangen wir, wie wir unten sehen werden, zu einem ziemlich complicirten Ausdruck für ψ, dagegen zu derselben Beziehung für V. Es wird sich hiebei zeigen, dass jener stationäre Zustand erst nach unendlich langer Zeit erreichbar ist,

[1] Newton fand $\psi = \frac{\text{const}}{r}$ (Princip. math. Lib. II. IX). Der Hauptfehler seiner Ableitung liegt bekanntlich darin, dass er als Bedingung des stationären Zustandes die Gleichheit der auf beiden Seiten einer Schichte wirkenden Kräfte und nicht ihrer Momente in Bezug auf die Rotationsachse aufstellte.

und dass zwischen dieser Erscheinung und der der Wärmebewegung in einem homogenen festen Cylinder oder in einer homogenen festen Kugel, ähnliche Bedingungen vorausgesetzt, eine grosse Analogie besteht.

Um nun diesen allgemeinen Fall näher zu untersuchen, nehmen wir die Rotationsachse zur z-Achse eines Cylindercoordinatensystems und betrachten die Bewegung eines jeden Flüssigkeitstheilchens als unabhängig von der Coordinate z und der Anomalie φ. Bedeuten dann w die Geschwindigkeit in der Richtung der z, ρ die Dichtigkeit, p den Druck, μ den Reibungscoëfficienten und g die Acceleration der Schwere, so nehmen für diesen Fall die hydrodynamischen Differentialgleichungen die Gestalt an:

$$\frac{dV}{dt} - r\psi^2 = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(Vr)}{\partial r}\right] - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad 3)$$

$$\frac{d\psi}{dt} + 2\frac{V\psi}{r} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \qquad 4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + V\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g \qquad 5)$$

$$0 = \frac{\partial(rV)}{r\partial r}. \qquad 6)$$

Zu diesen Gleichungen treten noch bestimmte Grenzbedingungen hinzu.

Wir wollen nun im Folgenden drei Fälle unterscheiden:

1. Die Flüssigkeit rotirt innerhalb der Cylinderfläche,
2. die Flüssigkeit rotirt ausserhalb der Cylinderfläche, und
3. die Flüssigkeit rotirt zwischen zwei Cylinderflächen.

Die Gleichung 6) liefert integrirt die Beziehung

$$V = \frac{F(t)}{r},$$

wo $F(t)$ eine willkürliche Function von t bedeutet. Diese Function ist in jedem der betrachteten Fälle gleich Null. Für den ersten folgt dies daraus, dass V für $r = 0$ nur den Werth Null haben kann, während in den beiden anderen Fällen $F(t)$ desshalb gleich Null zu setzen ist, weil einerseits V für jede benetzende Flüssigkeit

überall an den begrenzenden Cylinderflächen den Werth Null haben muss, und anderseits $F(t)$ für jede nicht benetzende Flüssigkeit im dritten Falle weder negativ (wegen der inneren Cylinderfläche) noch positiv (wegen der äusseren Cylinderfläche) sein kann und im zweiten Falle, wenn es von Null verschieden wäre, zu einer unendlich grossen lebendigen Kraft des Mediums führen müsste. Wir erhalten somit $V = 0$.

Aus den Gleichungen 3) und 5) folgt

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0,$$

d. h. $\frac{\partial p}{\partial z}$ ist sowohl von z als auch von r unabhängig, also auch von ψ unabhängig. w steht demnach zu ψ in gar keiner Beziehung und wird daher, da wir $w = 0$ annehmen, wenn ψ überall gleich Null ist, auch während der ganzen Bewegung gleich Null bleiben. Von den Geschwindigkeitscomponenten bleibt auf diese Weise nur $r\psi$ übrig; die Stromlinien sind also Kreislinien. Dadurch verwandeln sich die obigen Differentialgleichungen in folgende:

$$r\psi^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mu'\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right), \tag{8}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g \tag{9}$$

μ' steht hier der Kürze halber für $\frac{\mu}{\rho}$.

Die Gleichung 7) sagt, dass p mit wachsendem r zunimmt, und gibt mit 9) verbunden, für die Niveauflächen die Relation

$$gz + \int r\psi^2 dr = \text{const.}$$

II. Die vollständige Bestimmung der Flüssigkeitsbewegung erfordert nur noch die Integration der Differentialgleichung 8).

Wir setzen zu dem Ende

$$\psi = r^{-1}\frac{\partial v}{\partial r}$$

und erhalten daraus

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} = -r^{-1}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial t},$$

$$\frac{3\mu'}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = -3\mu' r^{-3}\frac{\partial v}{\partial r} + 3\mu' r^{-2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

$$\mu'\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = 2\mu' r^{-3}\frac{\partial v}{\partial r} - 2\mu' r^{-2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \mu' r^{-1}\frac{\partial^3 v}{\partial r^3};$$

somit

$$\mu'\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$= r^{-1}\left[\mu'\left(\frac{\partial^3 v}{\partial r^3} + r^{-1}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - r^{-2}\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2 v}{\partial r\partial t}\right]$$

$$= r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu'\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r^{-1}\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{\partial v}{\partial t}\right] = 0.$$

Das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu'\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

ist längst bekannt[1] und lautet:

$$v = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\varphi_1(r\cos\vartheta + 2\alpha\sqrt{\mu' t})\,d\alpha$$

$$+ \int_0^{\pi} d\vartheta \log(r\sin^2\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\varphi_2(r\cos\vartheta + 2\alpha\sqrt{\mu' t})\,d\alpha,$$

wo φ_1 und φ_2 zwei willkürliche Functionen bedeuten. Für die Differentialgleichung 8) ergibt sich somit das vollständige Integral in der Form

$$\psi = \frac{1}{r_0}\int_0^{\pi} d\vartheta\cos\vartheta \int_{-\infty}^{-\infty} d\alpha e^{-\alpha^2}\varphi_1'(r\cos\vartheta + 2\alpha\sqrt{\mu' t})$$

$$+ \frac{1}{r^2}\int_0^{\pi} d\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-\alpha^2}\varphi_2(r\cos\vartheta + 2\alpha\sqrt{\mu' t})$$

$$+ \frac{1}{r_0}\int_0^{\pi} d\vartheta\cos\vartheta\log(r\sin^2\vartheta)\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-\alpha^2}\varphi_2'(r\cos\vartheta + 2\alpha\sqrt{\mu' t}) \qquad 10)$$

[1] Poisson, Journal de l'école polyt. cah. 19, p. 245.

oder

$$\psi = \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^2\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-\alpha^2} \varphi_1''(r\cos\vartheta + 2\alpha\sqrt{\mu' t})$$

$$+ \frac{1}{r^2} \int_0^{\pi} d\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-\alpha^2} \varphi_2(r\cos\vartheta + 2\alpha\sqrt{\mu' t})$$

$$+ \frac{1}{r} \int_0^{\pi} d\vartheta \cos\vartheta \log(r\sin^2\vartheta) \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-\alpha^2} \varphi_2'(r\cos\vartheta + 2\alpha\sqrt{\mu' t}). \quad 10a)$$

Wird

$$\varphi_1''(r\cos\vartheta + 2\alpha\sqrt{\mu' t}) = \text{const.}$$

und

$$\varphi_2(r\cos\vartheta + 2\alpha\sqrt{\mu' t}) = \text{const.},$$

so erhalten wir die Gleichung 2).

Wir wollen nun im Folgenden den ersten der drei angeführten Fälle zunächst betrachten.

Die Flüssigkeit rotirt innerhalb einer starren Kreiscylinderfläche.

III. Für $r = 0$ darf ψ nicht unendlich gross werden; wir haben daher von der Function φ_2 vollständig abzusehen. Unser Integral reducirt sich dadurch auf

$$\psi = \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^2\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-\alpha^2} \Phi(r\cos\vartheta + 2\alpha\sqrt{\mu' t}), \quad 11)$$

wo Φ an Stelle von φ_1'' steht.

Hiezu tritt noch eine Grenzbedingung. Ist l der Radius des Cylinders, so muss für $r = l$ die Gleichung bestehen:

$$\mu \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} + Mr(\psi - \omega) = 0, \quad 12)$$

wo M den Coëfficienten der äusseren Reibung und ω die Winkelgeschwindigkeit des Cylinders bedeutet. Wir wollen im Folgenden den Quotienten $\frac{\mu}{M}$ immer mit η bezeichnen und ω zunächst gleich Null annehmen.

Das Integral 11) können wir noch auf eine andere Form bringen. Wir setzen

$$\alpha = \frac{\beta - r\cos\vartheta}{2\sqrt{\mu' t}}.$$

Dadurch wird

$$d\alpha = \frac{d\beta}{2\sqrt{\mu' t}}$$

und

$$e^{-\alpha^2} = e^{-\frac{(\beta - r\cos\vartheta)^2}{4\mu' t}}.$$

Nun besteht bekanntlich die Beziehung

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4\mu' t}}}{2\sqrt{\mu' t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dn e^{-n^2\mu' t} \cos(nx).$$

Aus derselben geht unmittelbar hervor

$$e^{-\alpha^2} = \frac{2\sqrt{\mu' t}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dn e^{-n^2\mu' t} \cos[n(\beta - r\cos\vartheta)]$$

und somit

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi d\vartheta \sin^2\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \Phi(\beta) \int_0^\infty dn e^{-n^2\mu' t} \cos[n(\beta - r\cos\vartheta)].$$

Berücksichtigen wir nun, dass

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin^2\vartheta \cos[n(\beta - r\cos\vartheta)] = \cos(n\beta) \int_0^\pi d\vartheta \sin^2\vartheta \cos(nr\cos\vartheta)$$

$$= \pi \frac{\cos(n\beta)}{nr} J^1(nr)$$

ist, wo J^1 die Bessel'sche Function erster Ordnung bezeichnet, so können wir die Gleichung 12) auch in der Form schreiben

$$\psi = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \Phi_1(\beta) \int_0^\infty dn e^{-n^2\mu' t} \frac{\cos(n\beta)}{n} J^1(nr), \qquad 13)$$

worin

$$\sqrt{\pi}\Phi = \Phi_1$$

gesetzt ist.

Substituiren wir aus dieser Gleichung den Werth von $r\psi$ in 12), so ergibt sich für $r = l$

$$\int_0^\infty dn e^{-n^2\mu' t} \cdot \frac{1}{n}\left\{\eta \frac{\partial J^1(nr)}{\partial r} + J^1(nr)\right\}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\beta)\cos(n\beta)d\beta = 0.$$

Da diese Beziehung für jedes t gilt, so muss die Gleichung

$$\frac{1}{n}\left\{\eta \frac{\partial J^1(nr)}{\partial r} + J^1(nr)\right\}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\beta)\cos(n\beta)d\beta = 0 \text{ für } r = l$$

für jedes n zwischen 0 und ∞ bestehen. Diese Gleichung wird nun zunächst erfüllt sein für alle n, die Wurzeln der Gleichung

$$\eta \frac{\partial J^1(nr)}{\partial r} + J^1(nr) = 0 \text{ für } r = l,$$

die wir lieber mittelst der Beziehung

$$\frac{\partial J^1(z)}{\partial z} = \frac{1}{z} J^1(z) - J^2(z)$$

auf die Form

$$(1 + \frac{\eta}{l}) J^1(nl) - \eta n J^2(nl) = 0 \qquad 14)$$

bringen wollen, sind, mit Ausnahme von $n = 0$, und kann demnach für alle anderen n nur dadurch erfüllt werden, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\beta)\cos(n\beta)d\beta = 0 \qquad 15)$$

wird, d. h. die Function $\Phi_1(\beta)$ soll so bestimmt werden, dass die Gleichung 15) für alle n, die nicht Wurzeln der Gleichung 14) sind, und für $n = 0$ gilt.

Schreiben wir nun 13) in der Form

$$r\psi = \sum_0^\infty A_n e^{-n^2\mu' t} \frac{J^1(nr)}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\beta)\cos(n\beta)d\beta,$$

worin A_n eine Constante bedeutet, so wird zufolge 15)

$$r\psi = \sum_n A_n e^{-n^2\mu' t} \frac{J^1(nr)}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\beta)\cos(n\beta)d\beta, \qquad 16)$$

wo aber jetzt die Summe blos nach jenen n zu nehmen ist, die reelle positive Wurzeln der Gleichung 14) sind, ausgenommen $n = 0$.

IV. Die nächste Aufgabe besteht nun darin, die willkürliche Function $\Phi_1(\beta)$ sammt der Constanten A_n aus dem gegebenen Anfangszustande zu bestimmen. Wir transformiren zu dem Ende die Differentialgleichungen 8) und 12) mittelst der Beziehung

$$\chi = \psi \sqrt{r^3}$$

in

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \mu' \left(\frac{\partial \chi^2}{\partial r^2} - \frac{3\chi}{4r^2} \right) \qquad 17)$$

und

$$\eta \frac{\partial \chi}{\partial r} + \left(1 - \frac{\eta}{2r} \right) \chi = 0 \text{ für } r = l \qquad 18)$$

und substituiren hierin für χ den Werth aus der Gleichung 16). Auf diese Weise erhalten wir, wenn wir noch der Kürze halber

$$\sqrt{r} J^1(nr) = R$$

setzen,

$$\sum_n A_n \left(-n^2 R - \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{3R}{4r^2} \right) \frac{e^{-n^2 \mu' t}}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\beta) \cos(n\beta) d\beta = 0$$

und

$$\sum_n A_n \left[\eta \frac{\partial R}{\partial r} + \left(1 - \frac{\eta}{2r} \right) R \right] \frac{e^{-n^2 \mu' t}}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\beta) \cos(n\beta) d\beta = 0 \text{ für } r = l.$$

Beide Gleichungen müssen für jedes t erfüllt sein; daher gelten für jedes n der Summe die Beziehungen:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{3R}{4r^2} = -n^2 R \qquad 19)$$

und

$$\eta \frac{dR}{dr} + \left(1 - \frac{\eta}{2r} \right) R = 0 \text{ für } r = l. \qquad 20)$$

Für irgend eines dieser n, es sei n_1, wollen wir

$$\sqrt{r} J^1(n_1 r) = R_1$$

setzen und nun die Differentialgleichung 17) beiderseits mit $R_1 dr$ multipliciren und hierauf die einzelnen Glieder zwischen den Grenzen 0 und l integriren.[1] Wir erhalten alsdann:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l \chi R_1 dr = \mu' \int_0^l \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} R_1 dr - \frac{3\mu'}{4}\int_0^l \frac{\chi R_1}{r^2} dr.$$

Es ist aber

$$\int_0^l \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} R_1 dr = \left[\frac{\partial \chi}{\partial r} R_1\right]_0^l - \int_0^l \frac{\partial \chi}{\partial r}\frac{\partial R_1}{\partial r} dr$$

$$= \left[\frac{\partial \chi}{\partial r} R_1\right]_0^l - \left[\chi \frac{\partial R_1}{\partial r}\right]_0^l + \int_0^l \chi \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} dr;$$

somit

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l \chi R_1 dr = \mu' \int_0^l \chi\left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} - \frac{3R_1}{4r^2}\right) dr + \mu'\left[\frac{\partial \chi}{\partial r} R_1\right]_0^l - \mu'\left[\chi \frac{\partial R_1}{\partial r}\right]_0^l$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l \chi R_1 dr = -n_1^2 \mu \int_0^l \chi R_1 dr + \mu'\left[\frac{\partial \chi}{\partial r} R_1\right]_0^l - \mu'\left[\chi \frac{\partial R_1}{\partial r}\right]_0^l.$$

Für $r = 0$ ist

$$R_1 = 0, \quad \frac{\partial R_1}{\partial r} = 0, \quad \chi = 0 \text{ und } \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0.$$

Für $r = l$ ist

$$\left[\frac{\partial \chi}{\partial r} R_1\right]_{r=l} = -\frac{1}{\eta}\left[\left(1 - \frac{\eta}{2r}\right)\chi R_1\right]_{r=l},$$

und

$$\left[\frac{\partial R_1}{\partial r_1}\chi\right]_{r=l} = -\frac{1}{\eta}\left[\left(1 - \frac{\eta}{2r}\right) R_1 \chi\right]_{r=l};$$

daher

$$\left[\frac{\partial \chi}{\partial r} R_1\right]_0^l - \left[\frac{\partial R_1}{\partial r}\chi\right]_0^l = 0,$$

[1] Vergl. Poisson, Second mémoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides. Journal de l'école polyt cah. 19, p. 301. 1821.

und somit

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l \chi R_1\, dr = -n_1^2\mu' \int_0^l \chi R_1\, dr$$

oder

$$\int_0^l \chi R_1\, dr = B e^{-n_1^2\mu' t},$$

wo B eine von t unabhängige Grösse bezeichnet. Ist zur Zeit $t=0$, die Function χ gegeben:

$$\chi = f(r),$$

so findet sich

$$B = \int_0^l f(r) R_1\, dr$$

und dadurch

$$\int_0^l \chi R_1\, dr = e^{-n_1^2\mu' t} \int_0^l f(r) R_1\, dr \qquad 21)$$

In diese Gleichung wollen wir nun für χ dessen Werth aus 16) einführen:

$$\sum_r A_n \frac{e^{-n^2\mu' t}}{n} \int_0^l R R_1\, dr \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\beta) \cos(n\beta)\, d\beta =$$

$$= e^{-n_1^2\mu' t} \int_0^l f(r) R_1 dr.$$

Alsdann ist es klar, dass diese Gleichung nur dann identisch sein kann, wenn

$$\int_0^l R R_1\, dr \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\beta) \cos(n\beta) d\beta = 0$$

ist, sobald $n \gtrless n_1$ ist. Der zweite Faktor darf aber nicht verschwinden, weil wir sonst zu einem Widerspruch geführt würden; somit muss

$$\int_0^l R R_1\, dr = 0 \text{ für } n \gtrless n_1$$

oder

$$\int_0^l r\, J^1(nr)\, J^1(n_1 r)\, dr = 0 \text{ für } n \gtrless n_1$$

sein.[1] Dadurch wird die obige Gleichung zu

$$A_{n_1} \cdot \frac{1}{n_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\beta) \cos(n_1\beta)\, d\beta \int_0^l R_1 R_1\, dr = \int_0^l f(r)\, R_1\, dr$$

oder

$$A_{n_1} \cdot \frac{1}{n_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\beta) \cos(n_1\beta)\, d\beta = \frac{\int_0^l f(r) R_1\, dr}{\int_0^l R_1 R_1\, dr}$$

und führt zu dem Schlussresultate

$$\chi = \sum_n e^{-n^2\mu' t} R \frac{\int_0^l f(r)\, R\, dr}{\int_0^l R R\, dr}$$

oder

$$r\psi = \sum_n e^{-n^2\mu' t} J^1(nr) \frac{\int_0^l f(\xi) \sqrt{\xi} J^1(n\xi)\, d\xi}{\int_0^l \xi J^1(n\xi) J^1(n\xi)\, d\xi} \qquad 22)$$

Die Geschwindigkeit $r\psi$ für irgend einen Radiusvektor r und zu irgend einer Zeit t erscheint ausgedrückt durch eine unendliche, nach den reellen, positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung 14) ($n = 0$ ausgenommen) fortschreitende Reihe von Exponentialgrössen, deren Exponenten der Zeit, dem Reibungscoëfficienten und dem Quadrate der Wurzeln jener transcendenten Gleichung proportional sind, und deren Coëfficienten Funktionen von r und jenen Wurzeln n sind.

Leider gewährt die Form dieses Ausdruckes kein unmittelbar anschauliches Resultat.

[1] Vergl. Poisson, a. a. O.

Ist $t = 0$, so erhalten wir die Beziehung

$$f(r) = \sqrt{r} \sum_n J^1(nr) \frac{\int_0^l \sqrt{\xi}\, f(\xi)\, J^1(n\xi)\, d\xi}{\int_0^l \xi . J^1(n\xi)\, J^1(n\xi)\, d\xi}$$

Natürlich gilt diese Reihenentwicklung für $f(r)$ nur für die Werthereihe von r, auf welche sich der Anfangszustand bezieht.

V. Was die Gleichung

$$\left(1 + \frac{\eta}{l}\right) J^1(nl) - \eta n J^2(nl) = 0$$

anbelangt, so nimmt dieselbe für die zwei extremen Fälle, $\eta = 0$ und $\eta = \infty$, eine einfachere Gestalt an.

Für $\eta = 0$ wird $J^1(nl) = 0$;

Für $\eta = \infty$ „ $J^1(nl) - nl J^2(nl) = 0$.

Sind z_1, z_2, z_3 etc. die positiven reellen Wurzeln der Gleichung

$$J^1(z) = 0,$$

so ist [1]

$$z_1 = 0, \quad \begin{matrix} > 3{\cdot}8 \\ z_2 \\ < 3{\cdot}9 \end{matrix} \quad \begin{matrix} > 4 \\ z_3 \\ < 4{\cdot}1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} > 7 \\ z_4 \\ > 7{\cdot}1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} > 10{\cdot}1 \\ z_5 \\ < 10{\cdot}2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} > 13{\cdot}3 \\ z_6 \\ < 13{\cdot}4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} > 16{\cdot}4 \\ z_7 \\ > 16{\cdot}5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} > 19{\cdot}6 \\ z_8 \\ < 19{\cdot}7 \end{matrix} \quad \text{etc.}$$

Von der Wurzel $z_1 = 0$ haben wir, wie schon erwähnt, ganz abzusehen.

Die Winkelgeschwindigkeit nimmt überall mit der Zeit rasch ab und verschwindet für $t = \infty$ vollständig. Die ganze lebendige Kraft verwandelt sich also schliesslich in Wärme oder etwas dem äquivalentes.

Je kleiner l ist, desto grösser werden die Wurzeln n_2, n_3, n_4, etc. ausfallen und umgekehrt; je kleiner also der Radius des Cylinders ist, desto rascher wird die Bewegung abnehmen.

---

[1] Lommel, Bessel'sche Functionen, p. 127, sqq.

Nach sehr langer Zeit können wir in dem Ausdrucke für ψ blos jenes Glied behalten, welches die kleinste Wurzel n_2 der Gleichung 14) enthält.[1] Dann wird

$$r\,\psi = e^{-n_2^2\mu' t} J^1(n_2 r)\,\frac{\int_o^l \sqrt{\xi}\, f(\xi)\, J^1(n_2\xi)\, d\xi}{\int_o^l \xi\, J^1(n_2\xi) J^1(n_2\xi)\, d\xi}.$$

ψ nimmt jetzt für die einzelnen r nach einer geometrischen Reihe ab, wenn die Zeit nach einer arithmetischen wächst, und zwar so, dass das Verhältniss der ψ für zwei verschiedene r immer dasselbe bleibt und ausserdem vom Anfangszustand und bei benetzenden Flüssigkeiten ($\gamma = 0$) noch vom Reibungscoëfficienten unabhängig ist.

Suchen wir für diesen Fall noch den Weg, den ein Flüssigkeitstheilchen, dem der Radiusvektor r zugehört, von der Zeit t bis $t+1$ und von $t+1$ bis $t+2$ beschreibt, so finden wir, wenn der Kürze halber

$$\frac{\int_o^l \sqrt{\xi}\, f(\xi)\, J^1(n_2\xi)\, d\xi}{\int_o^l \xi\, J^1(n_2\xi) J^1(n_2\xi)\, d\xi} = N_2$$

gesetzt wird,

$$w_1 = \int_t^{t+1} r\,\psi\, dt = J^1(n_2 r)\, N_2\, (1 - e^{-n_2^2\mu' t})\,\frac{e^{-n_2^2\mu' t}}{n_2^2\mu'},$$

$$w_2 = \int_{t+1}^{t+2} r\,\psi\, dt = J^1(n_2 r)\, N_2\, (1 - e^{-n_2^2\mu'})\,\frac{e^{-n_2^2\mu' t}}{n_2^2\mu'} \cdot e^{-n_2^2\mu},$$

und daraus

$$\frac{w_1}{w_2} = e^{n_2^2\mu'}.$$

---

[1] Für $\gamma = 0$ bleiben zwei Glieder übrig, die n_2 und n_3 entsprechen. Da aber n_2 und n_3 einander sehr nahe liegen, so können wir ohne merklichen Fehler $z_2 = z_3 = 3{\cdot}9$ setzen, wodurch sich jene Glieder zu einem einzigen vereinigen.

Dieses sowohl von r als auch von t und dem Anfangszustand unabhängige Verhältniss können wir das Dämpfungsverhältniss und die Grösse

$$n_2^2 \mu' = \log w_1 - \log w_2$$

das logarithmische Decrement nennen. Wir wollen es im Folgenden mit D bezeichnen.

Ist $\eta = 0$, dann ist

$$n_2 = \frac{z_2}{l};$$

also

$$D = \frac{z_2^2}{l^2} \cdot \mu'.$$

Rotirt dieselbe benetzende Flüssigkeit in einem Cylinder vom Radius l', so wird

$$D' = \frac{z_2^2}{l'^2} \cdot \mu'.$$

Wir erhalten daher

$$D : D' = l'^2 : l^2$$

und gelangen zu folgendem Satz:

„Rotirt eine und dieselbe benetzende Flüssigkeit in Cylindern von verschiedener Weite, so wird die Bewegung nach längerer Zeit so erfolgen, dass die logarithmischen Decremente in jedem Cylinder für alle Flüssigkeitstheilchen dieselben sind und für verschiedene Cylinder sich verkehrt verhalten wie die Quadrate der Cylinderradien oder wie die Querschnitte der Cylinder."

Rotiren dagegen in demselben Cylinder zwei verschiedene benetzende Flüssigkeiten von den Reibungscoëfficienten μ und μ_1 und der Dichtigkeiten ρ und ρ_1, so erhalten wir die Proportion

$$D : D_1 = \frac{\mu}{\rho} : \frac{\mu_1}{\rho_1};$$

d. h. „die logarithmischen Decremente verhalten sich direct wie die Quotienten aus dem Reibungscoëfficienten und der Dichtigkeit."

Sind für eine benetzende Flüssigkeit D und ρ bestimmt, so lässt sich aus der Gleichung

$$D = \frac{n_2^2 \mu}{\rho} = \frac{3 \cdot 9^2}{l^2} \cdot \frac{\mu}{\rho}$$

der Reibungscoëfficient μ direct berechnen.

Sind dagegen D, ρ und μ einer nicht benetzenden Flüssigkeit gegeben, so kann man aus

$$D = \frac{n_2^2 \mu}{\rho}$$

n_2 und damit mit Hilfe der Gleichung

$$(1 + \frac{\eta}{l}) J^1(n_2 l) - \eta n_2 J^2(n_2 l) = 0$$

die Grösse η und schliesslich daraus den Coëfficienten der äusseren Reibung M berechnen.

VI. Ist $f(r)$ blos zwischen $r = o$ und $r = a$, wo $a < l$ ist, von Null verschieden, sonst aber gleich Null, so wird

$$r\psi = \sum_n e^{-n^2 \mu' t} J^1(nr) \frac{\int_o^a \sqrt{\xi} f(\xi) J^1(n\xi) d\xi}{\int_o^l \xi J^1(n\xi) J^1(n\xi) d\xi}$$

und

$$\sum_n J^1(nr) \frac{\int_o^a \sqrt{\xi} f(\xi) J^1(n\xi) d\xi}{\int_o^l \xi J^1(n\xi) J^1(n\xi) d\xi} = 0 \text{ für } a < r < l.$$

Suchen wir den Werth für $\frac{\partial (r\psi)}{\partial t} dt$ zur Zeit $t = 0$, so finden wir

$$\frac{\partial (r\psi)}{\partial t} dt = -\mu' dt \sum_n n^2 J^1(nr) \frac{\int_o^a \sqrt{\xi} f(\xi) J^1(n\xi) d\xi}{\int_o^l \xi J^1(n\xi) J^1(n\xi) d\xi}.$$

Für das Gebiet $a < r < l$ wird die rechte Seite im Allgemeinen von Null verschieden sein, da die Glieder der Summe

in der vorletzten Gleihung hier mit verschiedenen Factoren multiplizirt erscheinen.

Es lassen sich daraus zwei wichtige Schlüsse ziehen:

a) die Rotationsbewegung, die auf das Gebiet $o < r < a$ beschränkt war, pflanzt sich auf die einzelnen Schichten des Gebietes $a < r < l$ fort und zwar nicht succesive, sondern plötzlich.

b) Ist eine incompressible Flüssigkeit in einem cylindrischen Gefäss durch dessen Rotation um die Achse in eine rotirende Bewegung versetzt worden, und wird das Gefäss plötzlich zur Ruhe gebracht und in diesem Zustande erhalten, so wird die Flüssigkeit auch zur Ruhe kommen und zwar erst nach unendlich langer Zeit, aber dies wird nicht so eintreten, dass die Schichten von der Gefässwand bis zur Achse nacheinander zur Ruhe kommen, sondern so, dass alle Schichten zu gleicher Zeit ihre Bewegung verlieren.

Nehmen wir an, $f(r)$ sei blos in dem Gebiete $a < r < l$ von Null verschieden, so werden wir auf eine ganz ähnliche Weise wie oben zu dem Schlusse geführt, dass, wenn eine Flüssigkeit in einem Cylinder durch dessen Rotation in eine rotirende Bewegung versetzt wird, die Rotation sich von der Gefässwand aus nicht successive auf die einzelnen Schichten überträgt, sondern dass alle Schichten gleichzeitig in Rotation gerathen.

Diese Folgerungen der Theorie, analog denen in der Theorie der Wärmeleitung, dürften in Wirklichkeit gewiss nicht zutreffen.[1] Die Theorie basirt eben auf Voraussetzungen (absolute Incompressibilität), die den Thatsachen nicht vollständig entsprechen.

VII. Wir wollen nun den Fall untersuchen, dass der Cylinder selbst eine constante Winkelgeschwindigkeit ω besitzt.

Wäre $f(r)$ der Ausdruck für die Vertheilung der Winkelgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, so würde der Effect der wechselseitigen Beschleunigungen der einzelnen Schichten ganz derselbe sein, als wenn sich der Cylinder im Zustande der Ruhe befände und die Flüssigkeitsschichte vom Radiusvektor r die Winkel-

[1] Die Übertragung der Rotationsbewegung von Schichte zu Schichte wird in der Wirklichkeit ohne Zweifel der Fortpflanzung transversaler Schwingungen analog sein.

geschwindigkeit $f(r) - \omega$ besässe. Unter dieser Bedingung kommen aber alle Schichten nach unendlich langer Zeit vollständig zur Ruhe, das ist in den Zustand des Cylinders. Rotirt also der Cylinder mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω, so erlangen nach unendlich langer Zeit alle Schichten die Winkelgeschwindigkeit ω; der Bewegungszustand wird stationär.

VIII. Wir nehmen nun $l = \infty$ an und stellen uns die Frage: Wie wird sich eine Rotationsbewegung, die sich zur Zeit $t = 0$ auf ein endliches Gebiet $0 < r < a$ erstreckt, auf eine unendliche Masse übertragen?

Eine analoge Frage pflegt man sich bekanntlich bei der Untersuchung elastischer Medien zu stellen.

Die Gleichungen 22) und 14) nehmen für diesen Fall die Gestalt an:

$$r\psi = \sum_n e^{-n^2\mu' t} J^1(nr) \frac{\int_0^a \sqrt{\xi} f(\xi) J^1(n\xi) d\xi}{\int_0^\infty \xi J^1(n\xi) J^1(n\xi) d\xi}$$

und

$$J^1(nl) - \gamma_1 n J^2(nl) = 0 \text{ für } l = \infty.$$

Der letzteren Gleichung genügen alle reellen Werthe von n, die grösser als Null sind, weil für diese die Functionen J^1 und J^2 für sich verschwinden. Auch der Werth $n = 0$ ist eine Wurzel, wie man sich leicht überzeugen kann, doch ist dieselbe auch hier nicht weiter zu beachten. Die oben gezogenen Schlüsse gelten natürlich auch für diesen Fall. Es werden, sobald t von Null verschieden wird, alle Schichten des Mediums in Bewegung gerathen und erst nach unendlich langer Zeit vollständig zur Ruhe kommen. Leider ist aber auch in diesem Falle die Form des Ausdruckes für ψ noch so complicirt, dass man nicht im Stande ist, einen Einblick in die quantitativen Verhältnisse zu gewinnen, nach welchen sich die Bewegung vom Gebiete $0 < r < a$ auf die Schichten des Gebietes $r > a$ überträgt.

Für den Fall, dass $l = \infty$ ist, lässt sich der Ausdruck für ψ noch durch eine andere Methode als die oben durchgeführte gewinnen.

Wir setzen in der Gleichung 10) $\varphi_2\,(r\cos\theta+2\alpha\sqrt{\mu' t})=0$ und statt φ_1' der Einfachheit wegen φ. Alsdann ist

$$r\psi=\int_0^{\pi}d\theta\,\cos\theta\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha e^{-\alpha^2}\varphi\,(r\cos\theta+2\alpha\sqrt{\mu' t}).$$

Die Grenzbedingung reducirt sich hier auf lim $(r\psi)=0$ für $r=\infty$.

Für $t=0$ erhalten wir

$$r\psi=\sqrt{\pi}\int_0^{\pi}d\theta\,\cos\theta\varphi(r\cos\theta),$$

oder wenn wir

$$r=\frac{1}{z}$$

setzen,

$$\frac{\psi}{z^2}=\sqrt{\pi}\int_0^{\pi}d\theta\,\frac{\cos\theta}{z}\,\varphi\left(\frac{\cos\theta}{z}\right).$$

Führen wir statt der Function φ eine andere Function ein vermittelst der Beziehung

$$\frac{1}{z}\,\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=F(z),$$

so erhalten wir

$$\frac{\cos\theta}{z}\,\varphi\left(\frac{\cos\theta}{z}\right)=F\left(\frac{z}{\cos\theta}\right)$$

und

$$\frac{\psi}{\sqrt{\pi}\,z^2}=\int_0^{\pi}d\theta F\left(\frac{z}{\cos\theta}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left[F\left(\frac{z}{\cos\theta}\right)+F\left(-\frac{z}{\cos\theta}\right)\right].$$

Wir ersetzen nun θ durch eine neue Variable β mittelst der Gleichung

$$\beta=z\,tg\theta.$$

Dann wird

$$F\left(\pm\frac{z}{\cos\vartheta}\right) = F(\sqrt{\beta^2+z^2}),$$

$$d\vartheta = z.\frac{d\beta}{\beta^2+z^2}$$

und somit

$$\frac{\psi}{z^3\sqrt{\pi}} = 2\int_0^\infty d\beta\,\frac{F(\sqrt{\beta^2+z^2})}{\beta^2+z^2}.$$

Setzen wir nun abermals

$$\beta = \sqrt{\alpha},$$

so wird

$$\frac{\psi}{z^3\sqrt{\pi}} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{F(\sqrt{z^2+\alpha})}{z^2+\alpha} = \sqrt{-1}\,\sqrt{\pi}\int^{1/2}\frac{F(z)}{z^2}\,d(z^2)^{1/2}\,[1]$$

oder für

$$z = \sqrt{n}$$

$$\frac{\psi}{u^{3/2}\pi} = \sqrt{-1}\int\frac{F(\sqrt{u})}{u}\,du^{1/2}.$$

Und führen wir schliesslich mittelst der Beziehung

$$\frac{F(\sqrt{u})}{u} = \chi(u),$$

eine neue Function χ ein, so erhalten wir

$$\frac{\psi}{u^{3/2}\pi} = \sqrt{-1}\int^{1/2}\chi(u)\,du^{1/2}.$$

Ist zur Zeit $t = 0$

---

[1] Vergl. Liouville, Mémoire sur quelques Questions de Géometrie et de Mécanique et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Questions. Journal de l'école polyt. cah. 21.

$$\psi = f(r) = f\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right) = G(u),$$

so ist

$$\chi(u) = -\frac{\sqrt{-1}}{\pi}\frac{d^{1/2}}{du^{1/2}}\left(\frac{G(u)}{u^{1/2}}\right)$$

oder

$$= -\frac{\sqrt{-1}}{\pi}\frac{d}{du}\cdot\frac{d^{-1/2}}{du^{-1/2}}\left(\frac{G(u)}{u^{1/2}}\right).$$

Da nun

$$\chi(u) = \frac{F(\sqrt{u})}{u} = \frac{1}{\sqrt{u^3}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$$

ist, so wird

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right) = -\frac{\sqrt{-1}}{\pi}u^{3/2}\frac{d}{du}\frac{d^{-1/2}}{du^{-1/2}}\left(\frac{G(u)}{u^{1/2}}\right).$$

In dem Resultat ist dann $\frac{1}{\sqrt{u}} = r$ zu setzen.

Beispiel. Es sei

$$f(r) = \frac{2A}{\pi}\cos\frac{r\pi}{2a}\int_0^\infty \frac{dx\,\sin x\cos\frac{rx}{a}}{x}.$$

Da

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx\,\sin x\cos\frac{rx}{a}}{x} = \begin{cases} 1 \text{ für } \left(\frac{r}{a}\right)^2 < 1 \\ 0 \quad " \quad \left(\frac{r}{a}\right)^2 > 1 \\ 1/2 \quad " \quad \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

ist und negative Werthe von r ganz ausgeschlossen sind, so wird $f(r)$ von $r = 0$ bis $r = a$ gleich $A\cos\frac{r\pi}{a}$, für $r > a$ aber gleich Null sein. Ferner ist

$$G(u) = f\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right) = \frac{2A}{\pi}\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \cdot \cos\left(\frac{x}{a\sqrt{u}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2a\sqrt{u}}\right)$$

$$= \frac{A}{\pi}\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x}\left[\cos\left(\frac{2x+\pi}{2a\sqrt{u}}\right) + \cos\left(\frac{2x-\pi}{2a\sqrt{u}}\right)\right].$$

Entwickelt man nun die beiden Cosinus nach der Mac Laurin'schen Reihe, bildet dann für beide Reihen das allgemeine Glied, multiplicirt mit dem Factor $1/u^{3/2}$, und differentiirt es schliesslich nach der Ordnung $-1/2$, so ergibt sich

$$-\sqrt{-1}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\left(\frac{2x+\pi}{2a\sqrt{u}}\right)^{2m}\frac{\Gamma(m+1)}{u\Gamma(m+3/2)}$$

$$\text{resp. } -\sqrt{-1}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\left(\frac{2x-\pi}{2a\sqrt{u}}\right)^{2m}\frac{\Gamma(m+1)}{u\Gamma(m+3/2)},$$

wo unter m eine beliebige ganze, positive Zahl verstanden und mit Γ das Euler'sche Integral zweiter Gattung bezeichnet ist.

Berücksichtigen wir, dass

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+3/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}(\sin y)^{2m+1}dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}(\cos y)^{2m+1}dy$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{d^{-1/2}}{du^{-1/2}}\left(\frac{G(u)}{u^{1/2}}\right) = \frac{4A}{\sqrt{-1}\pi^{3/2}u}\int_0^{\pi/2}dy\cos y\cos\left(\frac{\pi\cos y}{2a\sqrt{u}}\right)$$

$$\int_0^\infty dx\frac{\sin x}{x}\cos\left(\frac{x\cos y}{a\sqrt{u}}\right)$$

und schliesslich:

$$\varphi(r) = \frac{2A}{\pi^{3/2}}\frac{d}{dr}\left[r^2\int_0^{\pi/2}dy\cos y\cos\left(\frac{r\pi\cos y}{2a}\right)\int_0^\infty dx\frac{\sin x}{x}\cos\left(\frac{rx\cos y}{a}\right)\right.$$

Von $r = 0$ bis $r = a$ ist

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx\frac{\sin x}{x}\cos\left(\frac{rx\cos y}{a}\right) = 1.$$

Für $r>a$ haben wir als untere Grenze von y

$$y = \arccos \frac{a}{r}$$

zu setzen, und für solche y wird wieder

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \, \frac{\sin x}{x} \cos\left(\frac{xr \cos y}{a}\right) = 1.$$

Bringen wir nun den Ausdruck für ψ auf die Form

$$r\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi d\theta \cos\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\beta) d\beta \int_0^\infty dn e^{-n^2\mu' t} \cos\left[n(r\cos\theta - \beta)\right]$$

und berücksichtigen wir, dass zu Folge Ausschliessung aller negativen Werthe des Arguments von $f(r)$ die Integration nach β nur von 0 bis $+\infty$ auszuführen ist, und dass ferner

$$\lim \left[\beta^2 \int_0^\infty dx \, \frac{\sin x}{x} \cos\left(\frac{\beta \cos y}{a} x\right)\right]_{\beta = \infty}$$

$$= \lim \left[\beta^2 \int_0^\infty dx \, \frac{e^{-kx} \sin x}{x} \cos\left(\frac{\beta \cos y}{a} x\right)\right]_{\substack{k=0 \\ \beta=\infty}} = 0$$

ist, so erhalten wir schliesslich

$$r\psi = \frac{A}{\pi} \int_0^\infty dn \cdot n e^{-n^2\mu' t} J^1(nr)(C_n + D_n),$$

wenn

$$-\int_0^a d\beta \cos(n\beta) \, \beta^2 \int_0^{\pi/2} dy \cos y \cos\left(\frac{\beta\pi \cos y}{2a}\right) = C_n$$

und

$$-\int_a^\infty d\beta \cos(n\beta) \beta^2 \int_{\arccos \frac{a}{\beta}}^{\pi/2} dy \cos y \cos\left(\frac{\beta\pi \cos y}{2a}\right) = D_n$$

gesetzt wird. Für $r = \infty$ wird $r\psi = 0$, da J^1 für unendlich grosse Argumente verschwindet.

Wir haben uns in der Einleitung die Aufgabe gestellt, bei Betrachtung der Rotationsbewegung einer homogenen, tropfbaren Flüssigkeit drei Fälle in's Auge zu fassen. Den ersten derselben

haben wir im Vorhergehenden erledigt; die beiden andern wollen wir aber zum Gegenstand einer nächsten Mittheilung machen.

Es dürfte nicht unpassend sein, im Anschlusse an das Vorstehende die vollständige Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \qquad 1)$$

in welcher k und a beliebige Constante sein mögen, durchzuführen.

Wir betrachten zu dem Ende zunächst die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{a}{r}\frac{du}{dr} - q^2u = 0. \qquad 2)$$

q bedeute eine Constante. Das Integral derselben hat die Form:[1]

Für $0<a<2$

$$u = C_1 \int_0^\pi e^{qr\cos\theta}(\sin\theta)^{a-1}d\theta + C_2 r^{1-a}\int_0^\pi e^{qr\cos\theta}(\sin\theta)^{1-a}d\theta,$$

speciell für $a = 1$ $u = \int_0^\pi e^{qr\cos\theta}[C_1 + C_2\log(r\sin^2\theta)]d\theta,$

„ $a = 0$ $u = C_1 e^{qr} + C_2 e^{-qr},$

„ $a = 2$ $u = r^{-1}(C_1 e^{qr} + C_2 e^{-qr});$

für $a<0$, wenn wir $a = a' - 2n$ setzen und unter n eine positive ganze Zahl von der Beschaffenheit verstehen, dass a' zwischen den Grenzen 0 und 2 liegt,

$$u = C_1\left(r\frac{d}{dr} + a' - 1\right)\left(r\frac{d}{dr} + a' - 3\right)\ldots$$

$$\left(r\frac{d}{dr} + a' - 2n + 1\right)\int_0^\pi e^{qr\cos\theta}(\sin\theta)^{a'-1}d\theta +$$

$$+ C_2 r^{1-a}\int_0^\pi e^{qr\cos\theta}(\sin\theta)^{1-a}d\theta;$$

---

[1] Vergl. Boole, Differential Equations, p. 468. sqq.

speciell für $a = -2n$, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet

$$u = \left(r\frac{d}{dr} - 1\right)\left(r\frac{d}{dr} - 3\right)\ldots\left(r\frac{d}{dr} - 2n + 1\right)(C_1 e^{qr} + C_2 e^{-qr})$$

und für $a = -2n+1$

$$u = r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr} - 2\right)\ldots\left(r\frac{d}{dr} + 2 - 2n\right)\int_0^\pi e^{qr\cos\vartheta}$$

$$[C_1 + C_2 \log(r\sin^2\vartheta)]d\vartheta;$$

für $a > 2$, wenn wir $2 - a = a' - 2n$ setzen und unter n wieder eine positive ganze Zahl von der Beschaffenheit verstehen, dass a' zwischen den Grenzen 0 und 2 liegt,

$$u = C_1\int_0^\pi e^{qr\cos\vartheta}(\sin\vartheta)^{a-1}d\vartheta$$

$$+ C_2 r^{1-a}\left(r\frac{d}{dr} + a' - 1\right)\ldots\left(r\frac{d}{dr} + a' - 2n + 1\right)$$

$$\int_0^\pi e^{qr\cos\vartheta}(\sin\vartheta)^{a'-1}d\vartheta;$$

speciell für $a = 2n+2$, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$u = r^{1-a}\left(r\frac{d}{dr} - 1\right)\left(r\frac{d}{dr} - 3\right)\ldots\left(r\frac{d}{dr} - 2n + 1\right)(C_1 e^{qr} + C_2 e^{-qr})$$

und für $a = 2n+1$

$$u = r^{2-a}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr} - 2\right)\ldots\left(r\frac{d}{dr} + 2 - 2n\right)\int_0^\pi e^{qr\cos\vartheta}$$

$$[C_1 + C_2 \log(r\sin^2\vartheta)]d\vartheta.$$

Um nun zur Gleichung 1) überzugehen, setzen wir

$$\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t} = q^2$$

und für die willkürlichen Constanten C_1 und C_2 überall willkürliche Functionen von t, und zwar $\Psi_1(t)$ und $\Psi_2(t)$. Was bedeutet aber dann der Ausdruck

$$e^{\frac{r\cos\vartheta}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}}}\Psi(t),$$

der in allen Gleichungen auftritt?

Um denselben zu deuten, entwickeln wir uns die willkürliche Function in eine Reihe von der Form

$$A_1 e^{m_1 t} + A_2 e^{m_2 t} + A_3 e^{m_3 t} + \ldots \text{etc.}$$

Dadurch nimmt jener Ausdruck die Gestalt

$$e^{\frac{r\cos\vartheta}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}}}\sum Ae^{mt}$$

oder

$$\sum Ae^{\frac{r\cos\vartheta}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}}}e^{mt}$$

an. Bedeutet nun μ eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl, so findet stets die Beziehung

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{\mu} e^{mt} = m^{\mu} e^{mt}$$

statt.[1] Unser Integral erhält dadurch die Form

$$\sum Ae^{\frac{r\cos\vartheta}{\sqrt{k}}\sqrt{m}}e^{mt}$$

oder

$$\sqrt{\pi}\sum Be^{r\cos\vartheta\sqrt{\frac{m}{k}}+mt},$$

wenn wir

$$A_n = \sqrt{\pi}\, B_n$$

---

[1] Vergl. Liouville, a. a. O.

setzen. Ersetzen wir nun den Factor $\sqrt{\pi}$ durch das bestimmte Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

so ergibt sich

$$\sum Be^{r\cos\theta\sqrt{\frac{m}{k}}+mt}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha$$

oder, wenn wir für α eine neue Variable β mittelst der Beziehung

$$\alpha = \beta - \sqrt{mt}$$

einführen,

$$\sum Be^{r\cos\theta\sqrt{\frac{m}{k}}+mt}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta-\sqrt{mt})^2} d\beta$$

oder

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\sum Be^{\sqrt{\frac{m}{k}}(r\cos\theta+2\beta\sqrt{kt})} d\beta$$

oder

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi(r\cos\theta+2\beta\sqrt{kt})d\beta,$$

wo Ψ eine willkürliche Function bedeutet. Wenn wir noch berücksichtigen, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi(r\cos\theta-2\beta\sqrt{kt})d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi(r\cos\theta+2\beta\sqrt{kt})d\beta$$

ist, so ergibt sich für die Differentialgleichung 1) das vollständige Integral in folgender Form:

Für $0<a<2$

$$u = \int_0^{\pi} d\vartheta(\sin\vartheta)^{a-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi_1(r\cos\theta+2\beta\sqrt{kt})d\beta$$

$$+r^{1-a}\int_0^{\pi} d\theta\,(\sin\theta)^{1-a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi_2(r\cos\theta+2\beta\sqrt{kt})\,d\beta;$$

speciell für $a=1$

$$u=\int_0^{\pi} d\theta\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi_1(r\cos\theta+2\beta\sqrt{kt})\,d\beta$$

$$+\int_0^{\pi} d\theta\,\log(r\sin^2\theta)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi_2(r\cos\theta+2\beta\sqrt{kt})\,d\beta,$$

für $a=0$

$$u=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi(r+2\beta\sqrt{kt})\,d\beta,$$

für $a=2$

$$u=r^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi(r+2\beta\sqrt{kt})\,d\beta;$$

für $a<0$

$$u=\left(r\frac{\partial}{\partial r}+a'-1\right)\ldots\left(r\frac{\partial}{\partial r}+a'-2n+1\right)\int_0^{\pi} d\theta(\sin\theta)^{a'-1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi_1(r\cos\theta+2\beta\sqrt{kt})\,d\beta$$

$$+r^{1-a}\int_0^{\pi} d\theta\,(\sin\theta)^{1-a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi_2(r\cos\theta+2\beta\sqrt{kt})\,d\beta,$$

wenn a' und n die oben bei demselben Falle erwähnten Eigenschaften besitzen;

für $a=-2n$:

$$u=\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}-3\right)\ldots\left(r\frac{\partial}{\partial r}-2n+1\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi(r+2\beta\sqrt{kt})\,d\beta;$$

für $a=-2n+1$:

$$u = r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-2\right)..\left(r\frac{\partial}{\partial r}+2-2n\right)\left\{\int_{\sigma}^{\pi} d\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi_1(r\cos\vartheta+\right.$$

$$\left.+2\beta\sqrt{kt})\,d\beta+\int_{\sigma}^{\pi} d\vartheta\log(r\sin^2\vartheta)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi_2(r\cos\vartheta+2\beta\sqrt{kt})d\beta\right\};$$

für $a>2$, wenn a' und n wieder dieselbe Bedeutung wie oben besitzen:

$$u = \int_{\sigma}^{\pi} d\vartheta\,(\sin)^{a-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi_1(r\cos\vartheta+2\beta\sqrt{kt})d\beta+r^{1-a}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+\right.$$

$$\left.+a'-1\right)..\left(r\frac{\partial}{\partial r}+a'-2n+1\right)\int_{\sigma}^{\pi} d\vartheta\,(\sin\vartheta)^{a-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi_2(r\cos\vartheta$$

$$+2\beta\sqrt{kt})\,d\beta;$$

für $a=2n+2$:

$$u = r^{1-a}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}-3\right)..\left(r\frac{\partial}{\partial r}-2n+1\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi(r+$$

$$+2\beta\sqrt{kt})\,d\beta;$$

Für $a=2n+1$:

$$u = r^{2-a}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-2\right)..\left(r\frac{\partial}{\partial r}+2-2n\right)\left\{\int_{0}^{\pi} d\theta\right.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi_1(r\cos\theta+2\beta\sqrt{kt})d\beta+\int_{0}^{\pi} d\theta\log(r\sin^2\theta)$$

$$\left.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\Psi_2(r\cos\theta+2\beta\sqrt{kt})\,d\beta\right\}.$$

Die Integration der partiellen Differentialgleichung 1) erscheint somit für alle Fälle durchgeführt.

Über das Fliessen einer incompressiblen Flüssigkeit durch Röhren kreisförmigen Querschnittes von beliebiger Gestalt und beliebiger Lage.

Von Dr. O. Tumlirz.

(Mit 3 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. December 1881.)

I. Die Integration der hydrodynamischen Differentialgleichungen bezog sich bisher, was das Fliessen durch Röhren anbelangt, ausschliesslich auf den Fall gerader cylindrischer Röhren, und auch das Experiment hatte sich im Allgemeinen bloss mit diesen Fragen beschäftigt. Die Untersuchung der Flüssigkeitsbewegung in Röhren kreisförmigen Querschnittes von beliebiger Gestalt und beliebiger Lage dürfte somit eine nicht uninteressante Ergänzung bilden, zumal es meine Aufgabe sein soll, diesen allgemeinen Fall auf jenen speciellen, einfacheren zurückzuführen, allerdings unter gewissen beschränkenden Bedingungen.

Wir betrachten zu dem Ende eine Röhre, deren Querschnitt allenthalben ein Kreis von demselben Radius ist, und deren Achsencurve Krümmungsradien besitzt, die überall gegen den Halbmesser ziemlich gross sind. Ist noch ausserdem der Radius selbst hinreichend klein, so ist die Annahme, dass bei nicht allzu grossem Druck die Bahn eines Flüssigkeitstheilchens stets der Achsencurve parallel ist, mithin die Bewegung in den einzelnen Rohrelementen gerade so vor sich geht, wie in gleich weiten, geraden, cylindrischen Röhren, deren Achsen gegen den Horizont dieselbe Neigung haben, wie die Tangenten der Achsencurve an jenen Stellen, immer gestattet.

II. Es sei (Fig. 1 und 2):

z_1 die verticale Senkung des Punktes B in Bezug auf den Punkt A;

a der Radius des kreisförmigen Querschnittes;

w die Geschwindigkeit parallel zur Achse;

α der Neigungswinkel der Tangente in einem Punkte der Achsencurve gegen die Horizontale;

s die Bogenlänge der Achsencurve, von A aus gerechnet;

n die Normale in der durch die Tangente gelegten Verticalebene;

r der Abstand eines Theilchens von der Achse;

p der Druck;

ρ die Dichtigkeit;

g die Beschleunigung der Schwere;

t die Zeit und

μ der Reibungscoëfficient.

Fig. 1.

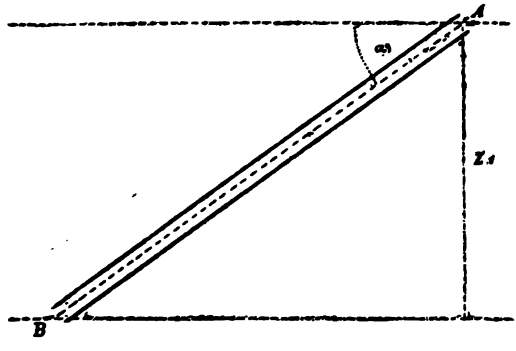
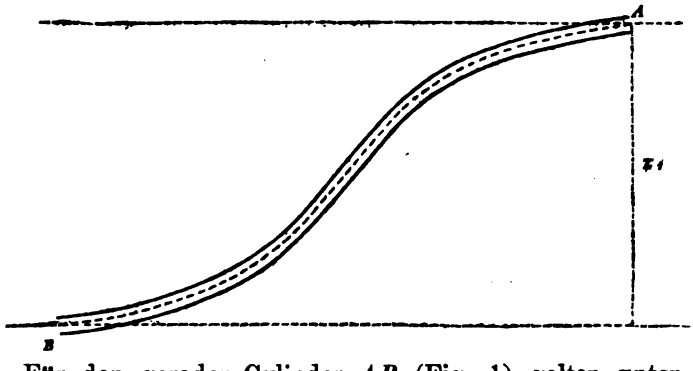


Fig. 2.



Für den geraden Cylinder AB (Fig. 1) gelten unter der Voraussetzung, dass die Geschwindigkeit senkrecht zur Achse $= 0$ ist, die Differentialgleichungen:

$$\rho\left(\frac{dw}{dt}+w\frac{dw}{ds}\right)=g\rho\sin\alpha-\frac{dp}{ds}+\mu\left(\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) .1)$$

$$0=g\rho\cos\alpha-\frac{dp}{dn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

$$\frac{dw}{ds}=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3)$$

Fügen wir die Beschränkung hinzu, dass α sehr klein ist, so können wir p in allen Punkten desselben Querschnittes von gleicher Grösse voraussetzen und somit von der Gleichung 2) absehen. Auf diese Weise bleibt von den Gleichungen 1), 2) und 3) nur übrig:

$$\rho\frac{dw}{dt}=g\rho\sin\alpha-\frac{dp}{ds}+\mu\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) \ldots\ldots 4)$$

Ist die Strömung stationär, so nimmt diese Gleichung die Gestalt

$$\frac{dp}{ds}-g\rho\sin\alpha=\mu\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) \ldots\ldots\ldots 5)$$

an. Ändert der gerade Cylinder seine Neigung α, so ändert sich in 4) und 5) blos das Glied $g\rho\sin\alpha$. Betrachten wir nun die gebogene Röhre AB in Fig. 2, so können wir sie stets, wenn sie nirgends allzu stark gebogen ist, mag die Achse, welche Curve immer sein, aus geraden cylindrischen Stücken von sehr kleiner Länge und sich continuirlich ändernden α zusammengesetzt ansehen. Sind ausserdem die Bedingungen der Aufgabe dieselben wie oben, so erfahren die Gleichungen 4) und 5) nur insofern eine Änderung, als jetzt $\sin\alpha$ eine Function von s wird, oder

$$\frac{dp}{ds}=g\rho\varphi(s)+\mu\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) \ldots\ldots\ldots 6)$$

ist. Zu Folge 3) und der Eigenschaft von $p\left(\frac{dp}{dr}=0\right)$ wird dann

$$\frac{dp}{ds}=g\rho\varphi(s)+R$$

oder

$$p = g\rho \int \varphi(s)\,ds + Rs + S, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7)$$

wo R und S constante Grössen bezeichnen.

In A $(s = 0)$ sei nun $p = p_0$, in B $(s = s_1)$ $p = p_1$. Alsdann ergibt sich:

$$R = -\frac{p_0 - p_1 + g\varphi \int_0^{s_1} \varphi(s)\,ds}{s_1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 8)$$

$$S = p_0 - g\varphi \int_0^{s_1} \varphi(s)\,ds. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 9)$$

Die Geschwindigkeit w erhält dadurch den Werth:

$$w = \frac{R}{4\mu}(r^2 - a^2) - \frac{Ra}{2M}$$

oder

$$w = \left\{\frac{a^2 - r^2}{4\mu} + \frac{a}{2M}\right\} \cdot \frac{p_0 - p_1 + g\varphi \int_0^{s_1} \varphi(s)\,ds}{s_1}, \quad \ldots\ldots 10)$$

wo M den Coëfficienten der äusseren Reibung bezeichnet, und die Ausflussmenge V den Werth:

$$V = \left\{\frac{a}{4\mu} - \frac{1}{M}\right\} \frac{p_0 - p_1 + g\varphi \int_0^{s_1} \varphi(s)\,ds}{2s_1} \pi a. \quad \ldots\ldots 11)$$

Nun ist

$$\varphi(s)\,ds = ds \sin\alpha = dz;$$

daher

$$\int_0^{s_1} \varphi(s)\,ds = z_1$$

und

$$w = \left\{\frac{a^2 - r^2}{4\mu} + \frac{a}{2M}\right\} \frac{p_0 - p_1 + g\rho z_1}{s_1} \quad \ldots\ldots\ldots 10a)$$

$$V = \left\{\frac{a^3}{4\mu} - \frac{1}{M}\right\} \frac{p_0 - p_1 + g\rho z_1}{2s_1} \pi a. \quad \ldots\ldots 11a)$$

III. Aus den zwei letzten Gleichungen folgt unmittelbar:

a) Die Geschwindigkeit w und die Ausflussmenge V haben in diesem Falle dieselben Werthe, als wenn die Röhre ein horizontal verlaufender, gerader Cylinder von demselben Radius a und derselben Länge s_1 wäre, und die Differenz der an beiden Enden wirkenden Druckkräfte den Werth $p_0 - p_1 + g\rho z_1$ hätte, oder als wenn die Röhre ein gegen die Horizontale so geneigter gerader Cylinder von demselben Radius a und derselben Länge s_1 wäre, dass seine Verticalprojection die Grösse z_1 hätte und die an seinen Enden A, B wirkenden Druckkräfte die Werthe p_0, beziehungsweise p_1 hätten.

b) Unter allen Röhren von gleichem kreisförmigen Querschnitte, die zwei beliebig gelegene Punkte A und B, in denen constante Druckkräfte p_0 und p_1 wirken, verbinden, liefert der gerade Cylinder die grösste Ausflussmenge.

IV. Setzt man zur Untersuchung dieser Gesetze eine Röhre da ein Reservoir an, in dem das Niveau auf constanter Höhe erhalten wird, etwa an eine Mariotte'sche Flasche, so sieht man, dass der Druck p_0 von dem Druck, der im Reservoir an der Einflussöffnung herrscht, verschieden ist, und zwar um so mehr, je grösser die Ausflussgeschwindigkeit ist.

Die Beziehung zwischen der mittleren Ausflussgeschwindigkeit und der Druckhöhe im Reservoir hat F. Neumann für gerade, horizontale, cylindrische Röhren mittelst des Princips der lebendigen Kraft aufgestellt. Wir wollen im Folgenden diese Untersuchung auch auf unseren Fall ausdehnen.

Es sei (Fig. 3):

m die in einem Zeitelement durch den Querschnitt D fliessende Masse;

T ihre lebende Kraft;

T_0 die lebendige Kraft der durch AA während dt tretenden Masse;

Q, w_0 der Querschnitt, beziehungsweise die Geschwindigkeit in AA;

s die auf der Achse gemessene Bogenlänge CD;

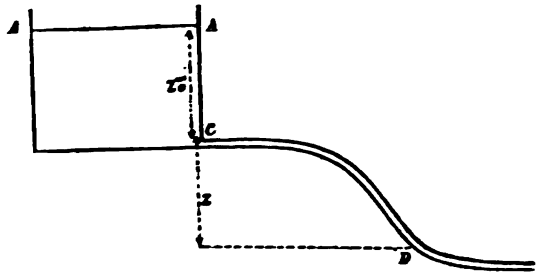
J die innere Arbeit der Reibung beim Fortrücken der zwischen C und D liegenden Flüssigkeit während dt, also gleich $2\pi\mu\, dt\, s \int_0^a \frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) w\, dr$;

P der Druck der Atmosphäre;

$P+p_0$, $P+p$ die Druckkräfte in C beziehungsweise in D;

z_0, z_0+z die verticalen Abstände der Schwerpunkte der Querschnitte C, D vom Niveau AA.

Fig. 3.



Für m erhalten wir die Gleichungen:

$$m = 2\pi\rho\, dt \int_0^a w r\, dr = Q w_0 \rho\, dt$$

und bezüglich des Zuwachses der lebendigen Kraft der zwischen AA und D befindlichen Flüssigkeit während dt die Beziehung

$$T - T_0 = mg(z_0+z) + J + \frac{P-(P+p)}{\rho}\, m \quad \ldots\ldots 12)$$

oder, wenn wir $T_0 = 0$ setzen,

$$T = mg(z_0+z) + J - \frac{pm}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots 12a)$$

Für die zwischen C und D befindliche Flüssigkeit gilt aber nach demselben Princip

$$0 = mg\,z + J + \frac{p_0 - p}{\rho} m; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 13)$$

somit ist

$$T = mg\,z_0 - \frac{p_0 m}{\rho}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 14)$$

Führen wir nun die mittlere Ausflussgeschwindigkeit c vermittelst der Beziehung

$$V = \pi a^2 c$$

ein, so erhalten wir für p_0 und T die Ausdrücke:

$$p_0 = \frac{8\mu c s_1 - a^2 g \rho z_1}{a^2}$$

$$T = c^2 m,$$

vorausgesetzt, dass $M = \infty$ ist. Substituiren wir diese Werthe in die Gleichung 14), so ergibt sich die gesuchte Beziehung

$$c^2 = g(z_0 + z_1) - \frac{8\mu c s_1}{a^2 \rho} \quad \ldots\ldots\ldots 15)$$

Eine Vergleichung dieser Gleichung mit der von F. Neumann für horizontale, gerade, cylindrische Röhren gefundenen führt ebenfalls zu den bereits sub III ausgesprochenen Gesetzen. Ferner folgt auch aus dieser Gleichung, dass die Geschwindigkeit c desto grösser ist, je kleiner s ist; denn es ist

$$\frac{dc}{ds_1} = -\frac{8\mu c}{2\rho a^2 c + 8\mu s_1}.$$ [1]

V. Die experimentelle Untersuchung der vorstehenden Gesetze ergab als Resultat, dass in der That bei Betrachtung der

---

[1] Wollte man die Gleichung 15) auch auf den speciellen Fall, dass gar keine Reibung stattfindet, anwenden, so darf man μ nicht ohne Weiteres gleich Null setzen, sondern man muss hiebei beachten, dass dann für alle r $w = c$ also $T = \frac{1}{2} c^2 m$ ist, wonach aus 14) nach Substitution des Werthes p_0 folgt: $c^2 = 2g(z_0 + z_1)$.

Ausflussmenge als Function von z_0 und z_1 diese Grössen nicht allein vertauschbar sind, sondern vielmehr nur in der Summe z_0+z_1 auftreten.

Die Achse der Röhre bildete gewöhnlich eine ebene Curve. Variirte ich das eine Mal bei $z_0 = 0$ die Grösse z_1, das andere Mal bei $z_1 = 0$ (d. i. bei horizontaler Lage der Curvenebene) z_0, oder für einen bestimmten Werth der Summe z_0+z_1 beide Grössen gleichzeitig, so entsprach stets demselben Werthe der Summe z_0+z_1 auch dieselbe Ausflussmenge.

Jene Beziehung 15) weicht, wie schon hervorgehoben wurde, von der für horizontale, gerade, cylindrische Röhren gefundenen nur insofern ab, als die diesem Falle entsprechende Druckhöhe im Reservoir über der Einflussöffnung durch z_0+z_1 ersetzt ist. Es blieb daher als zweiter Punkt zu untersuchen übrig, inwiefern eine horizontale, gerade, cylindrische Röhre mit einer horizontal verlaufenden, gekrümmten Röhre unter sonst ganz gleichen Umständen übereinstimmt.

Bei meinen Versuchen verwendete ich Brunnenwasser und als Reservoir eine Mariotte'sche Flasche. Die Glasröhre wurde mittelst eines Korkstückes in der unteren Öffnung der Flasche befestigt und ihr unteres Ende mit einem Wachspfropfen leicht verschlossen, der im geeigneten Zeitmomente weggenommen wurde. Bei vielen Versuchen benützte ich auch dieselbe Methode wie Jacobson; ich band zwei Gefässe aneinander, liess zuerst das Wasser in das eine fliessen und schob im geeigneten Zeitpunkte das andere unter die Ausflussöffnung. Die Zeit des Fliessens betrug 100, 120 oder auch 150 Secunden und wurde mittelst eines genauen Chronometers bestimmt. Die Radien der Glasröhren wurden aus dem Gewicht der von ihnen fassbaren Wassermenge berechnet. Als Längeneinheit nahm ich das Centimeter und als Gewichtseinheit das Gramm. Die Temperatur T wurde nach dem Celsius'schen Thermometer abgelesen und die Ausflussmenge V (nach Gramm gemessen) auf 15° reducirt. Ich will diese educirte Ausflussmenge immer mit V' bezeichnen.

1. Versuch.

$a = 0{\cdot}082264$, $s_1 = 40$.

z_0	z_1	T	V	z_0	z_1	T	V
0	9	20·6	0·3916 0·3844 0·389 $V' = 0{\cdot}3333$	9	0	15	0 32 0·307 0·3083 $V'' = 0{\cdot}3118$
0	12	20·6	0·5 0·4958 0·5 $V' = 0{\cdot}4248$	12	0	19·2	0·445 0·4333 0·435 $V'' = 0{\cdot}3908$
0	15	20 6	0·605 0 61617 0·6033 $V' = 0{\cdot}5213$	15	0	18·8	0·55 0·555 0·557 $V'' = 0{\cdot}5$

2. Versuch.

$a = 0{\cdot}123$, $s_1 = 40$.

z_0	z_1	T	V	z_0	z_1	T	V
0	3	16·5	0·6555 0·6666 0·6666 $V' = 0{\cdot}638$	3	0	19·5	0·7155 0·66 0·66 $V'' = 0{\cdot}6065$
0	6	16·5	1·2 1·2 1·29 $V' = 1{\cdot}1503$	6	0	18·6	1.25 1·2 1·2 $V'' = 1{\cdot}1057$
0	9	16·4	1·622 1·589 1·6 $V' = 1{\cdot}5456$	9	0	16·2	1·54 1·53 1·534 $V'' = 1{\cdot}4883$
0	12	16·4	1·978 1·966 1·944 $V' = 1\ 893$	12	0	16·2	1·95 1·93 1·92 $V'' = 1{\cdot}874$
0	15	16·4	2·305 2·3 2·344 $V' = 2{\cdot}233$	15	0	15	2·24 2·248 2·22 $V'' = 2{\cdot}236$
0	18	18·4	2·755 2·778 2·744 $V' = 2{\cdot}520$	18	0	16·1	2·63 2 63 2·63 $V'' = 2{\cdot}556$

3. Versuch.

$a = 0{\cdot}123$, $s_1 = 40$.

z_0	z_1	T	V	z_0	z_1	T	V
2	9	15·3	1·7583 1·775 1·7625 $V' = 1{\cdot}7518$	5	6	14·2	1 689 1·689 1·722 $V' = 1{\cdot}7348$
2	12	15·3	2·1 2·1041 2·1208 $V' = 2{\cdot}0921$	5	9	14·4	2·0778 2·0667 2·0667 $V' = 2{\cdot}1022$
2	15	15·2	2·4625 2·45 2·4416 $V' = 2{\cdot}4389$	5	12	15·6	2·4278 2·45 2·4333 $V' = 2{\cdot}400$
2	18	14·8	2·8041 2·7875 2·7708 $V' = 2{\cdot}8015$	5	15	16	2·778 2·7791 2·7667 $V' = 2{\cdot}7079$

4. Versuch.

$a = 0{\cdot}1609$, $s_1 = 40$.

z_0	z_1	T	V	z_0	z_1	T	V
0	3	17	1·722 1.6944 1·7 $V' = 1{\cdot}618$	3	0	15	1·547 1·5844 1·636 $V' = 1{\cdot}589$
0	6	16·3	2·744 2·711 2·677 $V' = 2{\cdot}6211$	6	0	17·6	2·6667 2·6833 2·6667 $V' = 2{\cdot}4966$
0	9	16·6	3·455 3·444 3·488 $V' = 3{\cdot}323$	9	0	19	3·5278 3·5333 3·55 $V' = 3{\cdot}176$
0	12	16·7	4·311 4·311 4·244 $V' = 4{\cdot}1023$	12	0	19·2	4·333 4·333 4·3667 $V' = 3{\cdot}8994$
0	15	17	4·966 4·9 4·977 $V' = 4{\cdot}695$	15	0	20	5·0833 5·057 5·0667 $V' = 4{\cdot}421$
0	18	17	5·555 5·555 5·6 $V' = 5{\cdot}284$	18	0	19·5	5·7 5·6333 5·64 $V' = 5{\cdot}006$

5. Versuch.

$a = 0{\cdot}1609$, $s_1 = 40$.

z_0	z_1	T	V	z_0	z_1	T	V
2	6	17·5	3·225 3·25 3·1833 $V' = 3{\cdot}0134$	5	3	19·8	3·3 3·3 3·2933 $V' = 2{\cdot}8958$
2	9	17·5	3·9833 3·9833 3·95 $V' = 3{\cdot}7182$	5	6	20·3	4·1167 4·1333 4·1167 $V' = 3{\cdot}6062$
2	12	17·3	4·7125 4·6667 4·6583 $V' = 4{\cdot}40616$	5	9	20·2	4·8 4·84 4·85 $V' = 4{\cdot}227$
2	15	17·4	5·39167 5·38333 5·36666 $V' = 5{\cdot}05055$	5	12	19	5·4333 5·4 5·3666 $V' = 4{\cdot}85$
2	18	15·4	5·8666 5·8222 5·9 $V' = 5{\cdot}8029$	5	15	18·7	6·0333 6·025 6·04 $V' = 5{\cdot}5528$

Wie man sieht, stimmen die Werthe V', welche demselben Werthe der Summe $z_0 + z_1$ entsprechen, desto besser überein, je kleiner der Radius ist. Die Vernachlässigungen, die wir uns in der Rechnung erlaubt haben, sind eben von desto geringerem Einfluss, je kleiner der Radius ist, so dass jene Werthe von V' nur für sehr kleine Radien vollständig gleich werden.

Es bleibt nun noch die Frage zu beantworten übrig: Wie verhält sich eine horizontal verlaufende, gekrümmte Röhre zu einer horizontalen geraden Röhre unter sonst ganz gleichen Umständen? Hiebei ist zu berücksichtigen, dass bei einer geraden, cylindrischen Röhre, deren Radius hinreichend klein ist, die Bahn eines jeden Theilchens eine zur Achse parallele Gerade ist. Hat die gebogene Röhre eine starke Krümmung, und ist die Ausflussgeschwindigkeit eine ziemlich bedeutende, oder mit anderen Worten, ist an der Krümmung die Centrifugalbeschleunigung eine bedeutende, dann sind wir nicht mehr berechtigt, anzunehmen, dass die Bahn eines jeden Theilchens der Achse überall parallel ist.

Ausserdem ist dann die Reibung an dieser Stelle nicht mehr um die Achse herum gleich. Dies wird zur Folge haben, dass die Ausflussmengen der beiden verglichenen Röhren desto mehr differiren, je stärker die Röhre gebogen, je grösser ihr Radius, je grösser der Druck und je kleiner die Länge der Röhre ist.

Ich nahm bei meinen Versuchen eine gerade Glasröhre vom Radius $a = 0{\cdot}12438$ und von der Länge 40 und bestimmte die Ausflussmengen für den Fall, dass sie horizontal lag. Hierauf bog ich sie an zwei Stellen, und zwar etwas stärker als alle vorher betrachteten Röhren und bestimmte sodann die Ausflussmenge für $z_1 = 0$. Der Versuch ergab folgendes:

$a = 0{\cdot}12438$, $s_1 = 40$.

Gerade			Gebogen		
z_0	T	V	z_0	T	V
6	17·4	1·2 1·2083 1·205 $V' = 1{\cdot}1314$	6	15·4	1·01 1·00 1·01 $V' = 0{\cdot}9967$
12	17·2	2·03 2·05 2·034 $V' = 1{\cdot}923$	12	16·4	1·79 1·78 1·78 $V' = 1{\cdot}7203$
18	17	2·8333 2·82 2·82 $V' = 2{\cdot}6804$	18	16·8	2·46 2·46 2·46 $V' = 2{\cdot}337$

Die Ausflussmenge V hat im zweiten Fall durchgehends eine Verminderung erfahren.

Nun nahm ich eine Röhre vom Radius 0·12046 und von der Länge 75·5. Nachdem ich dieselbe zuerst als gerade verwendet hatte, bog ich sie an zwei Stellen mässig. Im Folgenden findet sich V auch für den Fall $z_0 = 0$ bestimmt.

$a = 0{\cdot}12046$, $s_1 = 75{\cdot}5$.

Gerade ($z_1 = 0$)			Gebogen ($z_1 = 0$)			Gebogen ($z_0 = 0$)		
z_0	T	V	z_0	T	V	z_1	T	V
6	17·5	0·51 0·5167 0·50 $V' = 0{\cdot}4769$	6	18·3	0·5222 0·53 0·53 $V' = 0{\cdot}4829$	6	18·2	0·55 0 55 0·555 $V' = 0{\cdot}5080$
12	16·7	1·04 1·03 1·03 $V' = 0{\cdot}9883$	12	16·6	1·01 1·005 1·01 $V' = 0{\cdot}9683$	12	17·8	1·05 1·05 1·05 $V' = 0{\cdot}974$
18	15·8	1·50 1·50 1·495 $V' = 1{\cdot}4683$	18	16·8	1·48 1·48 1·47 $V' = 1{\cdot}4097$	18	17·2	1·48 1·495 1·495 $V' = 1{\cdot}407$

Man sieht hieraus, dass zwischen den drei betrachteten Fällen in Folge der Verminderung der Geschwindigkeit durch die grössere Länge der Röhre eine vollständige Übereinstimmung stattfindet. Um noch den Einfluss des Radius zu untersuchen, nahm ich eine Glasröhre vom Radius 0·17953 und von der Länge 80 und bestimmte die Ausflussmenge in vier verschiedenen Fällen. Im dritten und vierten Falle war die Röhre an drei Stellen sehr mässig gebogen.

$a = 0{\cdot}17953$, $s_1 = 80$.

Gerade, horizontal			Gerade, geneigt $z_0 = 0$		
z_0	T	V	z_1	T	V
6	18·8	2·65 2·655 2·67 $V' = 2{\cdot}4013$	6	19·4	2·7333 2·7333 2·7333 $V' = 2{\cdot}4273$
12	19·2	4·6833 4·72 4·72 $V' = 4{\cdot}2018$	12	19·4	4·667 4·68 4·7 $V' = 4{\cdot}1562$
18	19	6·3167 6·2833 6·3167 $V' = 5{\cdot}6606$	18	19·4	6·3 6·2833 6·3167 $V' = 5{\cdot}59$

$a = 0{\cdot}17953$, $s_1 = 80$.

Gebogen $z_1 = 0$			Gebogen $z_0 = 0$		
z_0	T	V	z_1	T	V
6	17·8	2·42 2·415 2·405 $V' = 2{\cdot}2413$	6	18·2	2·38 2·42 2·38 $V' = 2{\cdot}1993$
12	17·7	4·13 4·125 4·15 $V' = 3{\cdot}846$	12	18·3	4·05 4·09 4·10 $V' = 3{\cdot}735$
18	17·7	5·55 5·4833 5·50 $V' = 5{\cdot}1291$	18	18·5	5·4833 5·5083 5·4667 $V' = 4{\cdot}9961$

Die Abweichungen zwischen den Ausflussmengen bei der geraden und gebogenen Röhre sind ziemlich bedeutend; der Radius ist also von grossem Einfluss. Fassen wir Alles zusammen, so sehen wir, dass jene theoretischen Betrachtungen in der Erfahrung ähnlich wie das Poiseuille'sche Gesetz nur innerhalb bestimmter Grenzen ihre Bestätigung finden, und zwar nur dann vollständig, wenn die Röhre sehr lang, sehr eng und mässig gekrümmt ist, und der Ausfluss unter einem nicht allzu hohen Druck erfolgt.

Versuche über Diffusion von Gasen.

I.

Von **A. v. Obermayer.**

(Mit 1 Tafel.)

Bei der Bestimmung der Abhängigkeit der Diffusionscoëfficienten der Gase von der Temperatur [1] fand ich für die absolute Grösse des Diffusionscoëfficienten Werthe, welche mehr von den durch Herrn Prof. Loschmidt [2] bestimmten abweichen, als dies zufolge der Versuchsfehler wahrscheinlich schien. Um möglicherweise die Ursache dieser Abweichung aufzufinden, habe ich die absoluten Werthe der Diffusionscoëfficienten nach einer zweiten Methode bestimmt. Diese Versuche haben nun allerdings nicht zur Erklärung der besagten Abweichung geführt, dagegen hat sich bei denselben eine Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten von der Diffusionszeit in der Art gezeigt, dass sehr kleinen Zeiten, kleinere Werthe den Diffusionscoëfficienten entsprechen, und dass diese Werthe sich mit wachsender Zeit rasch einem Grenzwerthe nähern. Weder die Versuche, welche ich im Nachfolgenden mittheilen werde, noch andere, die bisher nicht abgeschlossen sind, gestatten mit einiger Sicherheit auf die Ursache dieser Abweichung vom Diffusionsgesetze zu schliessen.

Die Methode, deren ich mich zu diesen Versuchen bediente, rührt von Stefan [3] her und wurde zu den Versuchen über Verdampfung im Wasserstoffgase benützt. Dieselbe besteht darin, dass über das oben offene Ende des Verdampfungsrohres ein

[1] Sitzb. Bd. LXXXI, S. 1102.

[2] Sitzb. Bd. LXII, S. 468.

[3] Versuche über Verdampfung. Sitzb. Bd. LXVII, 1873.

Gasstrom geschickt wurde, welcher allen Dampf mit sich fortführt und so die Diffusion des Dampfes in eine dampffreie Atmosphäre ermöglicht. In den Versuchen von Stefan wurden die Zeiten beobachtet, welche nöthig sind, damit aus verschiedenen Tiefen des Verdampfungsrohres gleiche Flüssigkeitsmengen verdampfen; der anfängliche Verlauf des Diffusionsvorganges kam hiebei gar nicht in Betracht.

Die Versuche über Gasdiffusion sind aber nur in der Weise ausführbar, dass der Diffusionsprocess von seinem Beginn an in Betracht gezogen wird. Um dies zu ermöglichen, habe ich einen Hahn construirt, welcher excentrisch, parallel den erzeugenden Geraden der Mantelfläche durchbohrt und gegen die Mantelfläche zum Theil durchbrochen ist. Ein Gasstrom kann sich unausgesetzt durch den Hahn bewegen; der Hahn selbst kann je nach seiner Stellung den luftdichten Abschluss der Diffusionsröhre oder das Darüberstreichen des Luftstromes vermitteln.

Dieser Hahn, welchen ich in Verbindung mit dem 13 Mm. weiten Diffusionscylinder als „Apparat II" bezeichnen will, wurde zu folgenden Versuchen benützt: Luft — Kohlensäure, Wasserstoff — Kohlensäure, Sauerstoff — Kohlensäure.

Während die mit dem Apparate I [1] erhaltenen Resultate durch die allerdings klein gehaltenen schädlichen Räume der verschiedenen Bohrungen beeinflusst sind, ist bei der Construction des Apparates II darauf Rücksicht genommen, dass sich alle schädlichen Räume durch Quecksilber ausfüllen lassen. Die Berechnungsart der Versuche I ist dagegen so beschaffen, dass in manchen Fällen der Einfluss der Verunreinigungen des Gases in der einen Hälfte des Apparates eliminirt wird. Um die nach der Methode II gefundenen Resultate von diesen Fehlern zu befreien, müssen die Verunreinigungen des Gases stets bekannt sein.

Bezüglich der Anwendbarkeit der Methode II ergeben die Versuche das Resultat, dass die Menge des Gases, welche über die obere Öffnung des Diffusionscylinders streicht, die Richtung, in welcher das Strömen im Hahne stattfindet und eine einseitige Verengung der Hahnbohrung ohne merkbaren Einfluss auf den Werth der Diffusionsconstanten sind. Es zeigt sich weiter, dass

[1] Sitzb. Bd. LXXXI. S. 1112.

für grosse Werthe der Diffusionszeiten der Einfluss der schädlichen Räume nahezu ausser Betracht kommt.

Bezüglich des Diffusionsvorganges selbst lassen die Versuche erkennen, dass die aus den kleinen Versuchszeiten entspringenden Werthe der Diffusionscoëfficienten der untersuchten Gascombinationen kleiner sind, als die aus den grossen Diffusionszeiten gewonnenen; ihre Grösse nähert sich mit wachsender Zeit rasch einem Grenzwerthe.

Die Abhängigkeit der Diffusionscoëfficienten Luft — Kohlensäure von der Zeit, ist aus folgender Zusammenstellung ersichtlich, welche in der ersten Zeile die Diffusionszeiten und darunter die, aus den Einzelnbeobachtungen entspringenden Werthe des Diffusionscoëfficienten, auf den Normalbarometerstand 76 Cm. und die Temperatur von Null Graden reducirt, in $\frac{\text{Meter}^2}{\text{Stunde}}$ enthält.

25 Min.	30 Min.	1 Stunde	2 Stunden	$2^1/_2$ u. 3 St.
0·046462	47193	47970	48351	49134
46879	46360	47660	48135	48679
46699	46856	47241	48639	48535
	47030	47273	48387	49235
	47100	47462	48057	48436
		48292	49080	
		48069	48819	
0·046680	46908	47710	48497	48804

Die Versuche Wasserstoff—Kohlensäure sind viel weniger zahlreich, lassen aber gleichfalls die Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten von der Zeit erkennen.

10 Min.	20 Min.	40 Min.
0·18274	18872	19165
18140		19292
		19322
		18877
		19123
0·18207	0·18872	0·19156

Die Versuche Sauerstoff—Kohlensäure geben

25 Minuten	2 Stunden
0·047597	0·048855

Sonderbarerweise wird der Diffusionscoëfficient Sauerstoff—Kohlensäure in zwei, bei verschiedenen Temperaturen angestellten Versuchsreihen entschieden grösser als jener Luft — Kohlensäure gefunden.

Der Apparat II.

Die Fig. 1, 2, 3 auf der beigefügten Tabelle stellen den Apparat, welcher zu den vorerwähnten Versuchen gedient hat, durch schematische Zeichnungen dar.

Der Diffusionscylinder ist zum grössten Theil aus einem rohen durchbohrten, aussen cylindrisch abgedrehten Gewehrlaufe aus Bessemerstahl gebildet. Die beiden Enden dieses Gewehrlaufes sind mit Schraubengewinden versehen und die Endflächen etwas konisch zugedreht. Das obere Ende ist in das Lager *DD* des Diffusionshahnes *C*, das untere Ende in einen mit einer Platte *GG* versehenen Fuss *F* geschraubt, welche sich zu dem Dreiweghahn H_3 verlängert. Die konischen Endflächen der Stahlröhre sind gegen die gleichfalls konischen Flächen im Hahnlager und Fuss luftdicht schliessend angepresst.

Das gusseiserne Hahnlager *DD* besteht aus einem Theil, welcher den Hahnkonus *C* umschliesst und zwei Kammern, zu beiden Seiten dieses Raumes. Die Kammer auf der Seite der kleineren Grundfläche des Hahnkonus ist durch eine Schraube *N* und eine Lederdichtung luftdicht abgeschlossen. Die andere Kammer ist durch eine Schraube *Q* gasdicht abgeschlossen, welche eine Stopfbüchse enthält, die sich luftdicht an die Achse des Hahnkonus *C* legt.

Die Stahlröhre ist in einen an das Hahnlager angegossenen Ansatz geschraubt; demselben steht ein gleicher Ansatz gegenüber, in welchen der Aufsatz *K* eingeschraubt ist. Beide Ansätze sind auf die Weite der Stahlröhre durchbohrt und mit dieser zusammen ausgeschmirgelt, so dass die Zusammenstossungsstelle von Stahl- und Gusseisen kaum wahrzunehmen ist.

Der Diffusionscylinder ist an seinem oberen Ende durch die konische Mantelfläche des Hahnlagers begrenzt. Die mittlere Länge des Rohres beträgt $L' = 0{\cdot}6498$ Meter. Dieselbe wurde mit Hilfe eines Messingrohres gemessen, dessen untere ebene Fläche auf dem vom Fuss F gebildeten Boden aufstand und welches mit geringem Spielraum in den Diffusionscylinder passt. Mit einer sehr schmalen und scharfen Schneide wurden Theile der Schnittlinie der Konusfläche mit dem Diffusionscylinder auf die Messingröhre verzeichnet und aus dem Abstande des höchsten Punktes, 650·0 Mm. und jenem des tiefsten Punktes, 649·7 Mm. vom unteren Ende des Messingrohres das Mittel genommen.

Der Durchmesser des Diffusionscylinders ist 13 Mm. und der aus mittlerer Länge und Durchmesser gerechnete Cubikinhalt 86·25 CC. — Die Länge L eines Rohres des Apparates I [1] beträgt 0·4331 Mtr.; dieselbe ist gleichfalls ein Mittelwerth und mit Hilfe desselben Messingrohres gemessen. Die scharfen Kanten des etwas zugedrehten Hahnes machen Marken, wenn das Messingrohr etwas gedreht wird.

Der gusseiserne Hahnkonus C, Fig. 1, 2 und 3, ist excentrisch, den erzeugenden Geraden der Mantelfläche parallel, durchbohrt. Wie aus Fig. 2 zu erkennen, ist die Durchbohrung gegen die Mantelfläche hin bis auf eine schmale Brücke a ausgemeisselt. Auf der kleineren Grundfläche des Hahnkonus erscheint daher die Durchbohrung als ein excentrischer Kreis. Die Brücke a sichert die genaue Führung des Hahnes in seinem Lager.

In Fig. 1 ist der Hahn in jener Stellung gezeichnet, welche er während der Diffussion einnimmt. Ein Gasstrom, welcher bei E_1 ein- und bei E_2 austritt, streicht dabei über die obere Öffnung des Diffusionscylinders. Die Zuleitung zu E_1 E_2 erfolgt durch angelöthete Bleiröhren. Aus Fig. 1 ist noch eine zweite Bohrung 2, 2 des Hahnkonus zu ersehen; dieselbe geht durch die Achse des Hahnes und ist ungefähr über der Mitte des Diffusionscylinders nach auswärts zur Mantelfläche geführt. Der Hahn H_1 gestattet diese Bohrung gegen aussen hin abzusperren.

Auf einen Vierkant der Achse des Konus C kann ein Schlüssel $U\,U$ aufgesetzt werden, welcher die Drehung des Hahnkonus

[1] Sitzb. Bd. LXXXI.

ermöglicht. Durch eine Drehung um 180° kommt die Bohrung 22 über die obere Öffnung des Diffusionscylinders zu stehen, und dieser ist in Verbindung in dem Gasauslass O_1; der Gasstrom E_1 E_2 dauert trotz dieser Drehung ununterbrochen fort.

An die Achse des Hahnes C ist ein Wulst M angegossen, gegen welchen die Schraube Q mit Hilfe einer Lederscheibe drückt und so den Hahnkonus in sein Lager presst.

Der Aufsatz k trägt in seinem unteren cylindrischen Ende den Hahn H_2; derselbe wird durch eine kleine, in sein unteres Ende passende, durchbohrte Schraube in seinem Lager festgehalten, und kann durch den Stiel und die Handhabe L gedreht werden. Der Hahn H_2 gestattet Quecksilber aus k in die Bohrung 22 eintreten zu lassen und hiemit das dieselbe erfüllende Gas zu verdrängen.

Der Fuss F ist nach seiner Achse durchbohrt 333. Der nach abwärts gerichtete Schnabel des Dreiweghahnes H_3 trägt einen Kautschukschlauch mit Hanfeinlage, der mit einem Quecksilbergefässe verbunden ist, welches gehoben und gesenkt werden kann. Um diesem Gefässe bestimmte Stellungen geben zu können, schnappt ein mit demselben verbundener Bügel in Zähne ein, welche an einer starken Feder angesetzt sind. An den horizontalen Schnabel O_3 des Dreiweghahnes ist ein Kautschukschlauch sammt Glasrohr angesetzt, durch welches das Gas eingeleitet werden kann.

Der ganze Apparat ist von einem zweitheiligen Kasten aus Kupferblech umschlossen, demselben, welcher zu den Versuchen zur Bestimmung der Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten der Gase von der Temperatur [1] gedient hatte. Der Boden dieses Kastens war neu angefertigt worden. Er bestand aus einer rechteckigen, nach abwärts gekehrten Wanne von Gusseisen, Fig. 1.

Die Messingflantschen, welche an die Wände des Kastens gelöthet sind, passen in das auf der oberen Fläche des Bodens durch die an den Rändern befindlichen Rippen gebildete Rechteck. Eine Lederdichtung und eine grosse Anzahl Schrauben vermitteln den dichten Abschluss.

[1] Sitzb. Bd. LXXXI, S. 1106.

Die Scheibe *G G* passt in eine, durch einen kreisförmigen Wulst abgegrenzte Vertiefung in der Mitte des Bodens. Eine dortselbst befindliche Durchbohrung gestattet den Dreiweghahn hindurchzuschieben. Die Scheibe *G G* wird gleichfalls durch eine ringförmige Lederscheibe und sechs Schrauben dicht angezogen.

Die nach abwärts reichenden Wände des Bodens enthalten zwei Durchbohrungen; durch die eine läuft der Kautschukschlauch von O_3; durch die andere der Schlüssel zur Bewegung des Hahnes H_3. Ohne hieran etwas rühren zu müssen, lässt sich an die Wände des Bodens ein Luftbad anbringen, falls der Kasten mit geschmolzenem Paraffin gefüllt werden sollte.

In den Boden des Apparates sind ferner zwei Heizröhren, von denen die eine in der Fig. 1 unter *K K* angedeutet ist und ein Hahn zum Ablassen des geschmolzenen Paraffins eingeschraubt.

Die Achse des Hahnkonus *C* tritt durch die Stopfbüchse S_2 in der Seitenwand des Kastens hindurch und kann von aussen gedreht werden. Auf der entgegengesetzten Wand ist ein Einguss für das Paraffin angebracht.

Die Versuche.

Der Gasstrom, welcher über das obere Ende des Diffusionscylinders streichen soll, wurde bei Wasserstoff direct aus dem Entwicklungsapparate durch den Hahn geführt und hatte nach seinem Austritte noch einen mit Chlorcalcium gefüllten Absorptionsthurm zu passiren. Die Waschflaschen des Entwicklungsapparates bedingen einen pulsirenden Gasstrom; sonderbarerweise ändert dies die Diffusionsconstante nur unwesentlich. So wurde bei einem sehr gleichmässig pulsirenden Strome in vier Versuchen $k_0 = 0{\cdot}19197$ gefunden. Als im dreiundvierzigsten Versuche ein Flüssigkeitstropfen in einem Verbindungsrohre den Gasstrom zu einem sehr unregelmässigen, heftigen Zucken veranlasste, war $k_0 = 0{\cdot}19585$, also blos um 2 % vergrössert.

Ein gleichmässiger Strom von atmosphärischer Luft oder Sauerstoff wurde mit Hilfe einer Mariotte'schen Flasche erhalten, deren Abfluss in eine tiefer stehende, tubulirte Flasche stattfand, in welcher das bezügliche Gas enthalten war. Die Mariotte-

sche Flasche fasste 15 Liter und war mit einer Theilung in 0·2 Liter versehen.

Das Glasrohr, durch welches die Luft in die Mariotte'sche Flasche eintritt, hatte eine Millimetertheilung; durch Einstellen verschiedener Striche dieser letzteren auf dem oberen Rand des Kautschuks konnte die ausströmende Flüssigkeitsmenge von 2—8 Liter per Stunde regulirt werden.

Der auf diesem Wege erhaltene Gasstrom hatte zwei Ludwig'sche Trockenapparate zu passiren, von denen der erste Stückchen von Ätzkali und Glasperlen, der letztere mit concentrirter Schwefelsäure befeuchtete Glasperlen enthielt. Vor dem Eintritt in das Bleirohr, welches zur Kammer des Hahnlagers führt, ist ein Schwefelsäure-Manometer angebracht. Der Widerstand in den Bleiröhren und Kautschukschläuchen, die noch folgen, ist trotz ihres grossen Querschnittes hinreichend, um an demselben einen Ausschlag von einigen Zehntelmillimetern zu verursachen. Das Zucken des Luftstromes ist am Schwefelsäure-Manometer zu erkennen; es wird während der Versuche möglichst vermieden.

Die Richtung, in welcher der Gasstrom durch den Hahn tritt, ist ohne Einfluss auf die Grösse der Diffusionsconstanten. In der Regel findet das Strömen von der kleineren zur grösseren Fläche des Hahnkonus C statt.

Der Diffusionscylinder wird durch einen entsprechend lang unterhaltenen Gasstrom aus dem Entwicklungsapparate mit Gas gefüllt. Der bei O_1 austretende Gasstrom hat noch einen Kautschukschlauch mit angesetztem engen Glasröhrchen, ein Chlorcalciumrohr zu passiren und tritt schliesslich durch einen Kautschukschlauch und ein Glasröhrchen unter Wasser aus.

Um das Gas in dem Diffusionscylinder abzuschliessen, wird der Hahn H_3 in die Stellung H'_3 gebracht und durch Heben des, mit T verbundenen Quecksilbergefässes, die Hahnbohrung und der Schlauch O_3 mit Quecksilber gefüllt. Das Einschnappen eines mit dem Gefässe verbundenen Bügels in den Hahn einer Feder bestimmt die Stellung des Gefässes. Sodann wird der Hahn in die Stellung H''_3 gebracht und das Quecksilbergefäss noch weitergehoben, bis dessen Bügel zum zweitenmale einschnappt. Hiebei wird das Gas aus der Bohrung 33 verdrängt und es treten 5—6

Blasen aus dem mit O_1 verbundenen, in Wasser tauchenden Röhrchen aus. Schliesslich wird der Hahn in die Stellung H_3, Fig. 1, gebracht, die Glasröhre aus dem Wasser gezogen, der capillare Faden entfernt und der Hahn H_1 geschlossen.

Der Apparat bleibt nunmehr sich selbst überlassen. Nach zehn Minuten wird der Gasstrom durch den Diffusionshahn eingeleitet und nach fünfzehn Minuten der Versuch begonnen. Hiezu wird der Hahn zuerst um 90° gedreht und dann zum Beginne des Versuches in dem Momente weitergedreht, als der Secundenzeiger einer Uhr durch Null geht. An einer Marke wird die richtige Stellung des Hahnes erkannt. Es sind zum Einstellen des Hahnes 4—8 Sec. erforderlich.

Vor Beendigung des Versuches wird das im Aufsatze K enthaltene Quecksilber durch den Hahn H_2 in die Bohrung 22 und das mit O_1 durch einen Kautschukschlauch verbundene Glasröhrchen, welches zum Einleiten des Gases in die Auffanggefässe dient, eintreten gelassen und das darin befindliche Gas verdrängt.

Zum Abschluss des Versuches wird der Hahn C um 180° gedreht und das Ende der Beobachtungszeit vom Beginne des Drehens gerechnet. Der mögliche Fehler in der Zeitbestimmung kann nur wenige Secunden betragen und beeinflusst kaum das Versuchsresultat.

Der Wasserstand in der Mariotte'schen Flasche, das Barometer, die Temperatur des Apparates und des Zimmers werden vor Beginn und nach Abschluss jedes Versuches abgelesen. Die Differenz aus den Wasserständen gibt die Gasmenge, welche durch den Diffusionshahn strömte. Aus den übrigen Ablesungen wurden die Mittel genommen.

Das Entleeren des Apparates geschieht durch Heben des mit T verbundenen Quecksilbergefässes. Ist das an O_1 angesetzte Glasrohr hinreichend enge, so verdrängt das Quecksilber alles Gas aus dem Apparate und dem angesetzten Rohre; es wird von einem Auffanggefässe von derselben Form aufgenommen, wie ich daselbe in der früher citirten Abhandlung zeichnete.

Zur Bestimmung der Temperatur diente ein auf Glas getheiltes Thermometer, welches mit dem Normalthermometer des physikalischen Cabinetes in einem grossen, mit Wasser gefüllten,

heizbaren, durch Spiegelglasplatten abgeschlossenen Kasten verglichen worden war.

Das Normalthermometer ist aus französischem Glase gefertigt und zeigt eine auffallend kleine Veränderlichkeit des Nullpunktes bei aufeinanderfolgenden Eis- und Siedepunktbestimmungen.

Das Thermometer, welches zu den Versuchen über die Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur gedient hatte, erwies sich in sehr befriedigender Übereinstimmung mit dem vorerwähnten Normalthermometer. Es hatte eine, in ein weiteres Glassrohr eingeschmolzene Milchglasscale. Der obere Theil des weiteren Glasrohres war gebrochen und die Scale zum Theil verwischt worden, das Thermometerrohr jedoch unverletzt geblieben. Es wurde zur Bestimmung der niederen Temperaturen bei den Versuchen über die Abhängigkeit der Diffusionscoëfficienten von der Temperatur benützt. Seither ist es jedoch gebrochen. Die jetzigen Temperatursangaben sind trotz der Anwendung eines anderen Thermometers mit den früheren in sehr befriedigender Übereinstimmung.

Berechnung der Versuche.

Für die Dichte ρ in einem, aus zwei Röhren zusammengesetzten Diffusionsapparate gilt die Formel:

$$\rho = \frac{a}{2} \pm \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} e^{-kt\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2} \cos \frac{n\pi x}{2L},$$

worin l die Länge des einen Diffusionsrohres, a die anfängliche Dichte des Gases bezeichnet.

Wird in dieser Formel für $2L$ die doppelte Länge $= 2L'$ des Diffusionscylinders des Apparates II; ferner statt $\frac{a}{2}$, a gesetzt und schliesslich a von dem Ausdrucke abgezogen, so erhält man die Dichtenvertheilung im vorliegenden Apparate:

$$\rho = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} e^{-kt\left(\frac{n\pi}{2L'}\right)^2} \cos \frac{n\pi x}{2L'}$$

und damit die Menge des in der unteren Hälfte nach der Zeit t noch zurückgebliebenen Gases in Procenten des Volumens:

$$Q = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} e^{-kt\left(\frac{n\pi}{2L'}\right)^2}.$$

Die in der ersten Abhandlung gegebene Tabelle, S. 1113, kann, wie schon dort bemerkt, auch zur Berechnung dieser Versuche verwendet werden; sie gibt aber nicht den Werth von kt direct, sondern $kt\left(\frac{L'}{L}\right)^2$. Von dem Logarithmus des Werthes von kt der Tabelle ist somit $\log\left(\frac{L'}{L}\right)^2 = 0{\cdot}64762-1$ abzuziehen, um die dem vorliegenden Apparate entsprechenden Werthe zu erhalten.

Da in den folgenden Versuchen auch sehr kleine Diffusionszeiten vorkommen, so gebe ich eine Tabelle zur Berechnung dieser Versuche (s. p. 158); dieselbe dürfte sich auch für die noch weiter vor mir zu veröffentlichen Versuche nützlich erweisen.

Für die Werthe von 0·007 bis 0·008 ist auch das Glied $\frac{8}{\pi^2}\frac{1}{49} e^{-49kt\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}$ berücksichtigt. Für noch kleinere Werthe von kt müssten auch noch andere Glieder der Reihe in Rechnung gezogen werden.

In der folgenden Zusammenstellung der Versuchsresultate sind angeführt:

Die Nummer des Versuches. Versuche, bei denen die Analysen Werthe geben, welche um 1% von einander abweichen, sind ausgeschieden.

Das Datum des Versuchstages.

Die Diffusionszeit.

Die Gasmenge, welche in der Stunde über die obere Öffnung des Diffusionscylinders streicht.

Das Mittel der auf Null Grade reducirten Barometerstände, zu Anfang und Ende des Versuches.

Das Mittel der Temperaturen in Graden Celsius, zu Anfang und Ende des Versuches, auf das vorerwähnte Normalthermometer bezogen.

Die Gasanalysen und deren Mittelwerthe.

$kt =$	0·007	0·008	0·009	0·010	0·011
0	781845	766882	752785	739438	726735
1	780308	765428	751418	738141	725496
2	778781	763991	750060	736849	724263
3	777263	762563	748708	735564	723036
4	775751	761142	747364	734286	721814
5	774249	759729	746024	733011	720597
6	772758	758325	744695	731744	719385
7	771275	756928	743371	730485	718179
8	769803	755540	742054	729229	716978
9	768339	754159	740743	727979	715783

$kt =$	0·012	0·013	0·014	0·015	0·016
0	714591	702940	691729	680910	670446
1	713405	701407	690630	679848	669418
2	712224	700661	689535	678787	668393
3	711047	699533	688444	677736	667369
4	709876	698405	687357	676684	666323
5	708708	697285	686271	675635	665036
6	707546	696163	685194	674590	664324
7	706387	695048	684117	673550	663314
8	705234	663938	683044	672511	662308
9	704084	692832	681975	671477	661305

Daneben rechts:

Der Werth von kt, welcher der gefundenen Gasmenge, nach der Tabelle, Sitzb. Bd. LXXXI, S. 1113 entspricht.

Der Werth von k, welcher aus kt durch Division mit t und $\left(\frac{L}{L'}\right)^2$ erhalten wird.

Der Werth k_{76}, d. i. k auf den Normalbarometerstand reducirt.

Der Werth k_0, d. i. k auf den Normalbarometerstand und 0°C. reducirt. Bei dieser letzten Reduction ist vorausgesetzt, dass die Diffusionscoëfficienten Luft — Kohlensäure, Sauerstoff — Kohlensäure der Potenz 2; Wasserstoff — Kohlensäure der Potenz $1^3/_4$ der absoluten Temperatur proportional seien.

Kohlensäure — Luft.

Die Kohlensäure wurde zu diesen Versuchen aus Marmor mit verdünnter Salzsäure entwickelt, durch eine Lösung von kohlensaurem Natron gewaschen und durch concentrirte, auf Glasperlen geträufelte Schwefelsäure getrocknet. Man erhält auf diesem Wege die Kohlensäure nie vollkommen rein, sondern stets mit einer Spur eines durch Kalilauge nicht absorbirbaren Gases versetzt. Sobald die in einer Gaseprouvette aufgefangene Kohlensäure, nach Absorption durch Kalilauge, ein Bläschen, kleiner als 7 Mm. Durchmesser gab, wurde die Kohlensäure als hinreichend rein angesehen. Wie ich mich durch eine Analyse überzeugte, enthielt die Kohlensäure dann 0·23% eines nicht absorbirbaren Gases.

Die gasanalytische Bestimmung der Kohlensäure geschah mittelst Kalikugeln.

Bei den Versuchen, welche ich sogleich anführen werde, fehlte der Aufsatz *K* am Apparate und es war statt desselben lose ein Holzpfropf eingeschraubt. Diese Versuche hatten zunächst den Zweck, den Einfluss zu untersuchen, den die durch den Diffusionshahn strömende Gasmenge auf die Diffusionserscheinung nimmt. Die Bohrung 33 des Dreiweghahnes war nicht mit Quecksilber gefüllt worden.

1. Versuch, 26. October 1880.

1 Stunde 740·6 Mm.	4 Liter 13·9° C.
0·58·567	0·025000
0·58·849	0·056276
0·59·005	0·054839
0·58·807	0·049693

2. Versuch, 27. October.

1 Stunde 735·7 Mm.	4·15 Liter 14·0° C.
0 58561	0·025120
0·58670	0·056546
0·58821	0·054739
0·58684	0·049533

3. Versuch, 29. October.

1 Stunde 727·9 Mm.	3·2 Liter 14·4° C.
0·58137	0·025930
0·57861	0·058369
0·57999	0·055904
	0·050447

4. Versuch, 29. October.

1 Stunde 730·4 Mm.	3·2 Liter 14·9° C.
0·58327	0·025491
0·58484	0·057381
0·58406	0·055146
	0·049557

5. Versuch, 31. October.

2 Stunden 745·7 Mm.	3·25 Liter 13·3° C.
0·42730	0·048682
0·42989	0·054793
0·42540	0·053763
0·42753	0·048888

6. Versuch, 1. November.

2 Stunden 745·4 Mm.	2·9 Liter 13·2° C.
0·42988	0·048738
0·42620	0·054855
0·42554	0·053803
0·42721	0·048958

7. Versuch, 2. November.

1 Stunde 749·7 Mm.	2·25 Liter 13·1° C.
0·59166	0·024416
0·59446	0·054960
0·59246	0·054216
0·59292	0·049335

8. Versuch, 2. November.

1 Stunde 748·0 Mm.	1·90 Liter 13·5° C.
0·59366	0·024471
0·59343	0·055085
0·59024	0·054215
0·59244	0·049218

Eine Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten von der Menge der durch den Hahn strömenden Luft ist nicht zu erkennen. Dagegen geben die Werthe des Diffusionscoëfficienten für die Zeit von einer Stunde im Mittel 0·049631, jene für zwei Stunden Diffusionszeit 0·048923 einen ausgesprochen kleineren Werth.

Es werden nunmehr provisorische Einrichtungen getroffen, um die schädlichen Räume der Bohrungen 2, 2 und 3, 3 mit Quecksilber anfüllen zu können, und weitere Versuche ausgeführt.

10. Versuch, 6. November.

1 Stunde 750·5 Mm.	2·7 Liter 12·4° C.
0·59887	0·023585
0·59983	0·053090
0·59831	0·052426
0·59901	0·047970

11. Versuch, 6. November.

1 Stunde 751·8 Mm.	2·65 Liter 12·5° C.
0·60105	0·023439
	0·052689
	0·052122
	0·047660

12. Versuch, 7. November.

2 Stunden 752·6 Mm.	2·52 Liter 12·2° C.
0·43312	0·047341
0·43532	0·053225
0·43703	0·052764
0·43518	0·048351

13. Versuch, 8. November.

1 Stunde 747·2 Mm.	2·5 Liter 12·1° C.
0·60411	0·023278
0·60050	0·052400
0·60293	0·051518
0·60257	0·047241

14. Versuch, 12. November.

1 Stunde 749·3 Mm.	2·85 Liter 11·7° C.
0·60427	0·023163
0·60283	0·052141
0·60337	0·051407
0·60349	0·047273

15. Versuch, 13. November.

2 Stunden 745·6 Mm.	2·88 Liter 11·6° C.
0·43578	0·023686
0·43561	0·053318
0·43360	0·052309
0·43500	0·048135

16. Versuch, 13. November.

3 Stunden 744·8 Mm.	2·48 Liter 11·8° C.
0·31732	0·071826
0·31561	0·053894
0·31245	0·052816
0·31513	0·048535

18. Versuch, 14. November.

3 Stunden 739·7 Mm.	2·72 Liter 62·7° C.
0·30593	0·073830
0·30710	0·055398
0·30775	0·053918
0·30693	0·049235

Die Beseitigung der schädlichen Räume beeinflusst die bei Diffusionszeiten von 2 — 3 Stunden gewonnenen Werthe des Diffusionscoëfficienten nur in geringem Masse. Die aus den Beobachtungen während einer Stunde gefundenen Werthe sind jetzt ausgesprochen kleiner. Im Mittel ergibt sich für:

Diffusionszeit	$\varkappa_0$
1 Stunde	0·47536
2 Stunden.....	0·48243
3 „	0·48885

Ich glaubte die Ursache dieses Verhaltens im Apparate suchen zu sollen und zwar zunächst darin, dass im Beginne des Diffusionsprocesses die aus dem Diffusionscylinder tretende Kohlensäure durch die Luft nicht rasch genug hinweggeführt

wird. Es wurden, um noch grössere Luftmengen durch den Hahn schicken zu können, grosse Flaschen bis zu 15 Liter Inhalt verwendet. Es wurde weiter der definitive Aufsatz *k* mit dem Hahne H_2 an dem Apparate angebracht und das Feststellen des Quecksilbergefässes durch eine Feder mit Zähnen eingerichtet.

19. Versuch, 27. November.

1 Stunde 749·0 Mm.	5 Liter 13·0° C.
0·59989	0·023479
0·60167	0·052853
0·60085	0·052087
0·60080	0·047462

21. Versuch, 28. November.

$2^1/_2$ Stunden 756·6 Mm.	4·4 Liter 15·3° C.
0·36426	0·061079
0·36179	0·054997
6·36302	0·054752
	0·049134

22. Versuch, 28. November.

30 Minuten 757·4 Mm.	4·3 Liter 15·1° C.
0·71734	0·011740
	0·052855
	0·052675
	0·047193

23. Versuch, 29. November.

$2^1/_2$ Stunden 759·2 Mm.	4·5 Liter 13·5° C.
0·37167	0·059601
0·36748	0·053665
0·37068	0·053607
0·37012	0·048679

24. Versuch, 29. November.

1 Stunde 758·5 Mm.	4·5 Liter 13·3° C.
0·60131	0·023585
0·59870	0·053095
0·59970	0·052986
0·59990	0·048292

25. Versuch, 2. December.

30 Minuten 747·9 Mm.	4·2 Liter 11·5° C.
0·72160	0·011363
0·72364	0·051157
0·72262	0·050342
	0·046360

26. Versuch, 3. December.

30 Minuten 752·0 Mm.	6·8 Liter 11·6° C.
0·72114	0·011430
0·72176	0·051494
0·72145	0·050918
	0·046856

27. Versuch, 4. December.

30 Minuten 753·7 Mm.	8·90 Liter 11·3° C.
0·72219	0·011422
0·72090	0·051423
0·72154	0·050997
	0·047030

28. Versuch, 4. December.

2 Stunden 755·6 Mm.	5·4 Liter 11·5° C.
0·43521	0·047326
0·43533	0 053266
0·43527	0·052817
	0·048639

29. Versuch, 5. December.

1 Stunde 753·5 Mm.	7·5 Liter 11·3° C.
0·60243	0·023355
0·60126	0·052574
0·60185	0·052124
	0·048069

30. Versuch, 5. December.

2 Stunden 752·8 Mm.	5·35 Liter 11·3° C.
0·43648	0·047064
0·43708	0·052971
0·43678	0·052470
	0·048387

31. Versuch, 6. December.

3 Stunden. In der ersten halben Stunde im Ganzen 3 Liter, in den folgenden $2^1/_2$ Stunden, 8·5 Liter.

752·4 Mm.	11·1° C.
0·32028	0·070605
0·32017	0·052979
0·32023	0·052449
	0·048436

Auch bei dieser Versuchsreihe zeigt sich kein Einfluss der Luftmenge, welche durch den Hahn strömt.

Im Mittel wird gefunden:

Diffusionszeit	k_0
30 Minuten	0·046860
1 Stunde	0·047941
2 Stunden	0·048513
$2^1/_2$ „	0·048907
3 „	0·048436

Diese Werthe geben die Bestätigung, dass kleineren Diffusionszeiten auch kleinere Werthe der Diffusionscoëfficienten entsprechen.

Es werden mit dem Apparate die später zu beschreibenden Versuche mit Wasserstoff — Kohlensäure und Sauerstoff — Kohlensäure ausgeführt, sodann wird ein dünnes Stahlblech, wie es in der Fig. 3 angedeutet ist, auf die grössere Grundfläche des Hahnkörpers geschraubt, welches den Luftstrom mehr an die Mündung des Diffusionsrohres herabdrücken soll.

44. Versuch, 20. Dec. 1880.

30 Minuten 747·1 Mm.	4·8 Liter 11·4° C.
0·72040	0·011549
0·71993	0·051993
0·72017	0·051109
	0·047100

48. Versuch, 10. Juni 1881.

2 Stunden 741·0 Mm.	4·6 Liter 18·9° C.
0·42014	0·050062
0·42079	0·056346
0·41848	0·054938
0·41980	0·048057

49. Versuch, 10. Juni.

20 Minuten 741·3 Mm.	6 Liter 19·1° C.
0·76174	0·0082017
0·76416	0·055386
0·76532	0·054057
0·76374	0·047191

50. Versuch, 11. Juni.

25 Minuten 741·6 Mm.	6 Liter 18·1° C.
0·73858	0·0100206
0·73740	0·054133
0·74155	0·052822
0·73917	0·046462

51. Versuch, 12. Juni.

2 Stunden 740·8 Mm.	4·7 Liter 17·7° C.
0·41675	0·050720
0·41559	0·057087
0·41627	0·055644
	0·049080

52. Versuch, 12. Juni.

25 Minuten 740·8 Mm.	5·8 Liter 17·8° C.
0·73806	0·01010
0·73876	0·054563
0·73760	0·053186
0·73814	0·046879

53. Versuch, 13. Juni.

2 Stunden 742·8 Mm.	4·9 Liter 17·9° C.
0·41834	0·050384
0·41769	0·056707
0·41802	0·055424
	0·048819

54. Versuch, 15. Juni.

25 Minuten 745·0 Mm.	6·5 Liter 17·6° C.
0·74017	0·010018
0·73824	0·054119
0·73921	0·052909
	0·046699

Vor dem 54. Versuch wird der Diffusionshahn herausgenommen und der Apparat ausgewischt. Das Versuchsresultat wird hiedurch nicht beeinflusst.

Zum Schluss der Versuche wird der Apparat mit Kohlensäure gefüllt, in der Gaseprouvette bleibt nach der Absorption

durch Kalilauge eine Blase von 8 Mm. Durchmesser; dann wird der Apparat entleert und in einem Eudiometer eine Absorptionsanalyse der Kohlensäure ausgeführt. Dieselbe ergibt eine Verunreinigung durch ein nicht absorbirbares Gas von 0·23%.

Im Mittel geben diese Versuche für die verschiedenen Diffusionszeiten:

20 Minuten	0·047190	0·046990
25 „	0·046680	
30 „	0·047100	
2 Stunden	0·048652	

Ein Einfluss der am Hahne angebrachten Veränderung ist nicht zu erkennen; die Werthe von k_0 sind in naher Übereinstimmung mit den früher gefundenen.

Während der Versuche 52 und 53 strömt die Luft in der Richtung von der grösseren Grundfläche des Hahnes zur kleineren, während sonst das Entgegengesetzte der Fall ist. Auch dies erweist sich ohne Einfluss auf die Grösse des Diffusionscoëfficienten.

Kohlensäure — Wasserstoff.

Der Wasserstoff wird in einem Apparate zur continuirlichen Entwicklung dargestellt, durch übermangansaures Kali und Kalilösung gewaschen und durch Schwefelsäure getrocknet. Der pulsirende Strom des Apparates wird, in der Richtung von der kleineren zur grösseren Grundfläche, durch den Hahn geschickt.

Der Wasserstoff ist nicht absolut rein. Zwei Analysen desselben weisen übereinstimmend beim Verpuffen mit Sauerstoff im Eudiometer grössere Contractionen auf, als dem angewandten Wasserstoffgase entsprechen würde.

Die Kohlensäure wurde durch Absorption mittelst Kalikugeln bestimmt.

32. Versuch, 8. December.

40 Minuten 757·3 Mm.	11·2° C.
0·36348	0·061108
0·36227	0·20634
0·36288	0·20560
	0·19165

33. Versuch, 8. December.

40 Minuten 757·8 Mm.	11·4° C.
0·35994	0·061546
0·36163	0·20782
0·36079	0·20724
	0·19292

34. Versuch, 8. December.

1 Stunde 754·5 Mm.	11·5° C.
0·24411	0·091428
0·24286	0·20580
0·24349	0·20432
	0·19010

35. Versuch, 9. December.

40 Minuten 745·5 Mm.	10·9° C.
0·35636	0·062468
0·35654	0 21093
0·35645	0·20691
	0·19322

36. Versuch, 9. December.

20 Minuten 742·7 Mm.	10·9° C.
0·54509	0·030623
0·54332	0·20680
0·54421	0·20208
	0·18872

Bei diesem Versuche macht sich der Einfluss der kurzen Diffusionszeit bereits geltend; der Werth von k_0 ist erheblich kleiner.

43. Versuch, 17. December.

40 Minuten 738·6 Mm.	11·4° C.
0·35264	0·063457
0·35102	0·21427
0·35183	0·20824
	0·19585

Durch einen Flüssigkeitstropfen in einem Glasröhrchen ist der Wasserstoffstrom intermittirend geworden; nichtsdestoweniger erhöht sich der Diffusionscoëfficient blos um 2 Percent.

In den folgenden Versuchen ist das Stahlplättchen, Fig 3, am Hahne festgeschraubt.

59. Versuch, 19. Juni 1881.

40 Minuten 741·8 Mm.	19·7° C.
0·34541	0·06470
0·34689	0·21840
0·34612	0 21323
	0.18877

60. Versuch, 19. Juni.

10 Minuten 741·2 Mm.	19·9° C.
0·67384	0·015689
0·67347	0·21190
0·67366	0·20666
	0·18274

61. Versuch, 19. Juni.

10 Minuten 741·0 Mm.	20·1° C.
0·67523	0·015538
	0·21066
	0·20540
	0·18140

62. Versuch, 19. Juni.

40 Minuten 741·1 Mm.	20·2° C.
0·34113	0·065801
0 34108	0·22218
0·34110	0·21666
	0·19123

Das Stahlplättchen erweist sich ohne Einfluss.

Die Versuche lassen eine beträchtliche Abweichung der bei verschiedenen Zeiten bestimmten Diffusionscoëfficienten erkennen; auch hier entsprechen den kleineren Zeiten kleinere Werthe des Diffusionscoëfficienten. Es ergibt sich im Mittel

40 Minuten ..... 0·18207
20 „ ..... 0·18872
40 „ ..... 0·19156.

Sauerstoff — Kohlensäure.

Die Flasche, in welche der Abfluss aus der Mariotte'schen Flasche stattfindet, ist mit Sauerstoffgas gefüllt, welches aus einem grossen Gasometer genommen wird.

Auch hier wird die Kohlensäure durch Absorption mittelst Kalikugeln bestimmt.

37. Versuch, 11. December.

2 Stunden 741·0 Mm.	4·9 Liter 11·3° C.
0·43134	0·048045
0·43094	0·054120
0·43114	0·052767
	0·048663

38. Versuch, 12. December.

2 Stunden 739·7 Mm.	4·5 Liter 11·0° C.
0·44629	0·022870
0·44274	0·051482
0·44452	0·050105
	0·046309

39. Versuch, 13. December.

2 Stunden 738·5 Mm.	4·5 Liter 11·0° C.
0·43144	0·048084
0·43294	0·054119
0·42837	0·052589
0·43092	0·048597

40. Versuch, 14. December.

2 Stunden 734·3 Mm	11·2° C.
0·42970	0·048571
0·42662	0·054668
0·42816	0·052819
	0·048742

41. Versuch, 15. December.

2 St., 1 Min. 744·0 Mm.	4·1 Liter 10·9° C.
0·42886	0·048389
0·42953	0·053989
0·42920	0·052852
	0·048877

42. Versuch, 16. Dec. 1880.

2 Stunden 737·3 Mm.	10·8° C.
0·42900	0·048229
0·43120	0·054284
0·43010	0·052656
	0·048729

Diese Versuche geben im Mittel (38. Versuch nicht berücksichtigt):

2 Stunden $k_0 = 0{\cdot}048723$.

Ein Werth, welcher etwas Weniges grösser als für Luft—Kohlensäure gefunden wird.

Als an den Hahn das Stahlplättchen, Fig. 3, geschraubt war, wurden folgende Versuche ausgeführt:

55. Versuch, 16. Juni 1881.

2 Stunden 742·7 Mm.	5·2 Liter 19·4° C.
0·41546	0·051246
0·41219	0·057677
0·41383	0·056366
	0·049136

56. Versuch, 17. Juni 1881.

2 Stunden 744·6 Mm.	18·5° C.
0·41788	0·050596
0·41692	0·056947
0·41740	0·055793
	0·048940

57. Versuch, 17. Juni.

2 Stunden 744·1 Mm.	4 Liter 18·8° C.
0·41366	0·050960
0·41604	0·057357
0·41485	0·056157
	0·049157

58. Versuch, 17. Juni.

25 Minuten 743·7 Mm.	5·2 Liter 19·5° C.
0·73524	0·010335
0·73498	0·055834
0·73511	0·054637
	0·047597

Diese Versuchsreihen geben für den Diffusionscoëfficienten Sauerstoff — Kohlensäure noch grössere Werthe als die früheren. Der kleineren Diffusionszeit von 25 Minuten entspricht auch hier ein kleinerer Werth des Diffusionscoëfficienten.

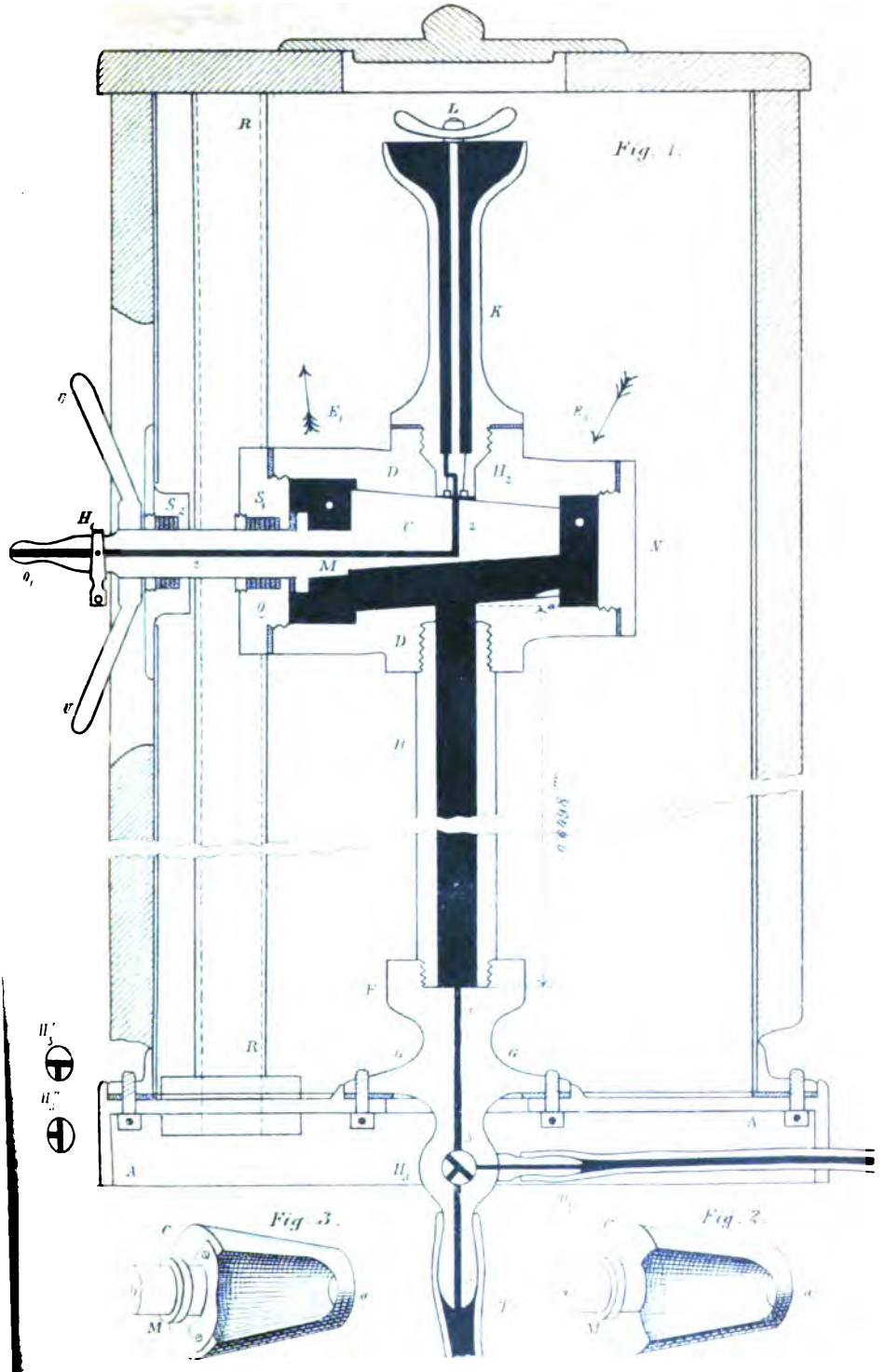


Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 2.

Druck v. J. Wagner, Wien.

Zum Normalenproblem der Kegelschnitte.

Von **Carl Pelz**,
o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Graz.

(Mit 1 Tafel.)

Bekanntlich hat Joachimsthal in der schönen Abhandlung „Über die Normalen der Ellipse und des Ellipsoids“[1] eine einfache Lösung des Problems angegeben, von einem beliebigen Punkte einer Normale eines Centralkegelschnittes die noch übrigen drei möglichen Normalen auf die Curve zu fällen. Herr Eckardt hat diese Lösung in seiner Abhandlung „Über die Normalen von Kegelschnitten, insbesondere über die Construction der von einem beliebigen Punkte ausgehenden Normalen“ (Schlömilch's „Zeitschrift der Mathematik und Physik“, 11. Bd.) analytisch bewiesen und analoge Untersuchungen für die Normalen einer Parabel angestellt.

Ich erlaube mir, im Nachfolgenden durch rein geometrische Betrachtungen einen Gesichtspunkt zu eröffnen, der für die Joachimsthal'sche Construction eine bequeme Beweisführung ermöglicht, und von welchem überdies andere einfachere Lösungsarten des Problems gewonnen werden können.

1. Denken wir uns von einem beliebigen Punkte p (Fig. 1) der Normale N des Kegelschnittes Σ die drei übrigen möglichen Normalen auf Σ gefällt, so bestimmen die Fusspunkte I, II, III derselben ein Dreieck, welches für jede Lage des Punktes p auf dem Träger N einer bestimmten Parabel P umschrieben ist, die auch die Axen von Σ berührt.

Dieser Satz wurde von Herrn Emil Weyr in der Abhandlung „Über die Normalen an Curven zweiter Ordnung“ (Schlömilch's „Zeitschrift“, 16. Bd.) mit Hilfe von biquadratischen und kubischen Involutionen bewiesen. Der Beweis kann auch in der nachfolgenden Weise geführt werden.

---

[1] Crelle's „Journal für reine und angewandte Mathemathik“, 26. Bd.

Denken wir uns für jede Lage des Punktes p auf N die drei weiteren Normalen des Kegelschnittes Σ mit Hilfe der bekannten gleichseitigen Hyperbel H construirt,[1] so erhalten wir, da die Hyperbeln alle durch den Mittelpunkt o von Σ, ferner durch den Fusspunkt q der Normale N und durch die Axenrichtungen u, v des gegebenen Kegelschnittes hindurchgehen, ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, mit den Basispunkten o, q, u, v. Der Kegelschnitt Σ geht durch den Basispunkt q des Büschels und wird daher von einer jeden Hyperbel desselben, ausser in q, noch in drei weiteren Punkten I, II, III derart geschnitten, dass das hiedurch gebildete Dreieck einem bestimmten Kegelschnitte umschrieben ist,[2] welcher, da zugleich demjenigen Dreieck eingeschrieben, das von den drei übrigen Basispunkten o, u, v des Büschels gebildet wird, hier eine Parabel sein muss.

Hieraus folgt, dass die den Dreiecken I, II, III umgeschriebenen Kreise K einem Chordalsystem angehören müssen. Denn ein jeder dieser Kreise K geht durch den Brennpunkt c der Parabel P und ausserdem — wie Joachimsthal am citirten Orte so überraschend einfach nachgewiesen hat — durch den Punkt q_1 der q diametral gegenüberliegt.

Es kann nun leicht gezeigt werden, dass c ein Punkt der Tangente T von Σ für den Punkt q_1 ist.

Construiren wir in einem beliebigen Punkte q des Kegelschnittes aa_1 bb_1 (Fig. 2) die Normale, welche in p_1 die Axe aa_1 schneidet, so fallen zwei von den drei übrigen von p_1 an den Kegelschnitt möglichen Normalen mit aa_1 zusammen, während die dritte, durch den zu q bezüglich aa_1 orthogonal symmetrischen Punkt q_2 hindurchgeht. Die der Normale qp_1 in der zuvor erörterten Weise entsprechende Parabel P ist durch die Geraden aq_2, a_1q_2 und die Kegelschnittaxen als vier Tangenten vollkommen bestimmt.

Die Polare des Mittelpunktes o des gegebenen Kegelschnittes bezüglich P wird durch die Verzeichnung der Rechtecke oa (III) (I), oa_1 III I in der Verbindungsgeraden der Punkte III, (III)

[1] Mit deren Benützung schon Apollonius das Normalenproblem behandelte.

[2] Siehe Steiner's „Vorlesungen über synthetische Geometrie", II. Theil, pag. 242.

erhalten. Diese Polare geht durch den mit q diametral gegenüber liegenden Punkt q_1 und fällt mit dessen Tangente T zusammen. Denn construiren wir die Tangente des Punktes q_1 nach dem Satze von Pascal mit Hilfe der Punkte a, q_2, q_1, a_1 und der Scheiteltangente a_1, so ergibt sich diese in der Geraden q_1 III. Wird dieselbe Construction unter Zuhilfenahme derselben Punkte und der Scheiteltangente a durchgeführt, so resultirt q_1 (III) als die verlangte Tangente. Hieraus folgt, dass die Punkte III (III) auf der Tangente T des Punktes q_1 liegen.

Da o ein Punkt der Directrix der Parabel P ist, so ist der Parabelbrennpunkt c mit dem Fusspunkte der von o auf T gefällten Normale identisch.

2. Ein jeder Kreis des Büschels cq_1 (Fig. 1) schneidet Σ in drei weiteren Punkten I, II, III, deren Normalen in einem Punkte der Normale N zusammentreffen. Und umgekehrt; die Fusspunkte I, II, III der von einem beliebigen Punkte von N auf Σ gefällten Normalen liegen auf einem Kreise K des Büschels.

Da hier also einem jeden Punkte p der Normale N ein Kreis des Büschels und umgekehrt eindeutig entspricht, so ist die Reihe der Punkte p auf dem Träger N projectivisch mit der Reihe der Mittelpunkte m der Kreise K auf der Mittelpunktsgeraden M des Kreisbüschels. Für gewisse specielle Lagen des Punktes p auf N können die entsprechenden Kreismittelpunkte m einfach erhalten werden. Das gilt insbesondere für die Schnittpunkte p_1, p_2 von N mit den Kegelschnittaxen und für den unendlich fernen Punkt p_∞ auf N, denen die Punkte m_1, m_2, m_∞ auf M respective entsprechen.

Dass p_∞ auf N der Punkt m_∞ auf M homolog ist, folgt aus dem Umstande, dass der dem p_∞ entsprechende Kreis K in die Tangente T und die unendlich ferne Gerade ausartet und folglich sein Mittelpunkt mit dem unendlich fernen Punkte von M zusammenfällt.

Die beiden Punktreihen N und M sind also vielmehr perspectivisch ähnlich und der Schnittpunkt σ der Geraden $p_1 m_1$, $_1p m_2$ ist ihr perspectivisches Centrum.[1]

[1] Da m_1 dem Punkte p_1 homolog ist, so folgt, dass m_1 der Mittelpunkt eines Kreises sein muss, der durch die Scheitel der grossen Axe der Ellipse Σ und durch q_1 geht. Dasselbe gilt von m_2 bezüglich q_1 und der Scheitel der zweiten Axe. Wären also von einem Kegelschnitte eine Axe und eine

Die Normale N_1 des Kegelschnittes Σ im Punkte q_1 schneidet die Kegelschnittaxen in n, n_1 und es ist $on = op_1$, $on_1 = op_2$.

Weil die Mittelpunktsgerade M den Abstand zwischen $o\sigma$ und N_1 halbirt, so ist $om_2 = {}^1/_2 op_1$, $om_1 = {}^1/_2 op_2$ und folglich auch $m_1 m_2 = {}^1/_2 p_1 p_2$.

Hieraus folgt, dass die Punkte $non_1\sigma$ ein Rechteck bilden, das mit dem Rechteck $op_1 sp_2$ congruent ist.

Um nun zu irgend einem Punkte p der Normale N, den Mittelpunkt m des durch die Fusspunkte I II III der drei übrigen von p an Σ möglichen Normalen hindurchgehenden Kreises K zu erhalten, brauchen wir bloss p aus σ auf M zu projiciren.

3. Ausser der im vorangehenden Artikel erörterten Bestimmung des Mittelpunktes m, des einem beliebigen Punkte p auf N entsprechenden Kreises, können aus Fig. 1 noch andere derartige Constructionen herausgelesen werden.

Die Gerade M halbirt den Abstand des Punktes σ von N; es ist daher $pm = m\sigma$. — Hierin liegt der Beweis der Joachimsthal'schen Construction:

„Es sei pq (Fig. 6) eine Normale des Kegelschnittes am Punkte q desselben: man will von p noch alle übrigen möglichen Normalen an den Kegelschnitt ziehen. Zu diesem Ende errichte man Perpendikel auf die Axen, wo diese von der Normale qp geschnitten werden; ihr Schnittpunkt sei s; q_1 und σ seien die den Punkten q und s diametral gegenüber liegenden Punkte und m die Mitte zwischen σ und p. Ein Kreis, dessen Mittelpunkt m ist, und welcher durch q_1 geht, wird den Kegelschnitt in noch drei Punkten schneiden, deren Normalen in p sich treffen."

Ziehen wir in Fig. 1 durch p diejenige Gerade, die mit den Axen dieselben Winkel wie N einschliesst und ist d ihr Schnittpunkt mit N_1, so ist pd parallel und gleich $p_2 n = p_1 n_1 = os = o\sigma$

Da sich die Diagonalen des Parallelogramms $opd\sigma$ in ihrem Schnittpunkte halbiren, so folgt, dass od durch m geht und durch diesen Punkt halbirt wird.

Normale N_1 gegeben, so kann man leicht den Fusspunkt q_1 der Normale hiernach bestimmen. Für diese Construction habe ich in der Abhandlung „Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie" Sitzungsbericht der k. Akademie LXXXI. Band, Jahrggang 1880 einen anderen Beweis geliefert. Hier ergibt sich dieselbe als Specialfall des vorliegenden Normalenproblems.

Das gibt die nachfolgende Construction des, dem auf der Kegelschnittsnormale pq (Fig 3) liegenden Punkte p entsprechenden Kreises K, der durch die Fusspunkte der drei übrigen von p ausgehenden Normalen der Curve hindurchgeht.

Wir ziehen durch p eine Gerade, die mit der Axe aa_1 denselben Winkel wie pq einschliesst, und tragen auf dieselbe eine Strecke pd auf, die gleich ist der durch die Kegelschnittaxen auf pq abgeschnittenen Länge.

Der Kreis K ist dann aus der Mitte m der Strecke od mit dem Radius mq_1 zu beschreiben.

Schneidet (siehe Fig. 1) die verlängerte Gerade od die Normale N in r, so ist $or = od = ps$, $om = {}^1/_2 or$ und ps parallel zu or. Dies hat die Congruenz der beiden Dreiecke orp_1 und spp_2 und folglich die Gleichheit der Strecken p_1r, pp_2 zur Folge.

Man erhält daher den Mittelpunkt m des durch die Fusspunkte der drei übrigen vom Punkte p der Normale pq möglichen Kegelschnittsnormalen, wenn man (siehe Fig. 4) $p_1r = pp_2$ macht und auf die Verlängerung von or über o hinaus die Strecke $om = {}^1/_2 or$ aufträgt.

Der Kreis K ist wie früher mit dem Radius mq_1 zu beschreiben.

Der Punkt d in Fig. 1 wird auch erhalten, wenn man $nd = pp_2$ oder $n_1d = p_1p$ macht.

Sollen daher vom Punkte p (Fig. 5) der Kegelschnittnormale qp die übrigen drei Normalen an den Centralkegelschnitt aa_1 bb_1 gefällt werden, so construiren wir die Normale N_1 des dem Punkte q diametral gegenüber liegenden Punktes q_1 und machen $nd = p_2p$.

Der aus dem Halbirungspunkte m von od mit mq_1 beschriebene Kreis K geht durch die Fusspunkte der gesuchten Normalen.

4. Wir unterlassen es auf mehrere andere in Fig. 1 enthaltene Lösungen unseres Problems separat aufmerksam zu machen und wollen nur noch einige analoge Constructionen für die Parabel hervorheben.

Diese aus der in Fig. 1 angestellten Betrachtung durch Übertragung auf die Parabel, für das Normalenproblem der genannten Curve resultirenden Constructionen weisen eine

ziemlich grosse Mannigfaltigkeit auf. Wir führen hier blos drei solche an, die uns durch ihre Einfachheit bemerkenswerth zu sein scheinen.

Ist eine Parabel P durch den Scheitel a und den Brennpunkt f gegeben, und sollen vom Punkte p die drei möglichen Normalen der Parabel construirt werden, so erhält man den Mittelpunkt m des durch die Fusspunkte dieser Normalen gehenden Kreises K wie folgt:

a) Man fälle (Fig. 7) pt normal auf die Scheiteltangente und halbire at in c. Wird die Gerade cf über f hinaus um ihre eigene Länge verlängert und der so erhaltene Punkt σ mit p verbunden, so ist m der Halbirungspunkt der Strecke $p\sigma$.

Der Kreis K selbst ist mit dem Radius $ma = mc$ zu beschreiben.

b) Man halbire, wie vorher, at in c und ziehe (siehe Fig. 8) ph parallel zu cf; dann halbirt m die Strecke ch.

c) Die Coordinaten des Mittelpunktes m sind (Fig. 9):

$$am' = af + \tfrac{1}{2}tp \text{ und } mm' = \tfrac{1}{4}at.$$

Zum Schlusse will ich noch bemerken, dass sich das Normalenproblem allgemein, wenn keine von den vier durch den Punkt p gehenden Normalen im Voraus gegeben ist, mit Hilfe des Kreises für einen Centralkegelschnitt durch ähnliche Betrachtungen lösen lässt. Dass hiebei der gegebene Kegelschnitt Σ als gezeichnet vorliegend anzunehmen ist, ist selbstverständlich.

Ich gedenke zu diesem Gegenstande gelegentlich zurückzukehren.

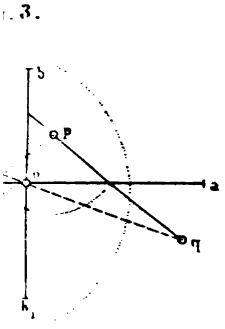
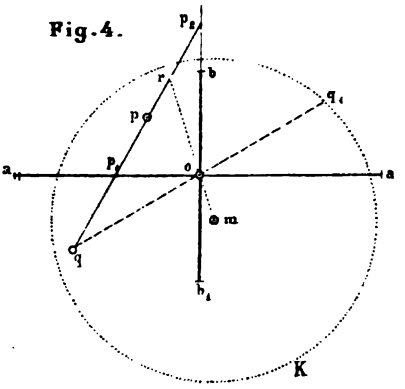


Fig. 4.



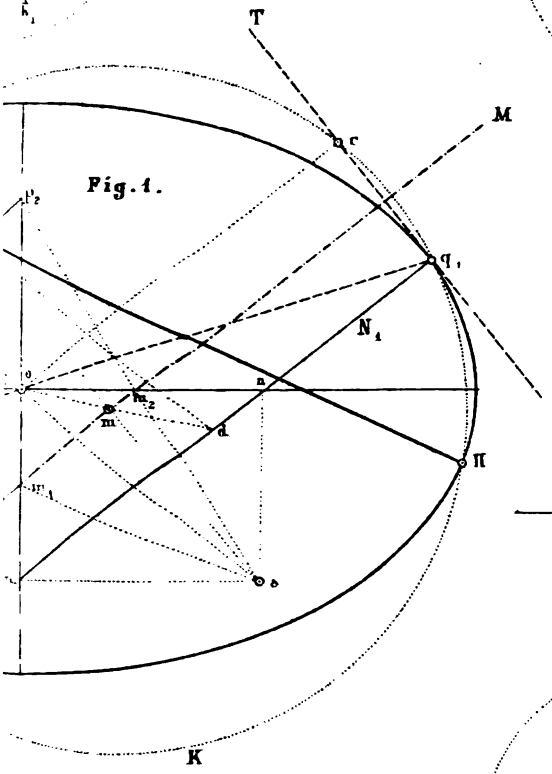


Fig. 1.

Fig. 8.

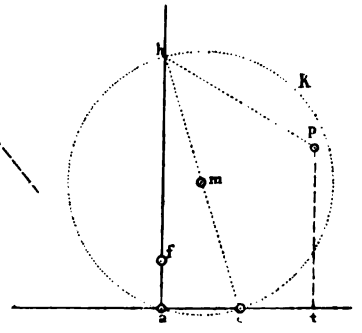
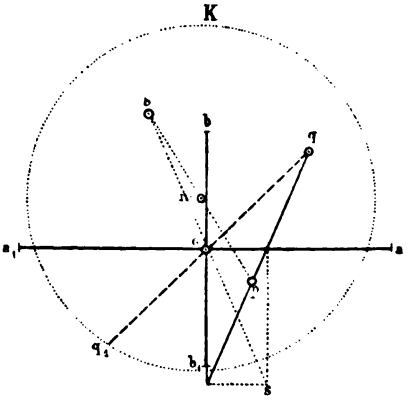
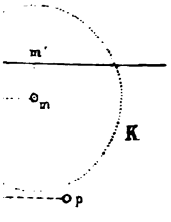


Fig. 6.



ig. 9.



Druck v. J. Wagner Wien

III. SITZUNG VOM 19. JÄNNER 1882.

In Verhinderung des Vicepräsidenten übernimmt Herr Dr. L. J. Fitzinger den Vorsitz.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 11. Jänner d. J. erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes Herrn Dr. Theodor Schwann, Professor der Physiologie an der Universität zu Lüttich.

Die Mitglieder erheben sich zum Zeichen des Beileides von ihren Sitzen.

Das w. M. Herr Hofrath E. Ritter v. Brücke übermittelt den Jahrgang 1881 der von dem ausländischen c. M. Herrn Prof. C. Ludwig herausgegebenen „Arbeiten aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig."

Herr Regierungsrath Prof. Dr. Gust. Ad. V. Peschka an der technischen Hochschule in Brünn übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Neue Eigenschaften der Normalenflächen für Flächen zweiten Grades längs ebener Schnitte."

Herr Prof. A. Wassmuth an der Universität in Czernowitz übersendet eine Abhandlung: „Über elektromagnetische Tragkräfte."

Das c. M. Herr Prof. Sigm. Exner überreicht eine Abhandlung: „Über die Function des *Musculus Crampetorianus*".

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Beiträge zur Kenntniss der Tetrahydrocinchoninsäure", von Herrn Dr. H. Weidel.

Das w. M. Herr Hofrath F. Ritter v. Hauer überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. C. Doelter in Graz: „Über die Einwirkung des Elektromagneten auf verschiedene Mineralien und seine Anwendung behufs mechanischer Trennung derselben."

Herr Aug. Adler, stud. techn. in Wien übersendet eine Abhandlung „Über Strictionslinien der Regelflächen zweiten und dritten Grades".

Herr Dr. Fr. Wähner in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Das Erdbeben von Agram am 9. November 1880", als das Resultat seiner im Auftrage der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften unternommenen Beobachtungen und Studien.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia, Real de Ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 209. Tomo XVIII. Diciembre 15. Habana, 1881; 8°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXIX 1881—82. Serie terza. Transunti, Vol. VI. Fascicoli 2° & 3°. Roma, 1881—82; 4°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch-deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XVII, Nr. 23—24. Halle a. S. December 1881; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XX. Jahrgang, Nr. 2. Wien, 1882; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Ausweise über den auswärtigen Handel der österr.-ungarischen Monarchie im Jahre 1880. XLI. Jahrgang, IV. Abtheilung: Waaren-Durchfuhr. Wien, 1881; 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VI, Nr. 2 Cöthen, 1882; 4°.

Commission géodésique néerlandaise: Publications. I. Détermination à Utrecht, de l'Azimut d'Amersfoort par J. A. C. Oudemans. La Haye, 1881; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCIV, No. 1. Paris, 1882; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte, XIV. Jahrgang, Nr. 19. Berlin, 1881; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. XVII. Band, Jännerheft 1882. Wien; 8°.

— naturforschende in Zürich: Vierteljahrsschrift. XXIV. Jahrgang, 1.—4. Heft. Zürich, 1879; 8°. — XXV. Jahrgang, 1.—4. Heft. Zürich, 1880; 8°.

Gewerbe-Verein, nied.-österr.: Wochenschrift. XLIII. Jahrgang, Nr. 1 & 2. Wien, 1882; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. VII. Jahrgang, Nr. 1 & 2. Wien, 1882; 4°.

Journal, the American of science. Vol. XXIII, Nr. 133. January, 1882. New Haven, 1882; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXVIII. Band, 1882, I. Gotha; 4°.

Programme: Böhm. Leipa, k. k. Ober-Gymnasium am Schlusse des Jahres 1880 und 1881. Böhm. Leipa, 1880—81; 8°. — Bozen, k. k. Staats-Gymnasium: 1879—80. Bozen; 8°. — Brixen, k. k. Gymnasium: XXX. Programm. Brixen, 1880; 8°. — Brünn, k. k. zweites deutsches Ober-Gymnasium: 9. und 10. Jahres-Bericht für das Schuljahr 1880 und 1881. Brünn; 8°. — Erstes deutsches k. k. Gymnasium für das Schuljahr 1880. Brünn; 8°. — K. k. Staats-Gymnasium in Cilli. Cilli, 1881; 8°. — Forstschule in Eulenburg: Jahresbericht. 29. und 30. Cursus. 1880—81 & 1881—82. Olmütz, 1880—81; 8°. — K. Ober-Gymnasium in Fiume: 1879—80 & 81. Zagreb, 1881; 8°. — Steiermärkisch-landschaftliches Joanneum zu Graz: 69. Jahresbericht über das Jahr 1880. Graz, 1881; 4°. — K. Rechtsakademie in Grosswardein: 1879—80. Grosswardein, 1880; 8°. — Evangelisches Gymnasium A. B. und die mit demselben verbundene Realschule, sowie die evang. Bürgerschule A. B. zu Hermannstadt für das Schuljahr 1879—80 und 1880—81. Hermannstadt, 1880—81; 4°. — Kathol. Ober-Gymnasium zu Klausenburg: Klausenburg, 1880; 8°. — Gewerbeschule zu Bistritz in Siebenbürgen: VI. Bericht, 1879—80. Kronstadt, 1880; 8°. — Königl. ungar. Staats-Oberrealschule zu Leutschau: XII. szám. Löcse, 1881; 8°. — K. k. Staats-Gymnasium in Marburg 1881: Marburg, 1881; 8°. — Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag: Jahresbericht, Vereinsjahr 1878—79, 1879—80 und 1880—81. Prag; 8°. — II. deutsche Staats-Oberrealschule in Prag: 8. Programm. Prag, 1880—81; 8°. — K. kathol. Ober-Gymnasium in Pressburg, 1879—80 & 1880—81. Pressburg, 1880—81; 8°. — K. k. Staats-Gewerbeschule zu Reichenberg: IV. & V. Jahresbericht. 1879—

81. Reichenberg, 1881; 8°. — K. k. Staats-Obergymnasium zu Saaz: 1880 und 1881. Saaz, 1880—81; 8°. — Evang. Gymnasium A. B. in Schässburg, 1879—80 und 1880—81. Schässburg, 1880—81; 4°. — Fürsterzbisch. Privat-Gymnasium Collegium Borromäum zu Salzburg: 31. & 32. Ausweis, 1879—80 & 1880—81. Salzburg, 1880—81; 8°. — K. k. Realgymnasium in Sarajevo: Jahresbericht 1879—80 und 1880—81. Sarajevo, 1880—81; 8°. — K. Ober-Gymnasium in Sign: 1879—80 und 1880—81. U Senju, 1880—81; 8°. — K. k. Staats-Ober-Realschule zu Steyr: XI. Jahres-Bericht 1880—81. Steyr, 1881; 8°. — Civica Scuola reale superiore in Trieste, 1881. Trieste, 1881; 8°. — Staats-Gymnasium in Troppau: 1879—80. Troppau, 1880; 8°. — K. k. akademisches Gymnasium in Wien: Jahresbericht für das Schuljahr 1879—80 und 1880—81. Wien, 1880—81; 8°. — K. k. Franz-Joseph-Gymnasium in Wien: VI. & VII. Jahresbericht. Wien, 1880—81; 8°. — K. k. Unter-Realschule in der Leopoldstadt in Wien: V. & VI. Jahresbericht. Wien, 1880—81; 8°. — K. k. Ober-Realschule in der Leopoldstadt in Wien: IX. & X. Jahresbericht. Wien, 1880—81; 8°. — K. k. Staats-Unter-Realschule im V. Bezirke (Margarethen) in Wien: V. Jahresbericht. Wien, 1880; 8°. — K. k. Ober-Gymnasium zu den Schotten in Wien: Jahresbericht am Schlusse des Schuljahres 1880 und 1881. Wien, 1880—81; 8°. — K. k. Theresianische Akademie in Wien: Jahresbericht für das Schuljahr 1879—80. Wien, 1880; 8°. — Niederösterreichisches Landes-Lehrerseminar in Wr.-Neustadt: VII. Jahresbericht. Wr.-Neustadt, 1880; 8°. — Niederösterreichische Landes-Ober-Realschule und die mit derselben vereinigte Landesschule für Maschinenwesen in Wr.-Neustadt: XV. und XVI. Jahresbericht. Wr.-Neustadt, 1880—81; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 16, 1881. Wien; 8°.

Schweizerische meteorologische Beobachtungen: XIV. Jahrgang, 1877: 7. (Schluss-) Lieferung. 4°. — XV. Jahrgang, 1878: 5., 6. und 7. (Schluss-) Lieferung, Titel und Beilagen;

4°. — XVI. Jahrgang, 1879: 4. & 5. Lieferung; 4°. — XVII. Jahrgang, 1880: 1.—4. Lieferung; 4°.

Society, American oriental: Proceedings at New Haven, October 26th, 1881; 8°.

Verein für Naturkunde zu Zwickau: Jahresbericht, 1879. Zwickau, 1880; 8°.

— entomologischer, in Stockholm: Entomologisk Tidskrift. Band I. Häft 1. Stockholm, 1880; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXII. Jahrgang, Nr. 1 & 2. Wien, 1882; 4°.

Beiträge zur Kenntniss der Tetrahydrocinchoninsäure.

Von Dr. **H. Weidel.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth.)

(Mit 5 Holzschnitten.)

Die vorliegende Abhandlung soll die Kenntniss der Eigenschaften und der Reactionsverhältnisse der Tetrahydrocinchoninsäure,[1] welche ich vor Jahresfrist beschrieben und durch die Einwirkung von Zinn und Salzsäure auf Cinchoninsäure erhalten habe,[2] erweitern. Diese Hydrosäure dürfte, wie es scheint, ein nicht geringes Interesse für sich in Anspruch nehmen, weil voraussichtlich durch die weitere Bearbeitung derselben sich Thatsachen ergeben werden, die zu gerechtfertigten Schlüssen in Bezug auf die Constitution des Cinchonins Veranlassung geben können.

Die Leichtigkeit, mit welcher das Chinolin, sowie einige Substanzen, welche von demselben deriviren, Wasserstoff addiren, scheint eine, für diese Körperclasse besonders charakteristische Eigenschaft zu sein. Dies geht aus den Untersuchungen von

---

[1] Monatshefte d. Chem. 1881. 29.

[2] Was die Darstellung der salzsauren Tetrahydrocinchoninsäure anbelangt, so habe ich in dem ersten kurzen Berichte hierüber angegeben, dass es nöthig ist, um gute Ausbeuten an diesem Körper zu erzielen, Zinnchlorür von Anbeginn der Reaction anwesend sein zu lassen. Man kann aber von der Zugabe dieses Chlorids Umgang nehmen, wenn die Lösung der Cinchoninsäure in concentrirtester Salzsäure mit einer etwas grösseren als der theoretisch nöthigen Menge von Zinn anfänglich nur gelinde (40—50°) erwärmt und erst später die Temperatur allmälig gesteigert wird. — Weiters ist noch zu bemerken, dass es von Vortheil ist, die durch Schwefelwasserstoff von Zinn befreiten Lösungen in einer Retorte im Kohlensäure- oder Wasserstoffstrom einzudampfen. Es wird so der Braunfärbung der Lauge vorgebeugt und man erhält ein sowohl qualitativ als quantitativ günstigeres Resultat.

Koenigs,[1] Wischnegradsky,[2] Kretschy[3] und m. A., die aus dem Chinolin eine um H_4 reichere Verbindung erhielten, sowie der Arbeit von K. Bedall und O. Fischer,[4] welche aus dem α-Chinophenol auch ein, in seiner Zusammensetzung um den Betrag von H_4 von diesem verschiedenes Hydroproduct dargestellt haben, hervor.

Der Eintritt des Wasserstoffs in das Chinolin kann bei Zugrundelegung der Körner'schen Formel in der Weise gedacht werden, dass die Anlagerung entweder im Benzol- oder Pyridinkern allein, oder in beiden Kernen stattfindet, wobei, falls die Aufnahme im Pyridinkern erfolgt, die Möglichkeit gegeben erscheint, dass aus dem N eine NHgruppe entsteht.

Unter diesen Combinationen ist offenbar experimentell am leichtesten zu entscheiden, ob die Wasserstoffaufnahme am N und mithin wenigstens theilweise im Pyridinkern erfolgt ist.

Zu diesem Zwecke habe ich die

Einwirkung von Acetylchlorid

auf die Tetrahydrocinchoninsäure vorgenommen.[5]

Die vollkommen getrocknete salzsaure Hydrosäure wird von dem Chlorid weder in der Kälte, noch in der Siedhitze verändert. Nur im Falle als ein bedeutender Überschuss desselben (circa die 40fache Menge) mit der Salzsäureverbindung im geschlossenen Rohre während langer Zeit auf 100° erhitzt wird, tritt die Bildung eines Acetylproductes ein.

Sobald die ursprüngliche Verbindung gelöst ist (es erfolgt dies nur sehr langsam), ist die Einwirkung beendet. Man unterbricht dann auch das Erhitzen. Nach dem Erkalten des Rohres entweicht beim Öffnen etwas Salzsäure. Die enstandene Verbindung wird nach dem Abdestilliren des überschüssigen Säure-

---

[1] Berl. Berichte 1881. 98.

[2] Ebendaher 1879, 1480.

[3] Monatshefte d. Chem. 1881. 83.

[4] Berl. Berichte 1881. 1368.

[5] Trotz vielfacher Versuche gelang es nicht die Tetrahydrocinchoninsäure in freiem Zustande zu erhalten, darum ist dieser und die folgenden Versuche mit der Salzsäureverbindung angestellt worden.

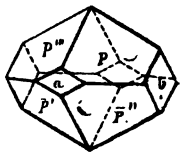
chlorids und dem Verjagen der letzten Spuren desselben in einer Schale auf dem Wasserbade, zunächst in Form eines honiggelben Syrups erhalten, der erst auf Zusatz von etwas Alkohol nach einiger Zeit fein krystallinisch erstarrt. Diese Ausscheidung wird durch Absaugen von der bräunlichen, dicken Mutterlauge, welche indess noch weitere Mengen der Krystalle liefert, [1] getrennt.

Die Krystalle sind sowohl im heissen Wasser als Alkohol löslich und werden zur weiteren Reinigung zunächst aus verdünntem Weingeist, schliesslich mehrmals aus Wasser unter Anwendung von etwas Thierkohle umkrystallisirt.

Lässt man eine nicht allzu concentrirte Lösung des Acetylproductes unter der Luftpumpe über Schwefelsäure eindunsten, so bilden sich grosse, stark glänzende, fast farblose Krystalle dieser neuen Verbindung, welche keine Salzsäure enthalten. Ich bezeichne diese Substanz als Acetotetrahydrocinchoninsäure.

Die krystallographische Bestimmung, welche Herr Dr. Březina so gütig war vorzunehmen, ergab:

Fig. 1.



Krystallsystem: Prismatisch.

Elemente $a : b : c = 0{\cdot}8477 : 1 : 0{\cdot}5696$.

Formen *a* (100), *b* (010), *p* (111).

Spaltbarkeit ausgezeichnet *b* (010), *a* (100)

Winkel:

	Flächen	Messung	Rechnung
a p	100.111	—	59° 43′
p p′	111.$\bar{1}$11	60° 34′	60 34
b p	010.111	—	64 42
p p‴	111.1$\bar{1}$1	50 36	50 36

Optische Orientirung: Bisectrix für alle Farben b (010)

[1] Es wird fast die ganze Menge der in Verwendung genommenen salzsauren Tetrahydrocinchoninsäure in das Acetylproduct verwandelt, nur ein minimaler Rest, der offenbar tiefer verändert wurde, hinterbleibt als schmierige Masse, die allen Reinigungsversuchen widerstand.

Schema für roth (c g b);((*A B*)) = 14° 30'
„ „ Natrium (c g b);((*A B*)) = 12 24
„ „ blau (b g c);((*A B*)) = 3 0

Die Acetotetrahydrocinchoninsäure löst sich in Wasser und Alkohol in der Kälte nur schwierig, ziemlich leicht aber in der Hitze auf. Äther vermag die Säure fast nicht aufzunehmen. Die wässerige Lösung wird durch Eisenchlorid nicht verändert und weder von Silbernitrat noch von Bleizucker gefällt. Sie besitzt einen bitteren und schwach säuerlichen Geschmack.

Im Capillarröhrchen erhitzt, erweicht sie bei 157° C., schmilzt aber erst bei 164·5° C. (uncorr.) zu einer lichtgelben Flüssigkeit, die nach dem Abkühlen erst nach sehr langer Zeit wieder krystallinisch erstarrt. Höher erhitzt, färbt sich die Säure braun und erleidet Zersetzung, daher ist sie auch nicht unzersetzt flüchtig.

Die Verbindung enthält kein Krystallwasser.

Die Analysen der bei 100° im Wasserstoffstrom getrockneten Säure ergaben folgende Werthe:

I. 0·3082 Grm. Substanz gaben 0·7398 Grm. Kohlensäure und 0·1695 Grm. Wasser.

II. 0·2361 Grm. Substanz gaben 0·5669 Grm. Kohlensäure und 0·1223 Grm. Wasser.

III. 0·3186 Grm. Substanz gaben 18·5 CC. Stickstoff bei 20·9° C. und 747·9 Mm.

IV. 0·3461 Grm. Substanz gaben 20·1 CC. Stickstoff bei 19·3° C. und 745·9 Mm.

In 100 Theilen:

	I	II	III	IV	$C_{10}H_{10}(C_2H_3O)NO_2$
C	65·46	65·48	—	—	65·75
H	6·11	5·75	—	—	5·93
N	—	—	6·51	6·54	6·39

Die Acetotetrahydrocinchoninsäure verbindet sich nicht mit Säuren oder mit Platinchlorid. Sie enthält aber ein durch Metalle ersetzbares Wasserstoffatom. Die Salze sind, so weit ich sie untersucht habe, alle leicht löslich in Wasser.

Das Ammon- und Kalisalz krystallisiren in feinen farblosen Nadeln, die äusserst hygroskopisch sind.

Die angegebene Formel habe ich nur durch die Untersuchung des Calciumsalzes controlirt. Dasselbe wurde durch Absättigen einer wässerigen Lösung der Säure mit kohlensaurem Kalk hergestellt. Nach dem Verdunsten des Lösungsmittels hinterbleibt ein dicker farbloser Syrup, der erst nach mehrtägigem Stehen, oftmaligem Umrühren und Befeuchten krystallinisch wird. Durch Absaugen der Mutterlaugen auf einer porösen Platte erhält man das Kalksalz als ein weisses glanzloses Pulver, welches unter dem Mikroskope betrachtet als ein Aggregat von vierseitigen, zugespitzten Prismen erscheint. Das Salz ist in Wasser leicht löslich.

Die Analyse der bei 140° getrockneten Verbindung ergab:

I. 0·2681 Grm. Substanz gaben 0·5909 Grm. Kohlensäure und 0·1305 Grm. Wasser.

II. 0·3154 Grm. Substanz gaben 0·0370 Grm. Kalk.

In 100 Theilen:

	I	II	$C_{10}H_9\overset{I}{c}a(C_2H_3O)NO_2+H_2O$
C	60·10	—	60·50
H	5·41	—	5·04
Ca ...	—	8·37	8·40

Das Salz enthält 1 Molekül Krystallwasser, welches schon bei einer wenig über 100° C. gelegenen Temperatur entweicht. Die Bestimmungen ergaben:

I. 0·2889 Grm. Substanz verloren bei 140° 0·0208 Grm. Wasser.

II. 0·3425 „ „ „ „ 140 0·0269 „ „

In 100 Theilen:

	I	II	$C_{10}H_9\overset{I}{c}a(C_2H_3O)NO_2$
H_2O	7.19	7·85	7·03

Die Acetotetrahydrocinchoninsäure ist ein Beleg für die Annahme, dass aus dem N in der Cinchoninsäure eine NHgruppe gebildet wurde und dass durch die Addition von Wasserstoff mindestens eine doppelte Bindung des Pyridinkerns gelöst wurde. Diese Ansicht erhält noch durch das Reactionsproduct, welches bei der

Einwirkung von Jodmethyl

auf die Tetrahydrocinchoninsäure entsteht, eine weitere Bestätigung.

Erhitzt man die feingepulverte, vollkommen trockene Salzsäureverbindung der Hydrosäure, welche mit Methylalkohol befeuchtet ist, mit circa der dreifachen Menge Jodmethyl während 3—4 Stunden auf 100° C., so haben sich im Rohre zwei Schichten gebildet. Die specifisch leichtere, von bräunlicher Farbe, enthält das Reactionsproduct gelöst, während die schwerere farblose Flüssigkeit aus dem überschüssigen Methyljodid und dem offenbar secundär gebildeten Methyläther besteht. Letzterer bedingt auch den Druck, welcher sich beim Öffnen der Röhren kund gibt. Der in Methylalkohol gelöste Röhreninhalt scheidet beim Verdunsten glänzende gelbliche Krystallnadeln und Blättchen ab, welche, nachdem keine Vermehrung derselben eintritt, von der Mutterlauge durch Absaugen getrennt werden. Diese letztere liefert indess nach dem weiteren Eindampfen noch eine kleine Menge der Verbindung, nur ein kleiner Rest trocknet zu einer braunen schmierigen Masse ein. Die krystallinische Ausscheidung besteht sowohl aus der salz- als aus der jodwasserstoffsauren Verbindung des neuen Methylderivates der Tetrahydrocinchoninsäure. Um dieses frei darzustellen, wird die Rohausscheidung zunächst aus Wasser umkrystallisirt. Unlösliche harzige Nebenproducte, welche die Lösung etwas trüben, können bei dieser Gelegenheit durch Ausschütteln mit Äther entfernt werden. Die nach dem Eindampfen sich abscheidenden Krystalle sind fast farblos und rein genug, um auf die Methyltetrahydrocinchoninsäure verarbeitet zu werden. Zu diesem Zwecke wird die kalte, ziemlich verdünnte Lösung jener mit aufgeschlemmtem Silberoxyd versetzt, bis der anfänglich weisse Niederschlag durch einen Überschuss des Oxydes bräunlich gefärbt erscheint. Das Filtrat enthält die freie Säure, da diese in der Kälte fast kein Silberoxyd aufzulösen vermag. Eine Spur Silber, welches die Flüssigkeit enthält, kann, wenn es sich um die Gewinnung der Säure handelt, erst dann in Form von Schwefelsilber entfernt werden, wenn die durch Einleiten von Schwefelwasserstoff bräunlich gefärbte Lösung ziemlich stark eingedampft wurde. Bei noch weiterer Concentration beginnt endlich die Abscheidung von feinen farblosen, wawellitartig gruppirten Nadeln, die, um vollkommen gereinigt zu werden, nach Entfernung der Mutterlauge nur einmal aus Alkohol umkrystallisirt werden müssen.

Aus der alkoholischen Lösung scheidet sich die Verbindung beim allmäligen Verdunsten in grossen, farblosen Krystallen ab, die einen prismatischen Habitus besitzen. Die Säure ist in Wasser zerfliesslich, in Alkohol sehr leicht löslich. Benzol, Äther, Chloroform und dergl. vermögen hingegen nur Spuren derselben aufzunehmen. Die Methyltetrahydrocinchoninsäure hat einen bitterlichen, salpeterartigen Geschmack und röthet blaues Lakmuspapier nur sehr schwach. Ihre wässerige Lösung wird durch Eisenchlorid nicht verändert. Silbernitrat bringt in derselben keine Fällung hervor, erst auf Zusatz von verdünntem Ammoniak entsteht ein weisser Niederschlag, der sich rasch gelblich färbt und welcher beim Erwärmen Silber in Form eines graubraunen Pulvers abscheidet. Durch Bleizucker wird die Säure nicht, wohl aber durch Bleiessig weiss gefällt. Beim längeren Liegen an der Luft färben sich die Krystalle derselben schwach röthlich. Beim Erhitzen schmilzt die Verbindung und erleidet hiebei Zersetzung. Sie ist auch nicht unzersetzt flüchtig. Der Schmelzpunkt wurde zu 169° bis 170° C. (uncorr.) gefunden. Für die Analyse musste die Substanz, da sie schon bei 100° selbst im Wasserstoffstrom partielle Zersetzung erleidet, im Vacuum über Schwefelsäure getrocknet werden. Sie enthält dann noch ein Mol. Wasser, welches sie unter der Luftpumpe nicht abgibt. Die bis zur Gewichtsconstanz getrocknete Verbindung gab folgende Werthe:

I. 0·2527 Grm. Substanz gaben 0·5870 Grm. Kohlensäure und 0·1691 Grm. Wasser.

II. 0·2597 Grm. Substanz gaben 14·9 CC. Stickstoff bei 21° C. und 764 Mm.

In 100 Theilen:

	I	II	$C_{10}H_{10}(CH_3)NO_2+H_2O$
C	63·35	—	63·15
H	7·43	—	7·17
N	—	6·57	6·69

Die lufttrockene Substanz scheint 2 Molecüle Krystallwasser zu enthalten, denn

I. 0·4075 Grm. Substanz verloren unter der Luftpumpe 0·0330 Grm. Wasser,

II. 0·2732 Grm. Substanz verloren unter der Luftpumpe 0.0205 Grm. Wasser.

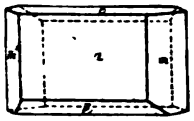
In 100 Theilen:

	I	II	$C_{10}H_{10}(CH_3)NO_2+2H_2O$
H_2O.....	8·10	7·50	7·92 für 1 Mol.

Die Methyltetrahydrocinchoninsäure ist eine äusserst schwache Säure, welche kohlensaure Salze fast nicht zu zerlegen vermag. Die Salze derselben sind äusserst zerfliesslich und haben keine einladenden Eigenschaften. Von besonderer Schönheit aber sind die Verbindungen der Methyltetrahydrocinchoninsäure mit den Mineralsäuren, welche sich durch eminente Krystallisationsfähigkeit auszeichnen.

Die Salzsäureverbindung wird erhalten durch Abdampfen der Lösung, welche durch Behandlung der Rohkrystallisation mit Silberoxyd, wie oben angegeben, resultirte, mit Salzsäure. Nach dem Abkühlen der eingeengten Lösung scheiden sich grosse glänzende Krystalle ab, welche schwach gelblich gefärbt sind. Durch einmaliges Umkrystallisiren derselben aus ganz verdünnter Salzsäure gewinnt man die Substanz beim langsamen Abdunsten der Flüssigkeit über Schwefelsäure in sehr grossen, vollkommen farblosen Krystallen, welche meist staurolithartige Durchkreuzungszwillinge bilden, die fast Demantglanz besitzen. Herrn Dr. Březina verdanke ich die nachfolgenden Angaben:

Fig. 2.



Krystallsystem: Monoklin,

Elemente $a:b:c = 1·2955:1:1·1925$

$\beta = 93° 25·'5$

Formen $a(100)$, $c(001)$, $d(101)$, $e(\bar{1}01)$, $m(110)$ und eine unbestimmbare, negative Hemipyramide (hkl).

Spaltbarkeit nicht bemerkbar.

Winkel:

	Flächen	Rechnung	Messung
$a\ m$	(100) (110)	—	52° 17·2′
$a\ d$	(100) (101)	45° 32′	45 27
$d\ c$	(101) (001)	41 3	41 3
$c\ e$	(001) ($\bar{1}$01)	44 12	44 12
$e\ \bar{a}$	($\bar{1}$01) ($\bar{1}$00)	—	49 13·8
$a\ c$	(100) (001)	—	86 34·5
$c\ m$	(001) (110)	87° 54′	88 23

Optische Orientirung: Axenebene die Symmetrieebene. Schema:

$$(100)\, b\varsigma = 90° - [(17°12')]_{Na};\ \rho < \upsilon.$$

Die Salzsäureverbindung ist im Wasser namentlich im warmen, leicht löslich, doch nicht so leicht wie die der Tetrahydrocinchoninsäure.

Beim Erhitzen auf 100° färbt sie sich gelblichroth in Folge einer spurenweise eingetretenen Zersetzung. Dies ist der Grund, warum auch diese Verbindung für die Analyse im Vacuum getrocknet werden musste. Die lufttrockenen Krystalle enthalten ein Molecül Krystallwasser, welches sie im luftleeren Raume nicht abgeben. Die Zahlen, welche erhalten wurden, sind:

I. 0·2912 Grm. Substanz gaben 0·5795 Grm. Kohlensäure und 0·1785 Grm. Wasser.

II. 0·3798 Grm. Substanz gaben 18·2 CC. Stickstoff bei 22·9° C. und 771·8 Mm.

III. 0·2190 Grm. Substanz gaben 0·1264 Grm. Chlorsilber.

In 100 Theilen:

	I	II	III	$C_{10}H_{10}(CH_3)NO_2+HCl+H_2O$
C	54.27	—	—	53·76
H	6·81	—	—	6·51
N	—	5·49	—	5·70
Cl	—	—	14·28	14·46

Die salzsaure Methyltetrahydrocinchoninsäure gibt auch mit Platinchlorid eine Doppelverbindung, welche sich in grossen gelbrothen Krystallen abscheidet, wenn man eine Lösung der vorigen Verbindung in Salzsäure mit Platinchlorid versetzt und verdunsten lässt. Die starkglänzenden Krystalle erreichen eine beträchtliche Grösse, sind aber wegen ihrer starken Flächenkrümmung zu einer krystallographischen Untersuchung nicht geeignet. Die Platindoppelverbindung dürfte allem Anscheine nach dem monoklinen System angehören.

Die Chlor- und Platinbestimmung in der wasserfreien, bei 105° C. getrockneten Verbindung ergab:

I. 0·3918 Grm. Substanz gaben 0·0949 Grm. Platin,
II. 0·2214 „ „ „ 0·2667 Grm. Chlorsilber.

In 100 Theilen:

	I	II	$2(C_{10}H_{10}(CH_3)NO_2+HCl)+PtCl_4$
Pt.....	24·22	—	24·05
Cl.....	—	29·80	29·44

Die jodwasserstoffsaure Methyltetrahydrocinchoninsäure, wird in derselben Weise wie die Salzsäureverbindung dargestellt durch Abdampfen einer mit Jodwasserstoff versetzten Lösung der freien Säure. Sie scheidet sich in grossen Krystallen ab, welche vom etwas abgeschiedenen Jod bräunlich gelb gefärbt sind. Durch Wiederauflösen derselben im Wasser werden beim allmäligen Eindunsten der Flüssigkeit fast farblose, stark glänzende Krystalle erhalten, welche, falls einige Sorgfalt auf das Krystallisiren ververwendet wird, von beliebiger Grösse gewonnen werden können. Die Bestimmung ihrer krystallographischen Verhältnisse, welche ebenfalls von Dr. Brezina vorgenommen wurde, ergab:

Fig. 3.

Krystallsystem: monoklin.

Elemente $a:b:c = 1·3104:1:1·1417$

$\beta = 90° 46'·6$

Formen: $a(100)$, $c(001)$, $d(101)$, $e(\bar{1}01)$, $m(110)$ und eine unbestimmbare Pyramide $(\bar{h}\,h\,l)$.

Spaltbarkeit nicht bemerkbar.

Winkel:

	Flächen	Rechnung	Messung
a m	(100) (110)	52° 39′	52° 42′
a d	(100) (101)	48 30	48 20
d c	(101) (001)	40 44	40 54
c e	(001) ($\bar{1}$01)	41 24	41 24
e $\bar{a}$	($\bar{1}$01) ($\bar{1}$00)	49 23	49 23
a c	(100) (001)	89 13	89 14
c m	(001) (110)	89 32	89 33

Optische Orientirung: Axenebene die Symmetrieebene. Schema:

$$(100)\,b\,\underline{a} = 138° 30′ + [(38° 54′)]\,Na,\ \rho > \upsilon.$$

Die Verbindung ist isomorph mit der Salzsäureverbindung der Methyltetrahydrocinchoninsäure.

Auch diese Jodverbindung verträgt nicht höhere Temperaturen und sie musste desshalb auch unter der Luftpumpe getrocknet werden, hiebei gibt sie ihr Krystallwasser nach einiger Zeit ab und ist nach Verlust desselben sehr hygroskopisch. Die Analyse der getrockneten Verbindung ergab:

I. 0·3016 Grm. Substanz gaben 0·4601 Grm. Kohlensäure in 0·1314 Grm. Wasser,

II. 0·4488 Grm. Substanz gaben 16·1 CC. Stickstoff bei 21° C. und 767·8 Mm.

III. 0·3588 Grm. Substanz gaben 0·2636 Grm. Jodsilber.

In 100 Theilen:

	I	II	III	$C_{10}H_{10}(CH_3)NO_2+HJ$
C	41·60	—	—	41·38
H	4·84	—	—	4·38
N	—	4·13	—	4·38
J	—	—	39·70	39·81.

Die Wasserbestimmungen gaben:

I. 0·3173 Grm. der lufttrockenen Substanz verloren im Vacuum 0·0157 Grm. Wasser.

II. 0·3775 Grm. der lufttrockenen Substanz verloren im Vacuum 0·0187 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	I	II	$C_{10}H_{10}(CH_3)NO_2+HJ+H_2O$
H_2O	4·94	4·95	5·34

Durch die Einwirkung von Jodmethyl auf die salzsaure Tetrahydrocinchoninsäure unter den Verhältnissen, wie ich sie beschrieben habe, entstehen vornehmlich nur die salz- und jodwasserstoffsaure Verbindung des Methylproductes. Lässt man aber die Einwirkung des Jodids sehr lange andauern oder nimmt man dieselbe bei höherer Temperatur vor, so treten andere ölige in

Wasser unlösliche Producte auf, welche wohl in nächster Beziehung zu den von A. W. Hofmann beschriebenen Körpern stehen dürften, die derselbe bei der energischen Einwirkung von Jodmethyl auf Chinolin etc. erhalten hat. Auf die Untersuchung dieser Producte bin ich aber nicht eingegangen.

Oxydation der Tetrahydrocinchoninsäure.

Es liess sich erwarten, dass durch die Einwirkung von oxydirenden Agentien die Hydrosäure wieder in Cinchoninsäure zurückverwandelt werden könne. Versuche, die ich in dieser Richtung angestellt habe, ergaben aber das bemerkenswerthe Resultat, dass unter keiner Bedingung diese Säure entstand. Die Oxydationsversuche habe ich unter den verschiedensten Reactionsverhältnissen ausgeführt, sowohl die salzsaure Tetrahydrosäure, als auch die mittelst schwefelsaurem Silber daraus dargestellte Schwefelsäureverbindung in saurer sowohl, als in alkalischer Lösung mit Chromsäure, chromsaurem Kali, übermangansaurem Kali, Silberoxyd, Braunstein, Salpetersäure etc. oxydirt und auch trotz Einhaltung der theoretisch erforderlichen Mengenverhältnisse weder Cinchoninsäure noch die so leicht aus dieser entstehende Pyridintricarbonsäure erhalten können, wenn ich die zur Bildung der letzteren nothwendige Menge des Oxydationsmittels zur Wirkung brachte. Statt der erwarteten Säuren konnte ich aus der Reactionsflüssigkeit nur auf mühevolle Art einen schwach sauren, schwer zu reinigenden Syrup erhalten, in welchem erst nach Wochen sich Krystalle zu bilden begannen, die aber bestimmt nicht die erwünschten Säuren waren. Die Menge dieses krystallinischen Productes machte aber eine Untersuchung, wenigstens vorläufig, unmöglich.

Ich habe ausserdem noch die

Einwirkung von salpetriger Säure

in Form ihres Silbersalzes auf die salzsaure Tetrahydrosäure studirt. Bedall und Fischer[1] haben durch eine ähnliche Reaction auf das Hydroproduct des α-Chinophenols ein Nitrosoproduct enthalten und es war in dem vorliegenden Falle die Bildung eines analogen Körpers zu gewärtigen.

---

[1]) Berliner Berichte, 1881. 1369.

In der That entsteht durch dieses Reagens eine Nitrosotetrahydrocinchoninsäure, welche einen weitern Beleg für das Vorhandensein einer NH-Gruppe in dem Hydroproduct der Cinchoninsäure bildet.

Die Verbindung entsteht, wenn in die heisse, verdünnte Lösung der salzsauren Tetrahydrocinchoninsäure die Menge von reinem, getrockneten, salpetrigsauren Silberoxyd eingetragen wird, welche nothwendig ist, um alles Chlor in Chlorsilber umzuwandeln. Die von diesem abfiltrirte Lösung scheidet beim Erkalten gelbe, prismatische Nadeln ab. Ein kleiner, in Wasser gelöst bleibender Antheil der Verbindung kann durch Ausschütteln mit Äther der Flüssigkeit entzogen werden.

Die Reinigung dieses ziemlich zersetzlichen Nitrosoproductes ist ohne Verlust nicht zu bewerkstelligen und nur durch öfteres Umkrystallisiren aus heissem Wasser, unter Anwendung von etwas Kohle zu erreichen. Man erhält schliesslich die Verbindung in zarten, gelblichweissen, glänzenden, kleinen, prismenförmigen Nadeln, deren Schmelzpunkt bei 137° C. (uncorr.) gefunden wurde. Die Nitrosotetrahydrocinchoninsäure löst sich kaum im kalten, leicht aber im heissen Wasser auf. Alkohol nimmt sie leicht, Äther etwas schwieriger auf. Die Verbindung krystallisirt ohne Wasser. Die Analyse der bei 100° C. in einer Kohlensäureathmosphäre getrockneten Substanz gab folgende Werthe:

I. 0·2819 Grm. Substanz gaben 0·6046 Grm. Kohlensäure und 0·1304 Grm. Wasser.

II. 0·2680 Grm. Substanz gaben 32·7 CC. Stickstoff bei 18° C. und 749·4 Mm.

In 100 Theilen:

	I	II	$\underbrace{C_{10}H_{10}(NO)NO_2}$
C	58·49	—	58·25
H	5·13	—	4·85
N	—	13·89	13·59.

Die Nitrosoverbindung wird durch Kochen mit verdünnter Schwefelsäure verharzt, durch Behandlung mit concentrirter aber

entstehen Producte, welche krystallisirende Salze liefern, dieselben gehen aber auch durch die

Einwirkung von Schwefelsäure

auf die Tetrahydrocinchoninsäure hervor. Koenigs[1] hat das Piperidin durch Erhitzen mit concentrirter Schwefelsäure auf circa 300° C. zu Pyridin oxydirt. Es war daher die Möglichkeit vorhanden, auch aus der Tetrahydrocinchoninsäure auf diese Art zu der Cinchoninsäure zu gelangen. Diese Säure entsteht zwar bei dieser Behandlungsweise nicht, doch werden hiebei Körper gebildet, welche als Substitutionsproducte derselben betrachtet werden können. Zur Ausführung dieser Reaction übergiesst man die getrocknete Salzsäureverbindung der Tetrahydrocinchoninsäure mit circa der fünffachen Menge concentrirter Schwefelsäure (oder besser mit einem Gemisch von gleichen Theilen Vitriolöl und englischer Schwefelsäure), wodurch Salzsäure in Freiheit gesetzt wird. Nun kann die braune Lösung bis auf 160° in einem Kolben im Ölbade erhitzt werden, ohne dass eine Einwirkung bemerkbar wäre, erst bei 180° tritt stürmische Entwicklung von schwefeliger Säure ein, welche sich allmälig mässigt und endlich trotz Steigerung der Temperatur bis auf 220° gänzlich aufhört.

Die nach dem Erkalten im Wasser eingetragene Reactionsmasse scheidet eine unerhebliche Menge von humösen Zersetzungsproducten ab. Wird die Lösung dann mit Bleicarbonat abgesättigt und hierauf vom schwefelsauren Blei filtrirt, so erhält man nach dem Zersetzen der Flüssigkeit mit Schwefelwasserstoff und dem Eindampfen einen braunen, sauren Syrup, welcher nur höchst unvollständig krystallisirt. Derselbe enthält je nach der Einwirkungsdauer und Temperatur wechselnde Mengen von mindestens zwei Sulfosäuren, welche selbst kaum krystallisationsfähig sind, aber durch ein langwieriges fractionirtes Krystallisiren der Barytsalze zu trennen sind. Dadurch resultirt endlich ein Salz, welches sich in weissen, feinen Nadeln, die zu krümlichen Massen vereint sind, abscheidet, und das nach der Analyse als das Barytsalz einer Disulfocinchoninsäure $[C_{10}H_5(SHO_3)_2NO_2]$ betrachtet werden kann. Eine zweite, viel löslichere Verbindung, welche kaum deutlich krystallisirt, gibt, mit Natroncarbonat

[1] Berliner Berichte, 1879. 2341.

gefällt, ein leicht lösliches Natronsalz, welches in undeutlich krystallinischen Krusten erscheint und als Natronsalz einer Trisulfocinchoninsäure angesprochen werden muss. Die Ausbeute an diesen Salzen aus der Tetrahydrocinchoninsäure ist nicht befriedigend. Durch Verschmelzen der erwähnten Producte mit Ätzkali wird ein Austausch der SHO_3-Reste gegen die OH-Gruppen bewerkstelligt. Über die Sulfosäuren, sowie über die correspondirenden Oxydproducte werde ich in einiger Zeit weiter berichten.

Die Tetrahydrocinchoninsäure zeigt ein interessantes Verhalten bei der

Destillation über Zinkstaub.

Wird ein Gemenge der salzsauren Hydrosäure mit circa der dreissigfachen Menge Zinkstaub, unter Darüberleiten eines mässigen Wasserstoffstromes, allmälig bis zur hellen Rothglut erhitzt, so entweicht anfänglich etwas Wasserdampf, dann eine kleine Menge von uncondensirbaren Dämpfen und schliesslich beginnt ein schweres, lichtgelb gefärbtes, basisches Öl zu destilliren, welches einen chinolinartigen Geruch besitzt. Dasselbe kann nach dem Trocknen, trotz öfterer Rectification nicht in eine reine Form gebracht werden, denn ein kleiner Antheil des Productes ist verändert, färbt sich durch Platinchlorid kirschroth und wird nach dem Auflösen in Salzsäure bei der Siedehitze verharzt. Am vortheilhaftesten wird die Reinigung, da die vorliegende Base durch Oxydationsmittel nur sehr schwierig angegriffen wird, durch partielle Oxydation bewerkstelligt. Zu diesem Ende werden in die mit viel Wasser verdünnte, siedend heisse Lösung des Rohdestillates in Schwefelsäure kleine Portionen Chromsäure solange eingetragen, als beim Erhitzen noch flüchtige, pyrrolartig riechende Producte auftreten. Hierauf wird die mit Ätzkali vermischte Flüssigkeit in einer Retorte im Wasserdampfstrome abdestillirt. Das übergehende, milchig getrübte Wasser scheidet nach kurzer Zeit schwere, fast farblose Öltropfen ab. Durch Zugabe von festem Kali befördert man die Ausscheidung. Das Öl wird endlich mit frisch geschmolzenem Ätzkali getrocknet und dann öfters destillirt. Nunmehr geht die Base innerhalb zweier

Grade vollkommen farblos über, hat einen an Chinolin erinnernden Geruch, löst sich in Salzsäure vollkommen und ohne Farbenveränderung auf, welche Lösung auf Zusatz von Platinchlorid einen gelben, krystallinischen Niederschlag gibt. Die neue Verbindung löst sich in Äther und Alkohol leicht, in Wasser fast gar nicht auf und besitzt einen brennenden Geschmack.

Der Siedepunkt dieser gegen Licht und Luft nahezu unempfindlichen Base wurde beim Normal-Barometerstand zu 256·8° C. gefunden (corrigirt).

Durch Destillation der salzsauren Hydrocinchoninsäure mit Zinkstaub war zu erwarten, dass im Sinne der Gleichung

$$\underbrace{C_{10}H_{11}NO_2} = CO_2 + \underbrace{C_9H_{11}N}$$

Tetrahydrochinolin gebildet werde. Die Analysen des Productes lieferten jedoch Zahlen, welche nicht mit den für diese Verbindung berechneten in Einklang zu bringen sind, sondern Werthe, die mit den für die Verbindung $C_{10}H_9N$ (Lepidin) erforderlichen in vollkommener Übereinstimmung sich befinden.

Demzufolge scheint die Reaction in folgender Gleichung ihren Ausdruck zu finden.

$$\underbrace{C_{10}H_{11}NO_2} + H_2 = \underbrace{C_{10}H_9N} + 2H_2O.$$

Tetrahydrocinchoninsäure. Lepidin.

Die Verbrennung dieser Base ergab folgende Daten:

I. 0·2712 Grm. Substanz gaben 0·8342 Grm. Kohlensäure und 0·1531 Grm. Wasser.

II. 0·1875 Grm. Substanz gaben 0·5780 Grm. Kohlensäure und 0·1123 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	I	II	Berechnet für $C_{10}H_9N$
C.....	83·88	84·07	83·91
H.....	6·27	6·65	6·29.

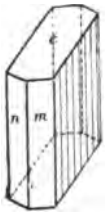
Die Ausbeute an dieser Base, welche die Bezeichnung Cincholepidin führen möge, beträgt ungefähr 58 Percent der theoretischen, denn ich habe aus 30 Grm. der salzsauren Tetrahydrocinchoninsäure 11·7 Grm. der reinen Verbindung gewonnen,

während der gegebenen Gleichung gemäss 20·1 Grm. derselben hätten entstehen müssen.

Dass der beschriebenen Base wirklich die Zusammensetzung $C_{10}H_9N$ zukömmt, wurde durch die Bestimmung der Dampfdichte, welche auf Wasserstoff bezogen zu 70·9 gefunden wurde (berechnet 71·5), ferner durch die Untersuchung des Platin- und Golddoppelsalzes erwiesen.

Platindoppelverbindung des Cincholepidins. Auf Zusatz von Platinchlorid zu einer halbwegs concentrirten Lösung der Base in Salzsäure wird fast sofort ein krystallinischer, hellgelb gefärbter Niederschlag abgeschieden. Derselbe ist sowohl in heissem Wasser, als auch in siedender Salzsäure löslich. Aus einer Lösung in letzterer scheidet sich die Doppelverbindung in grösseren prismenförmigen, triklinen Nadeln ab, wenn das Abdampfen langsam vor sich geht. Die Krystalle sind stark glänzend und von gelbrother Farbe. Sie wurden von Dr. Březina auf ihre krystallographischen Eigenschaften untersucht. Er theilt diesbezüglich Folgendes mit:

Fig. 4.



Krystallsystem: Triklin.

Elemente wegen Mangels der nothwendigen Flächenzahl nicht ermittelbar.

Formen $c(001)$ $m(110)$ $n(1\bar{1}0)$.

Spaltbarkeit $c(001)$ vollkommen.

Winkel in roher Näherung:

	Flächen	Messung
c m	(001) (110)	67° 29′
c n	(001) (1$\bar{1}$0)	78 8
m n	(110) (1$\bar{1}$0)	49 42

Die Analyse der bei 105°C. getrockneten, krystallwasserfreien Substanz ergab folgende Zahlen:

I. 0·4400 Grm. Substanz gaben 0·5493 Grm. Kohlensäure und 0·1049 Grm. Wasser.

II. 0·5204 Grm. Substanz gaben 0·1466 Grm. Platin.

III. 0·3207 Grm. Substanz gaben 0·3927 Grm. Chlorsilber.

IV. 0·6335 „ „ „ 23·4 CC. Stickstoff bei 752·1 Mm. und 17·8°C.

In 100 Theilen:

	I	II	III	IV	$2(C_{10}H_9N+HCl)+PtCl_4$
C	34·04	—	—	—	34·51
H	2·65	—	—	—	2·86
Pt	—	28·17	—	—	27·95
Cl	—	—	30·29	—	30·62
N	—	—	—	4·23	4·02.

Golddoppelverbindung des Cincholepidins. Dieses schwer lösliche Salz fällt auf den Zusatz von Goldchlorid zu einer Lösung der Base in HCl sofort in mikroskopischen feinen Nadeln heraus. Der Niederschlag ist sowohl in grossen Mengen Wasser, als auch in Salzsäure in der Hitze löslich und scheidet sich beim Abkühlen in deutlichen, lichtgelben, glänzenden, anscheinend monoklinen, prismenförmigen Nadeln aus. Die Verbindung enthält kein Krystallwasser. Wird die Doppelverbindung längere Zeit auf 100—110°C. erhitzt, so wird sie zersetzt, was sich durch das Auftreten eines flüchtigen, campherartig riechenden Productes, durch die fortwährende Gewichtsabnahme und durch das Schmelzen der Verbindung schon bei dieser Temperatur zu erkennen gibt, da der Schmelzpunkt der Doppelverbindung im Capillarröhrchen bestimmt zu 188—190°C. gefunden wurde. Die Chlor- und Goldbestimmung der über Schwefelsäure getrockneten Verbindung ergab:

I. 0·3231 Grm. Substanz geben 0·1308 Grm. Gold.

II. 0·2874 Grm. Substanz geben 0·3452 Grm. Chlorsilber.

In 100 Theilen:

	I	II	$C_{10}H_9N+HCl+AuCl_3$
Au	40·48	—	40·66
Cl	—	29·71	29·46

[1] Pt = 194·4.

Ist nach dem Vorstehenden die Zusammensetzung der, durch Destillation der salzsauren Tetrahydrocinchoninsäure über Zinkstaub gewonnenen Base nach der Formel $C_{10}H_9N$ als bewiesen zu erachten, so ist in dem Umstande, dass die

Oxydation des Cincholepidins

mit Chromsäure, Cinchoninsäure liefert, ein weiterer Beweis hiefür erbracht.

Um Cinchoninsäure aus der Base, welche von Chromsäure ungemein schwierig angegriffen wird, zu erhalten, verfährt man auf folgende Weise: 10 Grm. der Base, welche in beiläufig 80 CC Wasser vertheilt sind, werden durch Zusatz von Schwefelsäure in Lösung gebracht, hierauf wird Chromsäure (und zwar beiläufig die theoretisch erforderliche Menge) hinzugegeben. Hiedurch scheidet sich eine braungelbe harzige Masse, das Chromat der Base, ab. Nun wird so lange tropfenweise concentrirte Schwefelsäure zugesetzt, bis die Ausscheidung wieder in Lösung gebracht ist, worauf diese bis zur Reduction der Chromsäure am Rückflusskühler im Sieden erhalten wird. Keineswegs aber ist mit dem Verbrauche des Oxydationsmittels auch die Gesammtmenge der Base oxydirt worden.

Erst durch wiederholtes Zufügen neuer Mengen von Chromsäure und (im Falle als wieder eine harzige Abscheidung erfolgen sollte) von Schwefelsäure, gelingt es die ganze Quantität des Cincholepidins zu verändern, so dass eine Probe der Flüssigkeit auf Zusatz von Kalilauge beim Erwärmen keinen oder einen nur höchst unbedeutenden Geruch nach unveränderter Base entwickelt. Um dies zu erreichen, ist beiläufig die $2^1/_2$fache Menge der berechneten Chromsäure und eine Einwirkungsdauer von drei bis vier Tagen erforderlich.

Die Abscheidung der Cinchoninsäure aus der Lösung, in welcher der etwa vorhandene Chromsäureüberschuss durch schwefelige Säure zerstört wurde, gelingt durch Umsetzung des Barytsalzes mit essigsaurem Kupfer. Das Barytsalz kann aus der Oxydationsflüssigkeit durch Fällen des Chromoxyds und der Schwefelsäure mit Barythydrat hergestellt werden, oder durch Abscheidung des Chroms mit Ammoniak, worauf das Filtrat zur Trockne gebracht, der Salzrückstand mit Alkohol extrahirt und

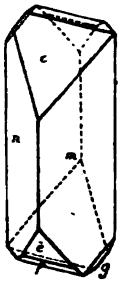
die wässerige Lösung der nach dem Abdestilliren desselben hinterbleibenden Masse mit Barytwasser behandelt wird. Durch Erwärmen der Barytverbindung mit einer concentrirten Lösung von essigsaurem Kupfer fällt nach einiger Zeit das prächtig veilchenblaue krystallinische Kupfersalz heraus, welches für die Cinchoninsäure so charakteristisch ist. Durch Zerlegen des Kupfersalzes mit Schwefelwasserstoff in der Siedhitze wurde die Säure in Freiheit gesetzt, welche nach dem Auskrystallisiren alle Eigenschaften der Cinchoninsäure zeigte.

Eine scharfe Identificirung wurde durch die Analyse und durch den krystallographischen Vergleich der Platindoppelverbindung der salzsauren Cinchoninsäure durchgeführt.

Vor mehreren Jahren habe ich die Platinverbindung der salzsauren Cinchoninsäure dargestellt und habe jetzt gefunden, dass diese durch Wasser zersetzliche Verbindung sich in grossen Mengen siedender Salzsäure löst und aus dieser Lösung beim ängeren Stehen in wohl ausgebildeten, prächtig glänzenden, wasserfreien Krystallen abscheidet.

Ich habe auf diese Art die Platindoppelverbindung von Cinchoninsäure, welche durch Oxydation des Cinchonins gewonnen war und die der Säure, welche aus dem Cincholepidin entstanden ist, erhalten. Beide Verbindungen waren schon ihrem Ansehen nach identisch. Herr Dr. Březina führte die Messung und den Vergleich der beiden Platindoppelsalze aus, worüber er Folgendes mittheilt:

Fig. 5.



Krystallsystem: Triklin.

Elemente: $a : b : c = 1 \cdot 9622 : 1 : 1 \cdot 3590$

$\zeta = 103° 7 \cdot 4'$; $\eta = 143° 15 \cdot 5'$; $\zeta = 79° 5 \cdot 9'$

Formen: a (100), c (001), d ($\bar{1}01$), e ($\bar{2}01$), m (110), n ($1\bar{1}0$), o ($3\bar{1}0$), p ($\bar{1}12$), g ($\bar{1}\bar{1}1$), q ($\bar{3}\bar{1}2$).

Spaltbarkeit ausgezeichnet: e ($\bar{2}01$)

Winkel:

	Flächen	Rechnung	Messung
—	100.010	85°19′	—
a.m	100.110	50 37	50°47′
a.o	100.3$\bar{1}$0	27 29	27 29
a.n	100.1$\bar{1}$0	61 9	61 14
m.n	110.1$\bar{1}$0	111 46	112 5
a.c	100.001	37 23	37 17
a.d	100.$\bar{1}$01	78 58	78 57
ā.e	$\bar{1}$01.$\bar{2}$01	47 25	47 31
o.c	3$\bar{1}$0.001	86 10	—
m.c	110.001	52 22	52 30
n.c	1$\bar{1}$0.001	74 46	74 42
p.m	$\bar{1}$12.110	36 11	35 38
g.c	1$\bar{1}$′.001	77 39	77 39
q.d	3$\bar{1}$2.$\bar{1}$01	54 43	54 52
—	010.001	75 57	—

Optische Orientirung: auf der Spaltungsfläche *e* tritt eine optische Axe nach vorne links unter $((16°))_{Na}$ aus; Axendispersion kräftig $\rho > v$, Charakter gegen die Flächennormale positiv; die positive Mittellinie ist die stumpfe, somit Bisectrix negativ mit $\rho < v$.

Das Platindoppelsalz, welches aus dem Oxydationsproduct des Cincholepidins dargestellt war, ergab bei der Messung die folgenden Winkelwerthe, welche neben die der ersten Verbindung gestellt sind:

	Platindoppelsalz der Säure aus Cinchonin Rechnung	Platindoppelsalz der Säure aus Cincholepidin Messung
m.n	111°46′	112°36′
n.c	74 46	74 58
n.g	44 38	43 28
c.g	77 39	77 30
c.m	52 22	52 41

Aus dieser Zusammenstellung geht die Identität der beiden Platindoppelsalze mit Bestimmtheit hervor.

Endlich gab die aus dem Oxydationsproducte des Cincholepidins dargestellte Platinverbindung bei der Analyse, für welche sie bei 105° C. getrocknet wurde, folgende Zahlen:

I. 0·3679 Grm. Substanz gaben 0·4318 Grm. Kohlensäure und 0·0821 Grm. Wasser

II. 0·4244 Grm. Substanz gaben 0·1097 Grm. Platin

III. 0·3117 „ „ „ 0·3523 „ Chlorsilber

IV. 0·5795 „ „ „ 20·2 CC. Stickstoff bei 21° C. und 744·6^{mm}.

In 100 Theilen:

	I.	II.	III.	IV.	$2(C_{10}H_7NO_2 + HCl) + PtCl_4$
C	32·01	—	—	—	31·77
H	2·48	—	—	—	2·11
Pt	—	25·85	—	—	25·73
Cl	—	—	27·96	—	28·19
N	—	—	—	3·89	3·70

Bei der Oxydation des Cincholepidins, der Base, welche der Cinchoninsäure entspricht, werden jedoch keine guten Ausbeuten erzielt und kaum 20% der theoretischen Menge, welche der Gleichung

$$\underbrace{C_{10}H_9N}_{\text{Cincholepidin}} + O_3 = \underbrace{C_{10}H_7NO_2}_{\text{Cinchoninsäure}} + H_2O$$

entsprechen würde, erhalten. Die Ursache hievon liegt in dem Umstande, dass ein Theil des Cincholepidins total verbrannt wird.

Andere Producte ausser einer minimalen Menge einer syrupösen Substanz wurden bei der Oxydation neben Cinchoninsäure nicht gebildet.

Fasst man die Resultate der vorstehenden Mittheilungen zusammen, so ergibt sich:

1. Die Tetrahydrocinchoninsäure enthält eine NHgruppe und es ist daher der Eintritt des Wasserstoffes in den Chinolinrest wenigstens theilweise im Pyridinkern erfolgt;

2. die Tetrahydrocinchoninsäure ist durch die meisten der Oxydationsmittel nicht mehr in Cinchoninsäure rückzuführen, auch kann aus ihr die Pyridintricarbonsäure durch diese Mittel nicht erhalten werden; nur durch

3. die Behandlung von Schwefelsäure entstehen aus der Tetrahydrosäure Gemische von Sulfosäuren der Cinchoninsäure;

4. bei der Destillation der Tetrahydrocinchoninsäure über Zinkstaub erhält man das der Cinchoninsäure zu Grunde liegende Lepidin (Cincholepidin), welches bei der Oxydation diese Säure liefert.

Diese Erfahrungen, namentlich aber die Beobachtung, dass das Chinolinderivat, die Tetrahydrocinchoninsäure bei der Oxydation keine Cinchoninsäure und kein mit dem Chinolin nahe verwandtes Product liefert, können vielleicht als ein berücksichtigungswürdiger Fingerzeig dafür gelten, dass im Cinchonin diejenige Hälfte, welche bei der Oxydation keine Cinchoninsäure liefert, trotz dieses Umstandes doch aus einem Chinolinrest gebildet sein kann. Dieser Ausspruch soll indess in keiner Weise der vielfach verbreiteten Ansicht, nach welcher die zweite Hälfte des Cinchonins aus einem aethylirten und gleichzeitig hydrirten Pyridinkern bestünde, entgegentreten, sondern nur auf die Möglichkeit einer solchen Gruppirung hinweisen.

Ich beabsichtige die Untersuchung der Tetrahydrocinchoninsäure in der in der ersten Mittheilung angedeuteten Richtung weiter zu verfolgen und hoffe in Bälde hierüber weiter berichten zu können.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.

SEP 12 1882

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXV. BAND. II. HEFT.

Jahrgang 1882. — Februar.

(Mit 4 Tafeln und 1 Holzschnitt.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1882.

INHALT

des 2. Heftes Februar 1882 des LXXXV. Bandes, II. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

IV. Sitzung vom 3. Februar 1882: Übersicht 205

V. Sitzung vom 9. Februar 1882: Übersicht 209

Maly u. *Hinteregger*, Studien über Caffeïn und Theobromin. III. Abhandlung. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 214

Maly u. *Andreasch*, Studien über Caffeïn und Theobromin. IV. Abhandlung 221

Senhofer, Über Naphtalintetrasulfosäure. [Preis: 10 kr. — 20 Pfg.] 240

Herzig, Über die Constitution des Guajols. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 247

Goldschmiedt u. *Herzig*, Über das Verhalten der Kalksalze der drei isomeren Oxybenzoësäuren und der Anissäure bei der trockenen Destillation 255

Goldschmiedt, Notiz über das Vorkommen von Bernsteinsäure in einem Rindenüberzug auf *Morus alba* 265

Lippich, Über polaristrobometrische Methoden. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 70 kr. = 1 RMk. 40 Pfg.] 268

Wassmuth, Über die Tragkraft von ringförmigen Elektromagneten. [Preis: 15 kr. 30 Pfg.] 327

Margules, Die Rotationsschwingungen flüssiger Cylinder. [Preis: 22 kr. = 44 Pfg.] 343

Adler, Über Strictionslinien der Regelflächen zweiten und dritten Grades. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 369

Peschka, Neue Eigenschaften der Normalenflächen für Flächen zweiten Grades längs ebener Schnitte. (Mit 3 Tafeln.) [Preis: 1 fl. = 2 RMk.] 381

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 75 kr. = 3 RMk. 50 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXV. Band. II. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

IV. SITZUNG VOM 3. FEBRUAR 1882.

Herr Dr. L. J. Fitzinger übernimmt als Alterspräsident den Vorsitz.

Der Vorsitzende gibt der tiefen Trauer Ausdruck über das am 1. Februar d. J. erfolgte Ableben des Vicepräsidenten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften

des Herrn k. k. Hofrathes

Dr. ADAM FREIHERRN v. BURG.

Die Mitglieder geben ihr Beileid durch Erheben von den Sitzen kund.

Die Direction des k. k. militär-geographischen Institutes übermittelt 27 Blätter (19. Lieferung) Fortsetzungen der Specialkarte der österreichisch-ungarischen Monarchie (1 : 75000).

Das w. M. Herr Prof. E. Hering übersendet eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. Sigmund Mayer in Prag: „Beitrag zur histologischen Technik".

Herr Prof. Dr. A. Adamkiewicz in Krakau übersendet zu seiner Abhandlung über die Blutgefässe des menschlichen Rücken-

markes den II. Theil, betitelt: „Die Gefässe der Rückenmarksoberfläche".

Herr Dr. Carl Braun, Director der erzbischöflichen Sternwarte in Kalocsa (Ungarn) übersendet ein versiegeltes Schreiben mit dem Motto: *„Lucrum temporis lucrum scientiae"* und ersucht um Wahrung der Priorität bezüglich des Inhaltes.

Das c. M. Herr Prof. Sigm. Exner überreicht eine Abhandlung von Herrn Dr. B. Mandelstamm aus Kiew, betitelt: „Studien über Innervation und Atrophie der Kehlkopfmuskeln".

An Druckschriften wurden vorgelegt.

Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique: Bulletin. 50e Année, 3e Série, Tome 2. Nr. 11. Bruxelles, 1881; 8°.

Accademia, R. Virgiliana di Mantova: Atti e Memorie. Mantova, 1881; 8°. — Del Lago di Garda e del suo emissario il Mincio del Jacopo Martinelli. Mantovo, 1881; 8°.

Apotheker-Verein allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XX. Jahrgang Nr. 3, Wien, 1882; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3e période. Tome VI. Nr. 12.—15. Décembre 1881. Genève, Lausanne, Paris, 1881; 8°. — Des mouvements périodiques du Sol accusés par des niveaux à bulle d'air; par M. Ph. Plantamour. Genève, Lausanne, Paris, 1881; 8°.

Chemiker-Zeitung: Centralorgan. Jahrgang VI. Nr. 3 & 4. Cöthen, 1882; 4°.

Commission de la Carte géologique de la Belgique: Texte explicatif du levé géologique de la Planchette de Tamise et de St. Nicolas; par M. le baron O. van Ertborn. Bruxelles, 1880; 8°. Notice explicative du levé géologique de la Planchette de Renaix, par M. le capitaine E. Delvaux — de Lille, d'Hérenthals et de Casterlé par M. le baron O. van Ertborn. Bruxelles, 1881; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCIV. Nrs. 2 & 3. Paris, 1882; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift, III. Jahrgang 1882, Heft 1. Januar, Berlin, 1882; 4°.

Escola de minas de auro preto. Nr. 1. 1881. Rio de Janeiro, 1881; 8°.

Geschichtverein und naturhistor. Landesmuseum in Kärnten: Carinthia Zeitschrift. 71. Jahrgang 1881. Klagenfurt; 8°.

Gesellschaft deutsche, chemische: Berichte. XV. Jahrgang. Nr. 1. Berlin, 1882; 8°.

— deutsche geologische: Zeitschrift. XXXIII. Band, 3. Heft. Juli bis September 1881. Berlin, 1881; 8°.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXIV. (N. F. XIV) Nr. 11 und 12. Wien, 1881; 8°.

— königl. böhm. der Wissenschaften in Prag: Jahresbericht, 1880. Prag; 8°. — Sitzungsberichte. Jahrgang 1880; Prag; 8°. — Abhandlungen vom Jahre 1879 und 1880. VI. Folge. X. Band. Prag, 1881; 4°. Decem registra censuum bohemica compilata aetate bellum husiticum praecedente. Josef Emler. V. Praze, 1881; 8°.

— österreichische zur Förderung der chemischen Industrie: Berichte. III. Jahrgang. Nr. 4. Prag, 1881; 4°.

Instituto historico, geographico e ethnographico do Brasil: Revista trimensal. Tomo XXXIX, parte 1ª & 2ª. Rio de Janeiro, 1876; 8°. — Tomo XL; parte 1ª & 2ª. Rio de Janeiro, 1877; 8°. — Tomo XLI, parte 1ª & 2ª. Rio de Janeiro, 1878; 8°. — Tomo XLII, parte 1ª & 2da. Rio de Janeiro, 1879. 8°. — Tomo XLIII, parte 1ª. Rio de Janeiro, 1880; 8°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. XI. Band. Jahrgang 1879. Heft 3. Berlin, 1882; 8°.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band XXV. 1. & 2. Heft. Leipzig, 1882; 8°.

Museo nacional de México: Anales. Tomo II. Entrega 4. México, 1881; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1881. XXXI Band. Nr. 4. October — December. Wien, 1881; 4°.

Scheffler, Hermann Dr.: Das Wesen der Elektricität, des Galvanismus und Magnetismus. II. Supplement zum II. Theile der Naturgesetze. Leipzig, 1882; 8°.

Société des Ingenieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux. 4ª série, 34ª année, 11ª cahier. Novembre 1881. Paris, 1881; 8°.

Society, the American philosophical: Proceedings. Vol. XIX. Nr. 108. Philadelphia, 1881; 8°.

— the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLII. Nr. 2. December, 1881. London, 1881; 8°.

— the royal geographical: Proceedings and monthly report of Geography. Vol. IV. Nr. 1. January, 1882. London; 8°.

— the American metrological: Proceedings. Vol. I. December 1873, to May, 1878. New-York, 1880; 8°. — Vol. II. December, 1878, to December, 1879. New-York, 1880; 8°.

— the Boston of natural history: Anniversary Memoirs. Fiftieth Anniversary of the Society's Foundation. 1830—1880. Boston, 1880; gr 4°.

Tommasi. Donato Dr.: Sopra una nuova modificazione isomera del Triidrato alluminico. Torino, 1880; 8°. — Réponse à une note de M. A. Riche sur la Reduction du Chlorure d'Argent par la lumière. Torino, 1880; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXII. Jahrgang. Nr. 3 & 4. Wien, 1882; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. III. Jahrgang. Nr. 4. Wien, 1882; 8°.

Zürich, Universität: Akademische Schriften von 1880—1881. — 40 Stücke 4° & 8°.

V. SITZUNG VOM 9. FEBRUAR 1882.

Herr Dr. L. J. Fitzinger übernimmt als Alterspräsident den Vorsitz.

Der Präsident des niederösterreichischen Gewerbevereins theilt mit, dass von diesem Vereine am 10. d. M. eine Gedächtnissfeier für dessen verstorbenen Ehrenpräsidenten A. Freiherrn v. Burg veranstaltet werden wird und übermittelt zur Theilnahme an derselben die Einladungskarten für die Mitglieder der kaiserlichen Akademie.

Das c. M. Herr Prof. F. Lippich in Prag übersendet eine Abhandlung: „Über polaristrobometrische Methoden".

Das c. M. Herr Prof. Dr. R. Maly in Graz übersendet den III. und IV. Theil der „Studien über das Caffeïn und Theobromin", von denen der III. Theil in Gemeinschaft mit Herrn F. Hinteregger, der IV. Theil in Gemeinschaft mit Herrn R. Andreasch bearbeitet worden ist.

Die Herren Dr. J. M. Eder und G. Ulm in Wien übersenden eine Abhandlung: „Über das Verhalten von Quecksilberjodid zu unterschwefligsaurem Natron".

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von den Herren Prof. A. R. Harlacher in Prag, Prof. Dr. L. Henneberg und Oberingenieur O. Smreker in Darmstadt vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Langer überreicht eine vorläufige Mittheilung, betreffend das „Gefüge der Knochen".

Das w. M. Herr Hofrath v. Hochstetter überreicht als Obmann der prähistorischen Commission den Bericht über die Resultate der im Auftrage dieser Commission im Jahre 1881 in den mährischen Höhlen vorgenommenen Untersuchungen.

Hofrath v. Hochstetter überreicht ferner einen Bericht über die durch einen Steinbruch zufällig geöffnete Lettenmaier Höhle bei Kremsmünster, die er im vergangenen Sommer gemeinschaftlich mit Herrn Prof. P. Anselm Pfeiffer und Herrn Szombathy untersucht hat.

Das w. M., Herr Director Dr. Steindachner überreicht eine für die Denkschriften der kaiserlichen Akademie bestimmte ichthyologische Abhandlung unter dem Titel: „Beiträge zur Kenntniss der Fische Afrika's (II) und Beschreibung einer neuen Paraphoxinusart aus den unterirdischen Gewässern in der Herzegowina."

Das w. M. Herr Professor v. Barth überreicht drei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. „Über die Constitution des Guajols", von Herrn Dr. J. Herzig.

2. „Über das Verhalten der Kalksalze der drei isomeren Oxybenzoësäuren und der Anissäure bei der trockenen Destillation", von den Herren Dr. G. Goldschmiedt und Dr. J. Herzig.

3. „Notiz über das Vorkommen von Bernsteinsäure in einem Rindenüberzuge auf *Morus alba*", von Herrn Dr. Guido Goldschmiedt.

Herr Professor v. Barth überreicht ferner eine Mittheilung aus dem chemischen Laboratorium der Universität Innsbruck: „Über Naphtalintetrasulfosäure", von Herrn Professor C. Senhofer.

Der Secretär überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. Max Margules in Wien, betitelt: „Die Rotationsschwingungen flüssiger Cylinder".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia Romana: Analele. Seria II. — Tomulu II. Bucuresci. 1881; 4°.

Académie de Médecine: Bulletin. 2e série. Tome XI. 46e année, Nrs. 1—4. Paris, 1882; 8°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXIX, 1881—82. Serie terza. Transunti. Vol. VI. — Fascicolo 4°. Roma, 1882; 4°.

Ackerbau-Ministerium, k.k.: Statistisches Jahrbuch für 1880. III. Heft, 2. Lieferung. Der Bergwerksbetrieb Österreichs im Jahre 1880. Wien, 1881; 8°.

Ageno Luigi e Torquato Beisso: Del sistema commissurale centrale dell' enceffalo umano. Genova, 1881; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XX. Jahrgang, Nr. 4. Wien, 1882; 8°.

Barrande, M. J.: Du maintien de la nomenclature établie par M. Murchison. Paris, 1880; 8°. — Défense des Colonies. V. Apparition et Réapparition en Angleterre et en Ecosse des espèces coloniales siluriennes de la Bohême; à Prague, à Paris, 1881; 8°.

Bellati, M.: Proprietà termique notevoli di alcuni joduri doppi. Padova, 1880; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3e période. Tome VII, Nr. 1. — 15. Janvier 1882. Genève, Lausanne, Paris, 1882; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Statistisches Jahrbuch für das Jahr 1879. 5. Heft. Wien 1881; 8°. — Jahr 1878. VII. 2. Abtheilung. Wien, 1882; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VI, Nr. 5 & 6. Cöthen, 1882; 4°.

Clausius, R.: VI. Über die theoretische Bestimmung des Dampfdruckes und der Volumina des Dampfes und der Flüssigkeit. Bonn, 1881; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCIV, Nr. 4. Paris, 1882; 4°.

Essex Institute: Bulletin. Vol. 12, Nrs. 1—12. Salem, 1880; 8°. — Visitors' Guide. Salem, 1880; 8°.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde: Mittheilungen. XXI. Vereinsjahr 1881. Salzburg; 8°.

— königl. bayer. botanische: Flora oder allgemeine botanische Zeitung. N. R. XXXIX. Jahrgang oder der ganzen Reihe LXIV. Jahrgang 1881. Regensburg; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XLIII. Jahrg. Nr. 3 bis 5. Wien, 1882; 4°.

Hydrographisches Amt, k. k.: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Vol. IX. Nr. 12, Jahrgang 1881. Pola; 8°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. VII. Jahrgang, Nr. 3—5. Wien, 1882; 4°.

— — Zeitschrift. XXXIII. Jahrgang, VI. Heft. Wien, 1881; 4°.

Kriegsmarine, k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und hydrographische Nachrichten. Jahrg. 1881, Heft 6. Pola, 1881; 8°.

Malm, A. W. Dr.: Berättelse om det, som tilldragit sig inom naturhistoriska museets zoologisk-zootomiska afdelingar år 1881. Göteborg. 1882; 8°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Wien, 1881; 8°.

Museum of comparative Zoology at Harvard College: Annual Report of the Curator to the President and Fellows for 1880—81. Cambridge, 1881; 8°.

— — Memoirs. Vol. VIII, Nr. 1. Cambridge, 1881; 4°.

— — Bulletin. Vol. IX. Nrs. 1—5. Cambridge, 1881; 8°.

Nature: Vol. XXV, Nr. 639 & 640. London, 1882; 8°.

Observatory, the astronomical of Harvard College: Thirty-sixth annual report. Cambridge, 1882; 8°. — Photometric measurements of the variable stars β Persei and D. M. 81°25, by Edward C. Pickering. Cambridge, 1881; 8°. — The Bolometer and Radiant Energy by Professor S. P. Langley. Cambridge, 1881; 8°.

— the Batavia: Rainfall in the East Indian Archipelago. Tweede Jaargang 1880. Batavia, 1881; 8°.

Osservatorio centrale del real collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bollettino mensuale. Ser. II, Vol. I, Nr. 9. Torino, 1881; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrg. 1881, Nr. 1—18 (Schluss). Wien, 1881; 8°.

Repertorium für Experimental-Physik etc., von Dr. Ph. Carl. XVIII. Band, 3. Heft. München und Leipzig, 1882; 8°.

Società degli Spettroscopisti italiani: Memorie. Vol. X, Dispensa 11ª. Novembre 1881. Roma, 1881; 4°.

Società J. R. agraria di Gorizia: Atti e Memorie. Anno XXI. N. S. Nrs. 8—12. Gorizia, 1881; 8°.

Society the Asiatic of Bengal: N. S. Vol. L. Nr. 245. Calcutta, 1881; 8°.

United states: Astronomical and meteorological Observations made during the year 1876 at the naval Observatory. Part II. Washington, 1880; gr. 4°. — Observations of Double Stars by Asaph Hall. Washington, 1881; 4°. — Reports on the total solar eclipses of July 29, 1878 and January 11, 1880. Washington, 1880; 4°.

— — Report of the Commissioner of agriculture for the years 1878 & 1879. Washington, 1879—80; 8°.

Verein militär-wissenschaftlicher in Wien: Organ XXIV. Band. 1. Heft. 1882. Wien; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXII. Jahrgang, Nr. 5, Wien, 1882; 4°.

Studien über Caffeïn und Theobromin.

Von **Rich. Maly** und **Fr. Hinteregger** in Graz.

III. Abhandlung.*

Einwirkung von Brom und Wasser auf Caffeïn.

Beim Übergiessen von Caffeïn mit Brom hat O. Schultzen[1] sein Monobromtheïn erhalten, über das dann später von E. Fischer,[2] der es als Ausgangspunkt seiner Präparate benützte, weitere Angaben gemacht worden sind. In beiden Fällen ist dabei ausdrücklich von trockenem Brom die Rede, eine oxydirende Einwirkung daher ausgeschlossen und auch nicht beabsichtigt. Niemals aber ist das Bromcaffeïn das erste Product der Einwirkung, es entsteht vielmehr, wie schon Schultzen für seine Versuchsbedingungen angegeben, und leicht zu constatiren ist, zunächst ein ziegelrother oder richtiger orangerother Brei. Es ist unschwer zu vermuthen, dass dasselbe ein Additionsproduct des Caffeïns sei, und da es immer zuerst entsteht, mag man mit oder ohne Wasser, mit dem oder jenem Lösungsmittel operiren, so haben wir die Zusammensetzung gelegentlich festgestellt.

Eine chloroformige Lösung von Caffeïn wurde mit kaltem Brom so lange versetzt, bis sich eine reichliche Menge dieses orangerothen Niederschlages gebildet hatte, der Niederschlag filtrirt, abgepresst und zur Entfernung des überschüssigen Broms mehrere Wochen lang unter einem mit Kalk beschickten Exsiccator stehen gelassen. Nach dieser Zeit hat man ein orangerothes nicht

---

* Die I. Abhandlung siehe in diesen Sitzungsberichten, Band 83, II. Abth., Jänner 1881, pag. 262, oder Monatshefte für Chemie, Band II, pag. 87; die II. Abhandlung in den Sitzungsberichten Band 83, II. Abth., Februar 1881, pag. 421, oder Monatshefte für Chemie, Band II, pag. 126.

[1] Chemisches Centralblatt 1868, pag. 499.

[2] Ber. d. chem. Gesellschaft, Berlin 1881, pag. 637.

krystallinisches Pulver, das immer noch leicht nach Brom riecht, und sich etwas in Wasser mit gelber Farbe löst. Mit Natronlauge betropft, wird es zu einem weissen Filz von Caffeïnnadeln. Die wässrige Lösung färbt sich mit Jodkaliumstärkekleister stark blau und gibt mit Silbernitrat reichlichen Niederschlag von Bromsilber.

0·3686 Grm. mit Kalk geglüht, gaben 0·3299 Ag Br und 0·0399 Ag entsprechend 0·1699 Brom oder 46·09% Brom.

Ein Körper von der Formel $C_8H_{10}N_4O_2.Br_2$, d. h. ein Additionsproduct von 1 Mol. Caffeïn und 1 Mol. Brom verlangt 45·20% Brom.

Im Übrigen haben wir das Caffeïn nicht mit trockenem Brom, sondern immer mit einem Gemisch von Brom und Wasser behandelt, wobei, wie wir sahen, sich bald Oxydationswirkungen einstellen, sobald man gleichzeitig höhere Temperatur anwendet. Wir haben eine lange Reihe von Versuchen dem Bemühen gewidmet, jene Brommenge auszumitteln, unter deren Einfluss sich eine möglichst glatte Reaction abspielt. Aber es war nicht möglich, ein solches Verhältniss aufzufinden, die Reaction verläuft nicht glatt, wenigstens nicht unter den eingehaltenen Bedingungen und unterscheidet sich dadurch sehr unvortheilhaft von der früher studirten Einwirkung der Chromsäuremischung.

Schliesst man in ein Glasrohr oder in eine Druckflasche Caffeïn, Brom und Wasser ein, und erhitzt im Wasserbade, so verschwindet das zuerst entstehende Caffeïndibromid nach ein oder mehreren Stunden, die Flüssigkeit entfärbt sich und man erhält einen wollig flockigen aus feinen, weissen, nicht glänzenden Nadeln bestehenden Niederschlag von Monobromcaffeïn, dessen Menge sich namentlich beim Erkalten noch vermehrt. Das Filtrat davon ist stark sauer und farblos.

Bei den folgenden Versuchen wurde die Menge des Bromcaffeïns bestimmt, die man mit steigendem Bromzusatze erhielt, indem erst 2, dann 3, dann 4, dann 6 Atome Brom auf 1 Mol. Caffeïn genommen, sonst aber mit dem Wasserzusatze und Erhitzen gleich verfahren wurde. Nach völliger Entfärbung und Öffnen der Flasche wurde der Niederschlag abfiltrirt, getrocknet und gewogen.

Versuch 1. 10 Grm. krystallisirtes Caffeïn mit 8·64 Grm. Brom, entsprechend 2 Atomen und etwa 200 CC Wasser werden in der Druckflasche im Wasserbade bis zur Entfärbung erhitzt. Der getrocknete Niederschlag wiegt 1·4015 Grm., beträgt also 14·0 Procent vom angewandten Caffeïn.

Versuch 2. 10 Grm. Caffeïn mit 11·3 Grm. entsprechend 3 Atomen Brom in gleicher Weise behandelt. Der über Schwefelsäure getrocknete Niederschlag wiegt 2·5 Grm., beträgt also 25 Procent des Caffeïns.

Versuch 3. 10 Grm. Caffeïn mit 15·1 Grm. Brom, entsprechend 4 Atomen. Entfärbung nach 3—4 Stunden. Der über Schwefelsäure getrocknete Niederschlag wiegt 2·44 Grm., entsprechend 14·4 Procent des Caffeïns.

Versuch 4. 10 Grm. Caffeïn werden mit 24·05 Grm. Brom entsprechend 6 Atomen und Wasser von Mittag bis Abend erhitzt. Dann klare, gelbliche Flüssigkeit ohne Ausscheidung.

Man hat also bei Anwendung:

von 2 At. Brom eine Ausbeute v. 14 Proc. an rohem Bromcaffeïn,
„ 3 „ „ „ „ „ 25 „ „ „ „
„ 4 „ „ „ „ „ 24·4 „ „ „ „
„ 6 „ „ „ „ „ 0 „ „ „ „

Dem erhaltenen rohen Bromcaffeïn haftet häufig noch unverändertes Caffeïn hartnäckig an, wenn man nur 2 oder 3 Atome Brom genommen hat. Durch Auskochen mit Wasser kann man das Caffeïn entfernen, denn beim Bromcaffeïn ist der Unterschied in der Löslichkeit zwischen heissem und kaltem Wasser geringer.

Man sieht aus den vorstehenden Zahlen, dass von einer glatten Reaction zwischen Brom, Wasser und Caffeïn nicht die Rede ist, denn während 2 Atome Brom bereits das Maximum von Bromcaffeïn geben könnten, steigt die sich bildende Menge davon bis zur Anwendung von 3 Atomen und nimmt dann wieder ab, so dass bei 6 Atomen Brom gar nichts mehr davon vorhanden ist. Also noch bevor etwa $^1/_6$ des Caffeïns in Bromcaffeïn verwandelt wird, geht die substituirende Wirkung des Broms in eine oxydirende über, und mehr als etwa $^1/_6$ des Caffeïns kann auf diese Weise gar nicht bromirt werden. Zu dieser Zeit, d. h. nachdem 3 Atome Brom verbraucht worden sind, ist aber 1. einerseits noch

unangegriffenes Caffeïn vorhanden und anderseits sind 2. bereits Körper vorhanden, die als Producte der Oxydation aufzufassen sind; denn wenn man zu dem Filtrate vom Versuch 1 noch 1 Atom Brom setzt, entsteht wieder orangerothe Fällung des Additionsproductes, beim Erhitzen Entfärbung unter Bildung von Bromcaffeïn. Und auch das Filtrat davon wird von Brom nochmals orange gefällt.

Aus den Aufzeichnungen über die ausser und neben dem Bromcaffeïn gebildeten Körper sei noch Folgendes mitgetheilt.

Einwirkung von 2 Atomen Brom und Wasser. Bei der Einwirkung von zwei Atomen Brom ist in der Röhre der Druck unerheblich; das ausgeschiedene Bromcaffeïn enthält noch Caffeïn, und auch im Filtrat ist noch Caffeïn als Hydrobromat enthalten. Filtrat und Waschwasser werden vereinigt und auf 500 CC. gebracht. In 20 CC. davon wird der Gehalt an Bromwasserstoff austitrirt, er entspricht für die gesammten 500 CC. einem Gehalt von 6·249 Grm. Brom. Andere 20 CC werden mit Kali neutralisirt, geglüht, das Brom mit Silber gefällt und vom gleichzeitig vorhandenen Cyansilber getrennt; man erhält für alle 500 CC. einen Gehalt von 8·11 Grm. Brom. Daher sind 1·86 Grm. Brom in der Flüssigkeit nicht als Bromwasserstoff. In den abfiltrirten 1·40 Grm. Bromcaffeïn sind 0·41 Grm. Brom, dies gibt zusammen mit den 8·11 Grm. Brom des Filtrates 8·52 Grm., d. h. die angewandte Menge (8·64 Grm.) wieder.

Sieht man von den kleinen Mengen Bromcaffeïn, die noch im Filtrate sein konnten, ab, so kann man aus dem Vorstehenden entnehmen, mit welchem Antheil das in Action gesetzte Brommolekül auf das Caffeïnmolekül bromirend, und mit welchem es gleichzeitig oxydirend gewirkt hat; für die Bromirung sind $0{\cdot}41 + 0{\cdot}41 = 0{\cdot}82$ Grm. oder 9·5 Procent des ganzen Broms, zur Oxydation sind hingegen 90·5 Procente Brom verwendet worden.

Einwirkung von 3 Atomen Brom und Wasser. Dabei ist höherer Druck in der Röhre von Kohlensäure. Das ausgeschiedene Bromcaffeïn ist dichter und enthält sandige, weisse Körner, die mit Barytwasser dunkelviolett, mit Ammoniak roth werden und Amalinsäure sind. Beide Körper kann man durch

Äther vollständig trennen, worin das Bromcaffeïn leicht, die Amalinsäure nicht löslich ist.

Hat man von dem amalinsäurehältigen Bromcaffeïn abfiltirt, so bewirkt Reiben mit einem Glasstabe in dem klaren Filtrat Trübung und Streifen an der Glaswand und bald scheidet sich noch reichlich weitere Amalinsäure als schweres Krystallmehl ab. Das Filtrat von der Amalinsäure eingeengt, und mit Äther ausgeschüttelt, gibt reichlich eine Substanz ab, die nach dem Abdestilliren des Äthers und Umkrystallisiren aus heissem Wasser zwar in dünnen, spiessähnlichen Blättchen krystallisirt, aber bei 149 bis 150°C. schmilzt, bei 145 erstarrt, die früher beschriebene Reaction[1] mit Chlorcalcium und Bleiacetat gibt und die daher Cholestrophan ist.

Einwirkung von 4 Atomen Brom und Wasser. Das nach dem Erkalten abgeschiedene Bromcaffeïn beträgt circa noch ebensoviel als bei Anwendung von nur 3 Atomen Brom, aber das Stadium der Amalinsäurebildung ist schon überschritten, es ist davon nichts mehr zu finden. Das stark saure Filtrat eingeengt, scheidet grosse Tafeln von Cholestrophan aus; um dasselbe von den noch übrigen Körpern zu trennen, wird das ganze acht Mal mit Äther ausgeschüttelt. Der Rückstand der vereinigten Ätherauszüge aus Wasser umkrystallisirt gibt mehrere Gramme Cholestrophans, und daneben, in feinen weissen Körnern, die sich mikroskopisch in Nadelbündel auflösen, eine sehr kleine Menge einer zweiten, unbekannten Substanz.

Die mit Äther acht Mal ausgeschüttelte Flüssigkeit gibt abgedampft noch einen nennenswerthen Rückstand, in dem neben dem Rest von Cholestrophan nur noch Methylamin aufgefunden wurde.[2]

Bei Einwirkung von 6 Atomen Brom fehlt das Bromcaffeïn schon vollständig; im übrigen sind keine andern Körper

---

[1] Andreasch, Diese Sitzungsberichte. Bd. 83. II. Abth. April 1881 oder Monatshefte f. Chemie, Bd. 2, pag. 276.

[2] Das Methylamin ist dabei in Form eines nicht beschriebenen, prachtvoll schönen Platinsalzes erhalten worden. Die ausgeschüttelte abgedampfte Flüssigkeit wurde zwar vor dem Platinchloridzusatz mit Salzsäure abgedampft, um die HBr zu verjagen, aber doch ist neben dem charakteristischen gelben Methylaminplatinsalz ein zweites in lebhaft glänzenden zinnoberrothen

als vorher gefunden worden. Nur wurde noch constatirt, dass das abgepresste und abdestillirte Metthylamin frei von Ammoniak ist: gefunden 41·81% Pt, berechnet 41·6% Pt.

Zur weiteren Beschreibung des Bromcaffeïns.

Bestätigung der für das Bromcaffeïn angegebenen Zusammensetzung fehlt in der Literatur. Für die im Folgenden mitgetheilten Analysen ist das Material gelegentlich der vorstehenden Versuche gewonnen und in verschiedener Weise gereinigt worden.

1. 0·3445 Grm. mit kohlensaurem Kali nach der Art von Schiff verschmolzen, in Salpetersäure gelöst u. s. w., gaben nach Abtrennung des Cyansilbers mittelst der Methode von Neubauer-Kerner 0·2145 Ag Br und 0·018 Grm. metallisches Silber.
2. 0·4797 Grm. (bei 100° getrocknet) gaben 0·6156 CO_2 und 0·1579 Wasser.
3. 0·3710 Grm. bei 100° getrocknet, gaben mit Natronkalk verbrannt Ammoniak, das 19 CC Säure (à 1 CC = 3·88 mg. N) neutralisirte.
4. 0·267 Grm. bei 100° getrocknet gaben mit Natronkalk verbrannt Ammoniak, das 13·8 CC obiger Säure neutralisirte.
5. 0·4218 Grm. bei 100° getrocknet, gaben 0·5514 Grm. CO_2 und 0·1333 Grm. Wasser.
6. 0·3565 Grm. gaben 0·4602 Grm. CO_2 und 0·1103 Grm. Wasser.

Die über Schwefelsäure getrocknete Substanz gibt bei 100° nichts mehr ab. Die Substanz von Analyse 1 (Einw. von 4 Atomen Brom) ist in starker Essigsäure gelöst und durch Eingiessen in ammoniakhaltiges Wasser ausgefällt, dann zwei Mal aus heissem Alkohol umkrystallisirt worden.

Krystallen erhalten worden. Es hatte die Zusammensetzung eines Methylaminchlorhydrat-Platinbromids $(CH_3.NH_2.HCl)_2\ PtBr_4$.

Analysen:

1. 0·4767 Grm. gaben 0·1450 Grm. Platin oder 30·42%, berechnet sind 30·23% Platin.
2. 0·5910 Grm. mit kohlensaurem Kali nach Schiff verschmolzen u. s. w. gaben 0·9250 Grm. eines Gemenges von BrAg + ClAg; nach der Rechnung müssen 0·940 Grm. Halogensilber entstehen.

Die Substanz von 2 rührt her von der Einwirkung von 3 Atomen Brom und ist ein Mal aus heissem Wasser umkrystallisirt worden.

Die Substanzen von 3 und 4 rühren her von der Einwirkung von 4 Atomen Brom; bei Analyse 3 ist die Substanz nur gewaschen, nicht umkrystallisirt, bei Analyse 4 ist dieselbe Substanz aus heissem Wasser umkrystallisirt und das genommen worden, was sich durch starkes Einengen der Mutterlauge ausschied.

Substanz 5 und 6 rühren her von der Einwirkung von 3 Atomen Brom. Beide sind aus heissem Weingeist umkrystallisirt worden, 5 ist direct, 6 nachdem es mit Wasser ausgekocht worden war, um noch Spuren von Caffeïn zu entfernen, analysirt worden.

Bromcaffeïn $C_8H_9BrN_4O_2$	Gefunden					
	1	2	3	4	5	6
C.....35·16%	—	35·00	—	—	35·65	35·20
H .... 3·30 „	—	3·65	—	—	3·51	3·44
Br....29·30 „	30·28	—	—	—	—	—
N ....20·51 „	—	—	19·87	20·05	—	—
O ....11·72 „	—	—	—	—	—	—

Das Bromcaffeïn löst sich wenig in kaltem, leichter in heissem Wasser oder heissem Alkohol. Starke Säuren lösen es auf, am leichtesten wird es von Äther oder Chloroform aufgenommen. Petroleum löst nicht.

Silberoxyd mit Wasser und Bromcaffeïn gekocht, wirken nicht ein, hingegen wird durch Zinkstaub sehr leicht das Brom herausgeholt und Caffeïn regenerirt. Als Bromcaffeïn mit Wasser und Zinkstaub etwa $^1/_4$ Stunde am Wasserbade erhitzt worden waren, war sofort mit Silber fällbares Brom in Lösung. Nach dem Filtriren und Einengen erschien eine Krystallisation von Caffeïn, in welchem zur Controle des glatten Ablaufes eine Stickstoffbestimmung nach Will und Warrentrapp gemacht wurde. Man fand 28·56 Procent Stickstoff, die Theorie will 28·86. Die Entbromung war also vollständig.

Graz, Jänner 1882.

Studien über Caffeïn und Theobromin.

Von **Rich. Maly** und **Rud. Andreasch** in Graz.

IV. Abhandlung.

Die Abkömmlinge, welche vom Caffeïn und Theobromin in der ersten und zweiten Abhandlung dieser Studien beschrieben worden sind, stellen ziemlich niedrig zusammengesetzte Körper vor. Es hat sich nun gehandelt, die Basen Einwirkungen zu unterwerfen, bei denen grössere Atomcomplexe erhalten blieben. In dieser Beziehung konnten wir uns geradezu daran machen, das bisher nicht isolirte alloxanartige Zersetzungsproduct aufzusuchen.

Schon Rochleder hat in seiner ersten Arbeit über das Caffeïn [1] mitgetheilt, dass beim Kochen von Caffeïn mit Salzsäure und chlorsaurem Kalium und vorsichtigem Eindampfen Alloxan entstehe, oder „ein dem Alloxan ähnlicher Körper", wie die Fähigkeit der in Wasser gelösten Salzmasse, die Haut roth zu färben und ihr einen eigenthümlichen Geruch zu verleihen, ferner die durch Alkalien und Eisenoxydulsalze hervorgebrachte Färbung und Murexydlösung beim Zusatz von Ammoniak beweist. Es sind dies die Reactionen, die neun Jahre vorher Wöhler und Liebig für das Harnsäurealloxan angegeben haben. Das gleiche Verhalten beschreibt dann Rochleder auch für das Einwirkungsproduct von Chlorgas [2] auf einen Caffeïnbrei; er hat aber den die Alloxanreactionen gebenden Körper nicht nur nicht isolirt, er hat auch fälschlich seine Amalinsäure dafür gehalten, von der er in einer dritten Abhandlung [3] sagt, dass sie ein schwach (αμαλις) saurer Körper sei, „der alle Reactionen zeigt, die einerseits dem

---

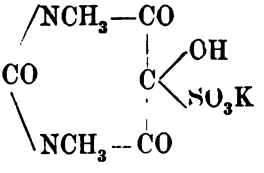
[1] Lieb. Ann. 63, 201.
[2] Lieb. Ann. 69, 121.
[3] Lieb. Ann. 71, 1.

Alloxan, andererseits dem Alloxantin zukommen.“ Der alloxanartige Körper selbst ist bei den Rochleder'schen Untersuchungen in jener Lösung geblieben, aus der er nach dem Eindampfen das Methylaminchlorhydrat gewann und ist durch die Hitzwirkung bei diesem Eindampfen völlig zersetzt worden.

Wie nach den verschiedenen Dimethylderivaten (Dimethylparabansäure, Dimethyloxamid), die bisher aus dem Caffeïn erhalten worden sind, zu vermuthen steht, ist Rochleder's alloxanartiger Körper als Dimethylalloxan aufzufassen; dies thut auch E. Fischer,[1] der den die genannten Reactionen gebenden Körper ebenfalls mit Salzsäure und chlorsaurem Kalium erzeugte, und ihn geradezu als Dimethylalloxan anspricht, er fügt aber hinzu, dass sich aus der erhaltenen Lösung dasselbe nicht direct abscheiden lasse. Wir werden im Folgenden sehen, auf welche Weise dies gelingt. Einen die gleichen Reactionen zeigenden Syrup stellte Fischer durch Oxydation von Rochleder's Amalinsäure her. Die Darstellung des krystallisirten Dimethylalloxans oder der Verbindungen desselben ist bisher nicht gelungen und analytische Belege fehlen zur Begründung der Vermuthung vollständig.

Dimethylalloxan-Kaliumhydrosulfit.

$C_6H_7KN_2SO_7$ oder



Um nach dem Rathe Rochleder's vorsichtig bei der Einwirkung von Salzsäure und chlorsaurem Kalium zu sein, haben wir nicht nur die Temperatur durch Einstellen der Gefässe in lauwarmes Wasser möglichst niedrig, am besten unter 50° gehalten, sondern auch die Menge des Chlorates so genommen, dass überschüssige Oxydation vermieden wurde.

---

[1] Ber. d. d. chem. Gesellsch., 1881, p. 1912.

Folgende Überlegung gab hier einen Anhaltspunkt: Bei Anwendung von Chromsäure als Oxydationsmittel entstand, wenn drei Atome Sauerstoff disponibel waren, glatt die Dimethylparabansäure; soll die entsprechende Alloxanverbindung erhalten bleiben, so durfte die Menge wirksamen Chlors nur zwei Atomen Sauerstoff äquivalent sein, was einer Quantität von 38·5 Grm. Kaliumchlorat auf 100 Grm. wasserhältigen Caffeïns entsprechen würde.

Dabei haben wir es zweckmässig gefunden, mit kleinen Mengen Caffeïn zu arbeiten, zum Beispiel jedes Kölbchen mit nur etwa 5 Grm. zu beschicken. Als Salzsäure hat sich solche vom specifischen Gewichte 1·06 am besten bewährt.

Die resultirenden Lösungen mehrerer Darstellungen werden vereinigt, mit einem Strome Luft behandelt, um etwaiges freies Chlor und chlorige Producte zu entfernen und dann ohne zu verdünnen, mit einer concentrirten Lösung von Kaliumhydrosulfit versetzt. Meist schon nach wenigen Minuten scheidet sich ein schweres weisses, schuppig-krystallinisches Pulver ab, dessen Menge sich beim Stehen in der Kälte noch ein bis zwei Tage lang vermehrt. Bei langsamer Bildung entstehen gleich anfangs grössere vierseitige Täfelchen.

Wenn sich die Ausscheidung nicht mehr vermehrt, wird die Krystallmasse abfiltrirt, abgepresst und aus warmem Wasser umkrystallisirt. Dabei scheiden sich bis auf den letzten Flüssigkeitstropfen viereckige, oft ein Quadratcentimeter grosse Tafeln ab; die kleineren Tafeln sind wasserklar, die grösseren aber treppenartig zusammengesetzt, in Blätter spaltbar und gestreift. An den unteren, dem Gefäss aufliegenden Flächen der Tafeln kommt durch die parallel jeder Kante stattfindende Streifung, Perlmutterglanz und Bildung eines diagonalen Kreuzes zu Stande.

Die Ausbeute ist beträchtlich; in einem Falle, in welchem dieselbe bestimmt wurde, waren 11 Grm. der umkrystallisirten Verbindung aus 20 Grm. krystallwasserhältigen Caffeïns erhalten worden.

Beim Erhitzen am Platinblech entweichen übelriechende, an Allylverbindungen und verbrennende Harnsäure erinnernde Dämpfe, unter Zurücklassung von viel Kohle. Beim Erhitzen im Glasrohr färben sich die Krystalle erst roth, decrepitiren und

entwickeln dann purpurfarbige, später weisse Dämpfe, die sich zu einem rothen öligen Ring und einem krystallinischen weissen Sublimat verdichten.

Analysen:

I. 0·385 Grm. gaben, mit concentrirter Schwefelsäure abgeraucht, 0·119 Grm. K_2SO_4 gleich 0·0534 Grm. Kalium.

II. 0·6429 Grm. einer anderen Darstellung gaben in gleicher Weise behandelt 0·1919 Grm. K_2SO_4 gleich 0·0862 Grm. Kalium.

III. 0·5151 Grm. klarer über Schwefelsäure getrockneter Tafeln wurden mit Natronkalk verbrannt; zur Neutralisation werden verbraucht 12·7 CC. einer Säure, wovon 10 CC. gleich 38·8 Mgr. N. Daher gefunden 0·04927 Grm. Stickstoff.

IV. 0·368 Grm. mit Blei-Kaliumchromat verbrannt, gaben 0·334 Grm. Kohlensäure und 0·091 Grm. Wasser.

V. 0·3285 Grm. gaben in wässeriger Lösung mit Salzsäure und chlorsaurem Kalium behandelt und mit Chlorbaryum gefällt, 0·2697 Grm. schwefelsaures Baryum gleich 0·03704 Grm. Schwefel.

	Theorie		Gefunden				
			1.	2.	3.	4.	5.
C_6	72	24·83	—	—	—	24·75	—
H_7	7	2·41	—	—	—	2·75	—
K	39	13·45	13·87	13·41	—	—	—
N_2	28	9·66	—	—	9·57	—	—
S	32	11·04	—	—	—	—	11·28
O_7	112	38·62	—	—	—	—	—
Mol. =	290	100·00.					

Weitere Eigenschaften. Die Substanz ist in warmem Wasser leicht, in kaltem schwerer löslich, beim Umkrystallisiren beständig. An der Luft und selbst über Schwefelsäure färben sich die Krystalle nach einiger Zeit oberflächlich rosenroth.

Eine Löslichkeitsbestimmung ist bei 20° C. ausgeführt worden.

22·235 Grm. einer bei 20° gesättigten Lösung hinterliessen 1·496 Grm. der Verbindung, daher lösen:

100 Theile Wasser bei 26°...7·21 Theile der Verbindung; oder 1 Theil der Verbindung braucht 13·86 Theile Wasser von 20°.

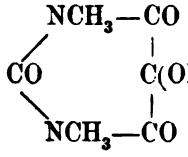
In Alkohol ist der Körper kaum löslich, nicht in Äther. Die wässerige Lösung gibt mit Silbernitrat einen weissen flockigen Niederschlag, löslich sowohl in Ammoniak wie in Salpetersäure. Dieser Niederschlag, abfiltrirt und getrocknet, enthielt 72·97 Perc. Silber (ber. 72·97), ist also nichts Anderes als schwefligsaures Silber. Essigsaures Blei gibt einen weissen schweren Niederschlag, der in mehr Essigsäure sich nicht löst. Chlorbaryum gibt nichts, Barytwasser einen starken weissen, in Salpetersäure löslichen Niederschlag.

Mit verdünnter Schwefelsäure erwärmt, entwickelt das Dimethylalloxan-Kaliumhydrosulfit langsam schweflige Säure, in concentrirter Schwefelsäure lösen sich die Krystalle beim Erwärmen ohne Bräunung auf. Ammoniak und Laugen wirken nicht sichtlich ein.

Mit Eisenvitriol und Ammoniak entsteht keine Blaufärbung; übergiesst man aber die Verbindung mit Salzsäure und lässt stehen oder dunstet in gelinder Wärme ab, so dass das Sulfit zerstört wird, so tritt mit den genannten Reagentien die Indigfärbung intensiv ein.

Krystallisirtes oder einfach gewässertes Dimethylalloxan.

$C_6H_8N_2O_5 \cdot H_2O$ oder



$\cdot H_2O$.

Das Dimethylalloxan kann man aus der vorher beschriebenen Verbindung erhalten, aber es ist dieser Umweg nicht nöthig, da man es sehr leicht direct aus der ursprünglichen Flüssigkeit, das heisst dem Einwirkungsproducte von Salzsäure und Kaliumchlorat mit Äther ausziehen kann.

Dabei ist aber zu bemerken, dass ausserdem noch eine zweite, später zu beschreibende Substanz in reichlicher Menge mit in den Äther übergeht, die man von dem Dimethylalloxan selbst in folgender Weise fast quantitativ trennen kann.

Nachdem die Hauptmasse des Äthers von den vereinigten Schütteläthern abdestillirt worden ist, bringt man den Rückstand in eine flache Schale und stellt, um die letzten Ätherreste zu entfernen, in das Vacuum. Es resultirt eine farblose, etwas klebrige, firnissartig klare Masse, dickem Damarlacke ähnlich.

Die Ausbeute betrug nach viermaligem Schütteln mit Äther, an solcher vacuumtrockener Masse:

I. 12·3 Grm. aus 20 Grm. Caffeïn,
II. 15·5 „ „ 30 „ „

aber auch die späteren (fünfte bis achte) Ausschüttelungen gaben noch merkliche Mengen.

Überschichtet man den klaren Firniss mit etwas Wasser, so trübt er sich bald, es ziehen ölige Tropfen durch die Masse, die immer mehr weiss wird, und nach etwa einer Stunde ist das Ganze zu einem schneeweissen krystallinischen Brei erstarrt. Man rührt noch mit etwas kaltem Wasser an und saugt mit der Pumpe ab.

Dieses abgesaugte Krystallmehl ist die zweite neben dem Dimethylalloxan in den Äther übergehende Substanz; wir stellen sie vorläufig bei Seite. Das Dimethylalloxan ist in dem abgesaugten Filtrat enthalten, wie sich zeigt, wenn man eine Probe davon mit Kaliumhydrosulfit versetzt, wobei sich die Doppelverbindung ausscheidet. Um das freie Dimethylalloxan zu erhalten, wird die Lösung zum langsamen Verdunsten über Schwefelsäure gestellt. Nach mehrtägigem Stehen und nachdem die Flüssigkeit schon zu einen dünnen Syrup geworden, schiessen an der Oberfläche schwimmend und an den Wänden grosse klare Krystalle, meist sechsseitige, oft dicke Tafeln vorstellend, an. Haben sich solche Krystalle gebildet, so nimmt man sie heraus, denn sonst werden sie oberflächlich durch Verwitterung weiss, selbst dann, wenn daneben noch Mutterlauge sich befindet.

Die Krystalle färben bei Berührung die Haut auf zwei Tage roth, ein auffallend unangenehmer Geruch ist dabei nicht beobachtet worden. Auch Holz und Leinwand wird davon roth gefärbt. Mit Eisensulfat und ein wenig Ammoniak entsteht die schöne Indigfärbung auf das intensivste. Durch Auflösen im Wasser und Abdunsten neben Schwefelsäure kann man, wenn Erwärmung vermieden wird, die Verbindung leicht umkrystallisiren.

An der Luft sind die Krystalle beständig, im Vacuum oder über Schwefelsäure verlieren sie genau ein Molekül Wasser und zerfallen zu einem gelblichweissen Pulver. Beim Erwärmen, schon bei 100°, zersetzen sie sich unter Aufblähung und Braunfärbung. Zur Analyse wurden die klaren Krystalle zerrieben und zwischen Papier gepresst.

Analysen:

I. 0·2625 Grm. Krystalle gaben mit Kupferoxyd verbrannt, 30 CC. Stickstoff von 16° C. und 750·4 Mm. Druck; daher 0·03509 Grm. Stickstoff.

II. 0·3800 Grm. klarer Krystalle werden mit Natronkalk und etwas Zucker verbrannt; verbrauchte Säure 13·6 CC., wovon 1 CC. gleich 3·806 Mgr. Stickstoff.

III. 0·4215 Grm. abgepresster Krystalle verloren, im Exsiccator über Schwefelsäure stehend, binnen acht Tagen 0·0364 Grm. Von da an blieb das Gewicht constant.

IV. 0·8187 Grm. abgepresster Krystalle verloren im Vacuum am ersten Tage 32 Mgr., am zweiten Tage 19, am dritten 8, am vierten 4 Mgr. u. s. w. Nach acht Tagen war constantes Gewicht eingetreten. Der Gesammtverlust betrug 0·0732 Grm.

Das Krystallwasser geht also im Vacuum nicht schneller fort als über Schwefelsäure allein. Eine Kohlenstoff- und Wasserstoffbestimmung wird später beim entwässerten Alloxan mitgetheilt werden.

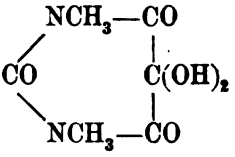
	Theorie		Gefunden			
			1.	2.	3.	4.
C_6	72	—	—	—	—	—
H_8	8	—	—	—	—	—
N_2	28	13·60	13·37	13·63	—	—
O_5	80	—	—	—	—	—
H_2O	18	8·73	—	—	8·63	8·93
Mol.	206.					

In Alkohol löst sich das krystallisirte Dimethylalloxan kaum, in Äther gar nicht auf. Mit Eisenchlorid und Ammoniak versetzt, entsteht eine braune Lösung, das Alloxan macht also das Eisenoxyd unfällbar. Auch Kupferhydroxyd wird aufgelöst, denn man

erhält eine schön blaue Flüssigkeit, wenn man Kupfervitriol und Lauge hinzufügt. Im Röhrchen erhitzt, tritt unter Braunfärbung und Bildung eines flittrigen Sublimates Zersetzung ein. Schmelzpunkt nicht bestimmbar.

Wasserfreies Dimethylalloxan.

$C_6H_8N_2O_5$ oder



Es wird aus dem vorher beschriebenen Körper erhalten, wenn man diesen acht Tage lang im Exsiccator über Schwefelsäure oder im Vacuum trocknet. Die Krystalle werden zuerst an der Oberfläche und an den Kanten weiss und wandeln sich in der angegebenen Zeit vollständig in den wasserfreien Körper, der ein blassgelbes Pulver darstellt, um. Lässt man ihn noch länger über Schwefelsäure stehen, so gehen nur mehr Spuren Wasser weg.

Bringt man wenig Wasser dazu, so wird es rasch aufgesaugt und das gelbe Pulver verwandelt sich wieder in einen weissen Krystallkuchen des gewässerten Dimethylalloxans. Mehr Wasser löst auf und die Flüssigkeit gibt die schon beschriebenen Reactionen.

Das wasserfreie Dimethylalloxan ist löslich in Alkohol und in trockenem Äther. Schmelzpunkt nicht bestimmbar; färbt sich gegen 100° gelbbraun, wird bei 105° klebrig und gibt höher erhitzt ein rothes, öliges Sublimat.

Analyse:

I. 0·2325 Grm. gaben 0·091 Grm. Wasser.

II. 0·2512 Grm. gaben mit Kupferoxyd verbrannt 0·358 Grm. Kohlensäure und 0·094 Grm. Wasser.

	Theorie		Gefunden	
			1.	2.
C_6	72	38·30	—	38·80
H_8	8	4·26	4·30	4·16
N_2	28	14·89	—	—
O_5	80	42·55	—	—

Die Substanz war wochenlang über Schwefelsäure gestanden und scheint dabei noch eine Spur Constitutionswasser verloren zu haben.

Über die neben dem Dimethylalloxan erhältlichen Körper.

Apocaffeïn, Caffursäure.

Wir kehren in der Beschreibung zu dem firnissartigen farblosen Rückstande der Ätherausschüttlungen zurück, von dem schon erwähnt ist, dass er, mit Wasser überschichtet, nach Kurzem ein weisses Krystallmehl absetzt, das von der Dimethylalloxanlösung durch Abfiltriren getrennt werden kann. Es wird in nicht unbedeutender Menge gewonnen: 20 Grm. Caffeïn gaben 3·6 Grm. dieser Verbindung in trockenem Zustande; ein andermal gaben 40 Grm. Caffeïn 9 Grm. derselben.

Der Körper ist in kaltem Wasser schwer, in warmem leichter löslich, auch ziemlich leicht löslich in warmem Alkohol und noch leichter in Äther. Das Umkrystallisiren aus Wasser lässt sich nicht ohne theilweise Zersetzung vornehmen, man erhält zunächst beim Abkühlen zwar eine schöne Krystallisation aus feinen, zu Drusen vereinigten Prismen, aber die Mutterlauge gibt, in der Wärme eingeengt, schon einen anders aussehenden, namentlich leichter löslichen Körper in weissen Warzen.

Auch lieferten die aus heissem Wasser umkrystallisirten (zuerst erhaltenen) Präparate keine so völlig übereinstimmenden Zahlen, als es wünschenswerth gewesen wäre. Analysen davon sind in 1, 2 und 3 der folgenden Zusammenstellung enthalten.

Wir haben desshalb ein anderes Mittel gesucht, um ohne Anwendung von Wärme den Körper umzukrystallisiren. Als solches hat sich trefflich bewährt, die über Schwefelsäure getrocknete Substanz in wenig Äther zu lösen, allenfalls zu filtriren und mit Benzol zu versetzen. Erst tritt stark milchige Trübung auf, die sich dann von oben herab klärt und nach einigen Stunden Stehens hat man eine Masse glänzender Blättchen und Nadeln am Boden und an den Wänden. Die Substanz ist über Schwefelsäure im Vacuum getrocknet worden, wobei sie nichts an Gewicht verliert. Im Röhrchen erhitzt, beginnt sie bei 143° an die Wände zu kleben und ist bei 144 bis 145° geschmolzen.

Sie löst sich ausser in Äther und Wasser auch in Alkohol und in Chloroform.

Analysen:

a) Aus Wasser krystallirt:

I. 0·285 Grm. gaben 0·4085 Kohlensäure und 0·102 Wasser.

II. 0·287 „ „ 0·416 „

III. 0·5071 Grm. werden mit Natronkalk verbrannt; zum Neutralisiren verbraucht 25 CC. Säure, wovon 1 CC. gleich 3·88 Mgr. Stickstoff.

b) Mit Benzol gefällt:

IV. 0·3095 Grm. gaben 0·4485 Kohlensäure und 0·100 Wasser.

V. 0·4569 „ „ 78·5 CC. Stickstoff bei 17° C. und 746 Mm. Druck.

VI. 0·253 Grm. gaben 44·0 CC. Stickstoff bei 18° und 747 Mm. Druck.

	Theorie für $C_7H_7N_3O_5$		Gefunden					
			1.	2.	3.	4.	5.	6.
C_7	84	39·44	39·38	39·53	—	39·52	—	—
H_7	7	3·29	3·98	—	—	3·59	—	—
N_3	42	19·72	—	—	19·10	—	19·75	19·93
O_5	80	37·55	—	—	—	—	—	—
Mol.=	213	100·00.						

Demnach liegt hier Fischer's Apocaffeïn[1] vor. Wir haben den Körper direct aus Caffeïn, auf einem völlig anderen Wege erhalten als Fischer, welcher ihn aus seinem Diäthyloxyhydrocaffeïn beim Erwärmen mit Salzsäure, also auf einem Umwege bekommen hat. Desshalb haben wir auch nicht gezögert, die näheren Angaben unserer Versuche mitzutheilen, behalten aber gerne den Namen bei, welchen Fischer dem Körper gegeben hat. Bei unseren Versuchen ist das Apocaffeïn durch directe Oxydation unter Methylaminabspaltung aus Caffeïn nach der Gleichung:

$$C_8H_{10}N_4O_2 + H_2O + O_2 = C_7H_7N_3O_5 + CH_3NH_2$$

gebildet worden.

[1] Berichte d. deutschen chem. Gesellschaft. 1881, p. 642.

Beim Kochen von Apocaffeïn mit Wasser hat Fischer Entwicklung von Kohlensäure und die Bildung von zwei neuen Körpern beobachtet, von Hypocaffeïn und Caffursäure, von denen das erstere zuerst nach dem Eindampfen auskrystallisirt, die letztere sich aber als Nebenproduct in der Mutterlauge vorfindet.

Wir haben den beim Kochen des Apocaffeïns in wässeriger Lösung ablaufenden Vorgang ebenfalls studirt zu einer Zeit, als wir das Apocaffeïn noch nicht als solches erkannt hatten.

Als Unterschied gegenüber den Resultaten von Fischer ergab sich der, dass wir bei genügend langem, einige Stunden währendem Kochen unter Ersatz des verdampfenden Wassers nicht zwei, sondern nur eine einheitliche Substanz erhielten, die wir alsbald als die Caffursäure Fischer's erkannten.

Zum Belege folgen die Analysen:

I. 0·3225 Grm. gaben 0·153 Wasser.
II. 0·3095 „ „ 0·437 Kohlensäure und 0·148 Wasser.
III. 0·2878 „ „ 56 CC. Stickstoff bei 16° und 748 Mm. Druck.
IV. 0·2775 Grm. gaben 0·3935 Kohlensäure und 0·1275 Wasser.
V. 0·292 Grm. gaben 0·417 Kohlensäure und 0·145 Wasser.

		Gefunden				
Caffursäure $C_6H_9N_3O_4$		1.	2.	3.	4.	5.
C	38·50 Perc.	—	38·50	—	38·67	38·95
H	4·81 „	5·27	5·31	—	5·10	5·18
N	22·46 „	—	—	22·48	—	—

Die Zerlegung war also vollständig nach der Gleichung:

$$C_7H_7N_3O_5 + H_2O = C_6H_9N_3O_4 + CO_2$$

abgelaufen.

Auf die Constitution dieser beiden Körper werden wir uns angesichts der Untersuchungen von Fischer nicht einlassen; wir würden dieselben auch nicht zum Gegenstande unseres Studiums gemacht haben, wenn sie uns nicht unbeabsichtigt auf dem angegebenen neuen Wege unter die Hände gekommen wären.

Revision der Amalinsäureformel; Dimethyldialursäure; Synthese der Amalinsäure.

Über Rochleder's Amalinsäure herrschen in den meisten Hand- und Lehrbüchern theilweise unrichtige Angaben. Die Hauptsache dieser Unrichtigkeiten ist eine falsche Formel; so steht zum Beispiel im Lehrbuch der organischen Chemie von Gorup-Besanez, 5. Auflage, pag. 474, im Fehling'schen Handwörterbuch, Band II, pag. 341, im Dictionnaire de Chimie par A. Wurz, T. I, pag. 694; im Kolbe'schen Handbuch der organischen Chemie, Band III *a*, pag. 639 u. s. w. die Formel $C_{12}H_{12}N_4O_7$. Dies ist offenbar daher gekommen, dass bei den, dem Alloxantin ähnlichen und prägnanten Farbreactionen den Alkalien gegenüber die Amalinsäure schon frühzeitig als vierfach methylirtes Alloxantin angenommen wurde, was man vom wasserfreien Alloxantin $C_8H_4N_4O_7$ ausgehend, durch die Formel $C_8(CH_3)_4N_4O_7 = C_{12}H_{12}N_4O_7$ bezeichnen zu müssen glaubte.

Allein ein solcher Körper verlangt eine andere Zusammensetzung, als sie von Rochleder (dessen Analysen die einzigen sind) gefunden worden ist.

Rochleder's berechnete Formel $C_{12}H_7N_2O_8$ [1]	Rochleder gefunden im Mittel	Die Bücherformel $C_{12}H_{12}N_4O_7$ verlangt
C.....42·10	41·97	44·44
H .... 4·09	4·24	3·70
N ....16·37	16·46	17·29
O ....37·44	37·27	34·57

Wie man sieht, gehen die analytischen Resultate und die von den meisten Büchern reproducirte und üblich gewordene Formel weit auseinander. Wenn man Rochleder's Formel verdoppelt, so kommt man zu $C_{12}H_{14}N_4O_8$, einem Körper, der um H_2O mehr enthält. Dieses Molekül Wasser darf aber nicht ohne Weiteres aus der Formel weggelassen werden, denn es ist kein Krystallwasser, das beim Erwärmen weggeht.

Wir haben im Exsiccator getrocknete Amalinsäure auf 120° und höher erhitzt, sie hat aber dabei nichts an Gewicht verloren.

[1] Darin C = 6, O = 8.

Es tritt erst dann Gewichtsverlust ein, wenn sie sich bereits zersetzt. Da man desshalb die Rochleder'sche Formel auch nicht in $C_{12}H_{12}N_4O_7+H_2O$ auflösen darf, so haben wir, um zu sehen, ob die allgemein gebrauchte Formel nicht etwa doch trotz der vorhandenen Analysen die richtige sei, nachdem uns grössere Mengen Amalinsäure zu Gebote standen, einige Analysen angestellt,[1] die wir hier mittheilen wollen, von denen aber im vorhinein zu bemerken ist, dass sie mit den von Rochleder ausgeführten gut übereinstimmen und auch darin haben wir des Letzteren Angaben bestätigt gefunden, dass die Amalinsäure sehr schwer verbrennlich ist und leicht ein kleiner Ausfall von Kohlenstoff erhalten wird.

I. 0·3084 Grm. Amalinsäure gaben 40·4 CC. Stickstoff, bezogen auf 0° und 760 Mm.

II. 0·3171 Grm. gaben 0·4840 Grm. CO_2 und 0·1233 Grm. H_2O.

III. 0·2856 „ „ 0·4408 „ „ „ 0·1141 „ „

IV. 0·3280 „ „ 0·5090 „ „ „ 0·1280 „ „

V. 0·2830 „ „ 0·4305 „ „ „ 0·1151 „ „

oder

	1.	2.	3.	4.	5.	Mittel	$C_{12}H_{14}N_4O_3$ will
C...	—	41·63	42·09	42·32	41·48	41·90	42·10
H ..	—	4·32	4·45	4·34	4·52	4·39	4·09
N ..	16·37	—	—	—	—	16·37	16·37

Für die Constitution der Amalinsäure ist nun der folgende von uns angestellte Versuch massgebend. Erhitzt man sie mit Wasser und leitet unter fortdauerndem Kochen Schwefelwasserstoff ein, so findet Trübung, dann Schwefelabscheidung statt. Die Amalinsäure ist also durch den Schwefelwasserstoff reducirt worden. Ist sie gänzlich verschwunden und durch einen Strom Wasserstoff aller Schwefelwasserstoff ausgetrieben worden, so hat man eine farblose Flüssigkeit, in welcher Dimethyldialursäure enthalten ist:

---

[1] Vier der mitgetheilten Analysen sind von Herrn Hinteregger ausgeführt worden.

$$C_{12}H_{14}N_4O_8 + H_2S = S + 2C_6H_8N_2O_4.$$

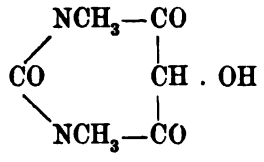
Diese Flüssigkeit bildet schon beim Stehen im offenen Gefässe, sowie bei der Behandlung mit Oxydationsmitteln (Kaliumpermanganat und Salpetersäure) wieder Amalinsäure zurück, welches Verhalten so auffallend an das der einfachen Dialursäure, die ebenfalls schon bei der Berührung mit Luft in Alloxantin übergeht, erinnert, dass wir nicht zweifelten, die homologe dimethylirte Säure vor uns gehabt zu haben. Mit der Isolirung derselben haben wir uns desshalb nicht beschäftigt, weil von einfacher Dialursäure angegeben wird, dass es kaum möglich erscheint, sie ganz alloxantinfrei zu gewinnen.

Hingegen können wir im Folgenden einen Versuch mittheilen, der eine Synthese der Amalinsäure darstellt und gleichzeitig die Anwesenheit der entsprechenden Dialursäure beweist. Bekanntlich entsteht das (einfache) Alloxantin beim Mischen der Lösungen gleicher Moleküle Alloxan und Dialursäure. Wir hatten also nur nöthig, eine Lösung unseres Dimethylalloxans mit einer solchen unserer Dimethyldialursäure zu mischen und mussten dann einen Niederschlag von Amalinsäure erhalten, nach der Gleichung:

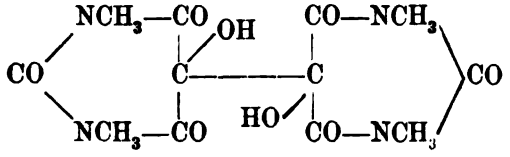
$$\underset{\text{Dimethyl-dialursäure.}}{C_6H_8N_2O_4} + \underset{\text{Dimethyl-alloxan.}}{C_6H_8N_2O_5} = \underset{\text{Amalinsäure.}}{C_{12}H_{14}N_4O_8} + H_2O.$$

In der That entsteht sofort Amalinsäure bei diesem Versuche. Um ihn aber vollends beweisend zu machen, wurde derselbe quantitativ ausgeführt, indem man ein Grm. Amalinsäure mittelst Schwefelwasserstoff in Dimethyldialursäure überführte, den in der Flüssigkeit noch enthaltenen Schwefelwasserstoff auf das sorgfältigste durch Wasserstoff vertrieb und nun eine Lösung der äquivalenten Menge Dimethylalloxan (das ist 1·26 Grm. der gewässerten Krystalle) hinzumischte. Sofort fiel ein weisser Niederschlag aus, dem man noch 24 Stunden Zeit liess zur völligen Ausscheidung. Getrocknet wog die so erhaltene Amalinsäure 2·005 Grm., während die Theorie für den Versuch 2·000 Grm. verlangt.

Wir können daraufhin der Dimethyldialursäure die Formel:



und der Amalinsäure die Formel eines Tetramethylallo xantins:



zuschreiben.

Behandelt man das Dimethylalloxan in wässeriger Lösung mit Schwefelwasserstoff, so erhält man zuerst Amalinsäure, später nur Dimethyldialursäure; aber es ist klar, dass man das Stadium, in dem man Amalinsäure allein hat, nur durch Zufall wird treffen können.

Zersetzung der Amalinsäure beim Kochen mit Wasser.

Wenn man Amalinsäure umkrystallisirt, so erleidet man grossen Verlust. Kocht man reine Amalinsäure mehrere Stunden mit Wasser in offener Schale und engt dann ein, so hinterbleibt eine weisse, neutral reagirende, in Wasser leicht lösliche, unzersetzt sublimirende Krystallmasse, die weder eine Reaction mit Eisensalzen, noch mit Alkalien oder Barytwasser gibt und auch die Parabansäurereactionen [1] nicht zeigt.

Durch Umkrystallisiren aus Wasser erhält man leicht seidenglänzende flache Nadeln, die bei 208° schmelzen, mit Natronlauge gekocht, Methylamin entwickeln, worauf die alkalische Lösung dann Oxalsäure enthält.

Die Mutterlauge dieser ersten Krystallisation eingeengt, gibt bis auf den letzten Tropfen, den früheren gleich aussehende Krystalle, die ebenfalls bei 207° schmelzen.

---

[1] Andreasch, Diese Sitzungsber., Bd. 83, II. Abth. oder Monatshefte für Chemie, II. 276.

Es wird also nur eine einzige feste Substanz aus der Amalinsäure erzeugt, die nach ihren Eigenschaften nichts Anderes als Dimethyloxamid ist. Zu allem Überflusse wurde noch eine Stickstoffbestimmung gemacht:

0·2157 Grm. bei 100° getrockneter Substanz gaben 42·1 CC. Stickstoff auf 0° und 760 Mm. Druck bezogen.

Dimethyloxamid verlangt	Gefunden
24·14 Perc. N	24·43 Perc. N.

Kocht man die Amalinsäure in einer Retorte mit Wasser, so enthält man als Destillat nur Wasser, das Kohlensäure enthält. Die Zersetzungsproducte sind daher nur Dimethyloxamid und Kohlensäure und die Zersetzung verläuft unter Mitwirkung des Luftsauerstoffes nach der Gleichung:

$$C_{12}H_{14}N_4O_8 + H_2O + 3O = 2(C_4H_8N_2O_2) + 4CO_2.$$

Einwirkung von Chlor auf Theobromin.

Rochleder und Hlasiwetz [1] geben in einer kurzen Notiz an, dass sie bei Einwirkung von Chlor auf Theobromin ebenfalls eine die Alloxanreaction gebende Flüssigkeit und daneben Methylamin erhalten haben. Weiteres ist nicht angegeben worden, wir haben den Versuch also wiederholt.

Theobromin wurde in Wasser suspendirt und Chlor eingeleitet; nach dem Einengen schied sich eine Krystallmasse ab, die nicht die Reactionen einer Amalinsäure gab, aber die der Parabansäuren. Durch Umkrystallisiren wurden klare Prismen erhalten, die bei 147° schmolzen, bei 102° erstarrten, also Monomethylparabansäure waren, derselbe Körper, der auch bei der Oxydation des Theobromins mit Chromsäure entsteht. Die Einwirkung war also weiter gegangen. Leichter und sicherer gelingt es, bei

Einwirkung von Kaliumchlorat und Salzsäure auf Theobromin

den Process zu beherrschen, wenn man, so wie früher beim Caffeïn angegeben worden ist, wieder von der Annahme ausgeht, dass

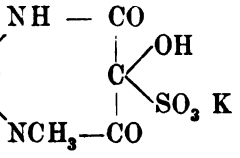
[1] Sitzb. d. kais. Ak. d. Wiss., Wien, Band 4, pag. 266.

auf drei Moleküle Theobromin (180×3) nicht mehr als zwei Moleküle Kaliumchlorat (122·5×2) einwirken dürfen.

Es werden also zwei Theile Theobromin mit acht Theilen der verdünnten Salzsäure von 1·06 sp. G. auf 50° erwärmt und nach und nach 0·907 Theile Kaliumchlorat eingetragen. Die Einwirkung erfolgt langsamer als beim Caffeïn und die Flüssigkeit, die sich nicht völlig klärt, wird filtrirt. Nachdem durch einen Luftstrom Reste chloriger Producte ausgetrieben worden sind, versetzt man mit einer concentrirten Lösung von Kaliumhydrosulfit.

Monomethylalloxan-Kaliumhydrosulfit.

$C_5H_5KN_2SO_7 + H_2O$ oder



$. H_2O.$

Die nach 24stündigen Stehen in der Kälte abfiltrirte Krystallmasse wird abgesaugt und aus warmem Wasser umkrystallisirt, wobei grosse glasglänzende, wohlausgebildete, monokline Säulen mit schiefer Endfläche und dem Klinopinakoid erhalten werden.

Analysen:

I. 0·294 Grm. mit concentrirter Schwefelsäure abgeraucht, gaben 0·087 Grm. Kaliumsulfat.

II. 0·5680 Grm. mit Natronkalk verbrannt; zur Neutralisation verbraucht 13·7 CC. Säure, wovon 1 CC. = 3·806 Mgr. N.

	Berechnet	Gefunden 1.	Gefunden 2.
Kalium	13·27 Perc.	13·27	—
Stickstoff	9·52 „	—	9·18.

Monomethylalloxan und Apotheobromin.

Bei einer neu mit Salzsäure und Kaliumchlorat verarbeiteten Partie von Theobromin wurde nach Durchleiten eines Luft-

stromes mit Äther ausgeschüttelt. Die ätherischen Auszüge verdampft, der Rückstand im Vacuum von den letzten Ätherresten befreit. Es hinterbleibt ein zäher farbloser Firniss, der sich beim Bespritzen mit Wasser genau so verhält wie das correspondirende Ätherextract aus Caffeïn: erst Trübung, dann Ausscheidung eines krystallinischen weissen Pulvers.

Dieses letztere ist die dem Apocaffeïn entsprechende Verbindung, die wir desshalb Apotheobromin nennen wollen. Sie ist in kaltem Wasser wenig löslich, entwickelt beim Kochen Kohlensäure und schmilzt bei 185° C.

Das Filtrat vom Apotheobromin gibt die Alloxanreaction und enthält ohne Zweifel das einfach methylirte Alloxan. Es ist vorläufig nicht analysirt worden, was gelegentlich nachgetragen werden soll.

Die Amalinsäure des Theobromins: Dimethylalloxantin.

$$C_{10}H_{10}N_4O_8 \cdot 4H_2O.$$

Eine dritte Partie des Einwirkungsproductes von Salzsäure und Kaliumchlorat auf Theobromin wurde mit Schwefelwasserstoff behandelt; es setzten sich nach einigem Stehen in der Kälte zusammen mit dem Schwefel Krystallschüppchen ab. Nach dem Abfiltriren und Umkrystallisiren aus möglichst wenig heissem Wasser schied sich ein Körper in irisirenden Blättchen und in aus dünnen Blättchen zusammengesetzten Warzen ab.

Der Körper kennzeichnet sich als die der Amalinsäure correspondirende Verbindung respective als ein Alloxantin durch seine Reactionen: Violettfärbung mit Laugen oder Barytwasser, Rothfärbung mit Ammoniak. Auf 130° erhitzt, färbt er sich roth, ebenso beim Liegen an der Luft. In Äther und Alkohol ist er nicht oder doch schwer löslich.

Analysen:

I. 0·2835 Grm. gaben 0·325 Grm. Kohlensäure und 0·1265 Wasser.

II. 0·3065 Grm. gaben 38·5 CC. Stickstoff bei 739·5 Mm. Druck und 15°.

Ein Dimethylalloxantin mit vier Molekülen Wasser $C_{10}H_{10}N_4O_8+4H_2O$

	verlangt		Gefunden	
			1.	2.
C_{10}	120	31·09	1·26	—
H_{18}	18	4·66	4·96	—
N_4	56	14·51	—	14·49
O_{12}	192	49·74	—	—
Mol. =	386	100·00.		

Die Untersuchungen werden fortgesetzt werden.

Graz, am 5. Februar 1882.

Über Naphtalintetrasulfosäure.

Von C. Senhofer.

In diesen Berichten (Bd. LXXII, Abth. II, October-Heft 1875) wurde gezeigt, dass durch die Einwirkung von Vitriolöl und Phosphorsäure-Anhydrid auf Naphtalin eine Naphtalintetrasulfosäure sich bilde. Schon damals wurde die Frage offen gelassen, ob bei dem eingeschlagenen Verfahren jene Säure als das einzige Sulfirungsproduct auftrete, oder nicht. Das Verhalten des Barytsalzes bei seiner Ausscheidung aus wässeriger Lösung liess, da die früher versuchte mechanische Trennung kaum auf Vollständigkeit Anspruch machen konnte, beide Annahmen zu.

In Fortsetzung der Versuche war mein Streben dahin gerichtet, theils die Naphtalintetrasulfosäure, Salze derselben, sowie ihr chemisches Verhalten näher kennen zu lernen, theils zu untersuchen, ob neben der genannten Säure noch andere Sulfirungsproducte des Naphtalins entstanden seien.

Im Nachfolgenden gebe ich meine Erfahrungen, soweit selbe zu einem Ergebnisse geführt haben.

Weder das rohe Barytsalz, noch das entsprechende Kupfer- und Kalisalz, deren Darstellung unten angegeben ist, lassen bei der Einwirkung verschiedener Lösungsmittel und Reagentien die Anwesenheit mehrerer Verbindungen erkennen. Löst man aber das rohe Kupfersalz in heissem Wasser, und sorgt dafür, dass die Ausscheidung bei sehr allmäligem Sinken der Temperatur langsam erfolgt, so scheiden sich massive Prismen aus, die fast rein blau erscheinen, während die Mutterlaugen eine schön grüne Farbe besitzen. Durch vorsichtiges Einengen der letzteren können noch mehrere blaue Krystallisationen erhalten werden, welche durch Umkrystallisiren zu reinigen sind.

Erst wenn die Mutterlaugen dickflüssig werden, zeigen sich nach dem vollständigen Erkalten die blauen Ausscheidungen eingebettet in eine weiche krystallinische Masse, welche schön grün ist. So lange die blauen Krystalle dabei vorwalten, können sie durch Nachwaschen mit lauwarmem Wasser und nachträglich durch Umkrystallisiren vollständig gereinigt werden. Später aber löst sich in Wasser die ganze Masse gleichmässig, obwohl man in derselben leicht mit freiem Auge zweierlei Formen von Krystallen, starke Prismen, welche dem blauen, und feine Nadeln, welche dem grünen Kupfersalze entsprechen, erkennen kann.

Ganz ähnlich war der Erfolg als das Barytsalz zur Trennung zu benützen versucht wurde. Wieder erhielt man unschwer das Barytsalz jener Säure, welche ein blaues Kupfersalz gibt, rein. Das zweite Barytsalz blieb stets durchsetzt von Krystallen des ersteren. Die analogen Versuche mit dem Kalisalz gaben ein noch weniger günstiges Resultat.

Es gelang also auch durch Krystallisation die Trennung der vorliegenden Verbindungen nur insoferne, als nur eine Verbindung rein erhalten werden konnte, während die zweite vorhandene nicht analysenrein zu gewinnen war.

Ich muss mich daher darauf beschränken, nur über die eine der angedeuteten Verbindungen Näheres mitzutheilen, und zwar in der Reihenfolge, die dem natürlichen Gange der Untersuchung entsprach.

Verfährt man bei der Darstellung des Barytsalzes wie es in der oben citirten Abhandlung angegeben und überlässt das Filtrat anstatt einzudampfen dem langsamen Verdunsten bei gewöhnlicher Temperatur oder höchstens bei 30—35°, so scheiden sich starke, schief abgestutzte Prismen aus, welche nicht selten eine Länge von 3—4 Ctm. erreichen, aber stets gelb bis braun gefärbt erscheinen. Vollkommen farblos werden dieselben Krystalle erhalten, wenn man die Verbindung aus freier Säure, welche durch Schwefelwasserstoff aus dem Blei- oder Kupfersalze abgeschieden worden war, durch Kochen mit kohlensaurem Baryt darstellt.

Die bei 200° getrocknete Verbindung gab bei der Analyse Zahlen, welche der Formel eines naphtalintetrasulfosauren Baryts hinlänglich nahe kommen.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_4S_4O_{12}Ba_2$
C	16·74	16·71
H	0·86	0·56
S	17·61	17·83
Ba	37·85	38·16

Der Krystallwassergehalt der Verbindung ist ein sehr wechselnder und wahrscheinlich abhängig von der Temperatur, bei der die Ausscheidung erfolgte. So verlor die lufttrockene Substanz aus verschiedenen Krystallisationen bei 200° getrocknet 15·07, 19·94, 24·54 und 27·14 Procente Krystallwasser. Obiger Formel des naphtalintetrasulfosauren Baryts mit 7, 10, 13 und 15 Molekülen Wasser entsprechen 14·93; 20·05; 24,58 und 27·33 Procent.

Dieser verschiedene Krystallwassergehalt bedingt auch ein verschiedenes Verhalten der Krystallisationen an der Luft; die meisten derselben verwittern sehr rasch durch und durch, andere bleiben unverändert, während wieder andere nur theilweise verwittern.

In einzelnen, opak gewordenen Krystallen wurden im Innern Hohlräume wahrgenommen.

In heissem Wasser werden die lufttrockenen Krystalle, soferne sie sich nicht lösen, rasch opak und lösen sich dann auch in neuen Wassermengen viel schwerer.

Ihre wässerige Lösung fällt weder mit neutralem noch mit basisch-essigsaurem Blei, und gibt mit Eisenchlorid keine Farbenreaction.

Bleisalz. Dieses wurde dargestellt, indem die Lösung des Barytsalzes in Wasser durch einen Überschuss verdünnter Schwefelsäure zersetzt und der sauren Flüssigkeit hierauf unter Kochen so lange kohlensaures Bleioxyd zugesetzt wurde, als noch eine Kohlensäureentwicklung wahrzunehmen war. Aus dem eingeengten Filtrate scheidet sich eine sehr leicht lösliche, undeutlich krystallinische Masse aus.

Bei 150° getrocknet, gab die Verbindung bei der Analyse:

	Gefunden	$C_{10}H_4S_4O_{12}Pb_2$
C	13·88	13·99
H	0·61	0·47
Pb	48·01	48·25

Die lufttrockene Substanz entspricht der Formel

$$C_{10}H_4S_4O_{12}Pb_2 + 6H_2O$$

bei 150° getrocknet, verlor sie:

	Gefunden	Berechnet
$5H_2O$	9·68	9·49

Zersetzt man das Bleisalz durch Schwefelwasserstoff in wässeriger Lösung und sättigt hierauf mit kohlensaurem Kupferoxyd ab, so scheidet sich das Kupfersalz nach längerem Stehen in sehr gut ausgebildeten starken Prismen aus, welche eine rein blaue Farbe besitzen, und leicht in warmem, schwer in kaltem Wasser löslich sind.

Bei 150° getrocknet, hält das Salz noch 3 Molekule Krystallwasser zurück und entspricht so der Formel

$$C_{10}H_4S_4O_{12}Cu_2 + 3H_2O.$$

	Gefunden	Berechnet
C	19·34	19·21
H	1·97	1·60
Cu	20·41	20·29

Bei 100° und 150° getrocknet, hatte die lufttrockene Substanz 17·35 und 20·49 Procent Krystallwasser verloren. Aus der Formel $C_{10}H_4O_{12}Cu_{12} + 12H_2O$ berechnen sich für den Verlust von $7\frac{1}{2}$ und 9 Molekülen Wasser 17·16 und 20·59 Procent.

Durch die Zersetzung des Kupfersalzes mit Schwefelwasserstoff wurde die freie Naphtalintetrasulfosäure erhalten.

Aus der wässerigen Lösung scheidet sie sich im Vacuum über Chlorcalicum in starken Prismen aus, welche sehr leicht löslich sind. Nach dem Eindampfen auf dem Wasserbade erstarrt die Säure gleichfalls schön krystallinisch beim Erkalten.

Bei 100° getrocknet, entspricht die Verbindung der Formel

$$C_{10}H_8S_4O_{12} + 4H_2O.$$

	Gefunden	Berechnet
C	22·94	23·08
H	3·04	3·08

Die bei 100° getrocknete Substanz verlor bei 150° 8·51 Procent Krystallwasser, aus obiger Formel berechnen sich für $2^1/_2H_2O$ 8·65 Procente.

So getrocknet, gab sie bei der Analyse:

	Gefunden	$C_{10}H_8S_4O_{12} + 1^1/_2H_2O$
C	25·07	25·26
H	2·40	2·32
S	26·78	26·95

In Äther ist die Säure unlöslich, in kaltem Alkohol schwer löslich, und aus alkoholischer Lösung kann sie durch Äther ausgefällt werden. Selbst beim Erhitzen der Verbindung auf 170° konnte keine Zersetzung wahrgenommen werden; steigert man aber die Temperatur höher, so zeigt sich Gasentwicklung und der Rückstand enthält Schwefelsäure.

Das Silbersalz, dargestellt durch Neutralisation der freien Säure mit kohlensaurem Silberoxyd, ist in Wasser leicht löslich, und scheidet sich daraus im Vacuum in feinen Nadeln aus, welche häufig zu dichten Warzen vereinigt erscheinen.

Bei 100° verlor die Verbindung nichts an Gewicht, und entsprach der Formel

$$C_{10}H_4S_4Ag_4O_{12} + 2^1/_2H_2O.$$

	Gefunden	Berechnet
C	12·88	13·03
H	1·23	0·98
Ag	46·72	46·91

Gegen directes Sonnenlicht ist das Salz wenig empfindlich.

Das Kalisalz, erhalten durch Neutralisation der freien Säure mit kohlensaurem Kali, scheidet sich beim Einengen im Vacuum in zu Büscheln vereinigten feinen Nadeln aus, die in Wasser leicht, in Alkohol nicht löslich sind. Die Verbindung gab bei 200° getrocknet und analysirt:

	Gefunden	$C_{10}H_4S_4K_4O_{12}$
C	20·12	20·00
H	0·98	0·67
K	25·97	26·00
S	21·02	21·33

Die lufttrockene Substanz verwittert nicht, und verliert bei 200° getrocknet 2 Molekule Krystallwasser.

	Gefunden	$C_{10}H_4S_4K_4O_{12} + 2H_2O$
$2H_2O$	5·74	5·82

Bei 100° war ihr Gewicht gleich geblieben.

Das Natronsalz, dargestellt wie das Kalisalz, krystallisirt in wohl ausgebildeten vierseitigen Prismen, welche schief abgestutzt erscheinen und an der Luft sehr rasch verwittern.

Bei 100° getrocknet, gab es bei der Analyse:

	Gefunden	$C_{10}H_4S_4Na_4O_{12} + 2H_2O$
C	20·80	20·98
H	1·63	1·40
Na	16·05	16·08

Die lufttrockene Verbindung entspricht der Formel

$$C_{10}H_4S_4Na_4O_{12} + 10H_2O,$$

bei 100° getrocknet, verlor sie an Krystallwasser.

	Gefunden	Berechnet
$8H_2O$.....	20·01	20·11

Es wurde versucht, die besprochene Säure durch schmelzendes Kali- und Natronhydrat, durch Destillation mit Cyankalium, sowie durch Erhitzen mit Salpetersäure in Derivate überzuführen, jedoch stets mit ungünstigem Erfolge. Gegen Salpetersäure zeigt sich die Naphtalintetrasulfosäure als sehr widerstandsfähig; bei der Behandlung mit schmelzenden Alkalien und Cyankalium erhält man eine so geringe Ausbeute an in Äther löslichen Producten, dass die weitere Untersuchung aufgegeben werden musste.

Über die Constitution des Guajols.

Von Dr. J. Herzig.

(Aus dem Universitätslaboratorium des Professors v. Barth.)

Während die Constitution des Guajacols vollkommen aufgeklärt ist und auch in der Kenntniss des Pyroguajacins durch die neueren Arbeiten ein weiterer Fortschritt zu verzeichnen ist, sind wir in Bezug auf den Charakter und die Natur des Guajols, des dritten bei der trockenen Destillation des Guajakharzes auftretenden Productes noch ganz im Unklaren. Zwar ist seine Zusammensetzung von verschiedenen Forschern wiederholt übereinstimmend mit C_5H_8O angegeben und die Molekulargrösse durch die von Deville ausgeführte Dampfdichtebestimmung ermittelt worden, allein von dem Charakter der Verbindung, der Natur und Constitution derselben kann man sich aus dem vorliegenden Materiale keine richtige Vorstellung machen. Und doch ist, abgesehen vom Interesse, das die Verbindung an und für sich bietet, mit der Aufklärung des Guajols auch ein weiterer Schritt zum Erkennen der im Guajakharz enthaltenen interessanten Substanzen geschehen. In der Voraussetzung, dass die früheren Versuche nur am Mangel an Material gescheitert sind, habe ich das Studium dieser Verbindung wieder aufgenommen, um einiges Licht über seine nähere Zusammensetzung zu verbreiten.

Bei der Darstellung des Materials aus dem Destillat habe ich mich an die Angaben früherer Chemiker gehalten und habe auch so ziemlich dieselben Erfahrungen gemacht, wie sie bereits wiederholt beschrieben wurden. Das Guajol kann, so oft man es auch destilliren mag, nie ganz farblos erhalten werden, bräunt sich beim Stehen nach einiger Zeit, und selbst frisches, scheinbar farbloses Product hinterlässt beim Destilliren einen bräunlichen

höher siedenden Rückstand. Die von Hlasiwetz und v. Gilm[1] angegebene Reinigungsmethode, Destillation über Kalk, habe ich vorerst unterlassen, weil ich mich früher durch einen speciellen Versuch überzeugen wollte, dass der Kalk auf die Substanz nicht etwa zersetzend einwirke. Uebrigens rührt die gelbe Färbung und die Bräunung nicht, wie Hlasiwetz meinte, von beigemengtem Guajacol her. Das Product, welches ich in Händen hatte, zeigte gar keine Spur einer grünen Eisenreaction mehr und verhielt sich doch beim Destilliren genau so wie das seinerzeit von Hlasiwetz untersuchte Präparat. Ich habe mich also zunächst darauf beschränkt, das Guajol so weit zu reinigen, dass es keine grüne Eisenreaction lieferte und vom geringen bräunlichen Rückstand abgesehen, fast constant bei 118—121° überging.

Bei einem Körper von der Zusammensetzung C_5H_8O ist es wohl nur natürlich, wenn man bald nach dem Bekanntwerden seiner Formel ihn für einen ungesättigten Aldehyd angesehen hat. In der That hat schon Gerhardt die Vermuthung ausgesprochen, dass das Guajol der Aldehyd der Angelicasäure sei. Hlasiwetz und v. Gilm[1] glaubten diese Ansicht durch das Resultat der Kalischmelze, wobei sie keine Angelicasäure erhielten, widerlegt zu haben. Sieht man aber auch von diesem wohl nicht ganz stichhältigen Argumente ab, so stand doch dieser Meinung die von einigen Forschern beobachtete Thatsache entgegen, dass das Guajol sich mit Natriumbisulfit nicht verbinde. Ich habe diesen Versuch mit meinem Präparate wiederholt und war ganz erstaunt, nicht nur eine lebhafte Wärmeentwicklung wahrnehmen zu können, sondern auch im Laufe einiger Minuten die ganze Masse in einen Krystallbrei umgewandelt zu sehen. Ich habe diesen Versuch seither wiederholt im Kleinen und im Grossen gemacht, ohne dass er auch nur einmal fehlgeschlagen hätte. Es bleibt daher nur die eine Erklärung übrig, dass die früheren Beobachtungen theils mit einer unreinen Substanz, theils mit einer nicht genügend concentrirten Natriumbisulfitlösung gemacht wurden. Meine Versuche unternahm ich mit einer Lösung von der Dichte 1·37. Ein sehr geringer Theil des Guajols entzieht

[1] Ann. Ch. Pharm. CVI, S. 379.

sich der Einwirkung des Natriumbisulfits und werde ich auf denselben noch zurückkommen.

Aus dieser Bisulfitverbindung lässt sich auf dem gewöhnlichen Wege mit Soda kein Guajol wieder gewinnen, eine Erscheinung, die auch bei anderen ungesättigten Aldehyden (Acroleïn und Crotonaldehyd) bereits beobachtet wurde.

Auch sonst verhält sich das Guajol den Aldehyden gleich, indem es Silberlösungen reducirt und sich an der Luft oder besser mit Sauerstoff oxydirt, wie man sich leicht durch einen Versuch im Eudiometerrohr über Quecksilber überzeugen kann.

War nun die Aldehydnatur des Guajols durch diese Versuche ziemlich wahrscheinlich gemacht, so hat es sich zunächst darum gehandelt, einerseits durch Oxydation die dazu gehörige Säure, andererseits durch Reduction den entsprechenden Alkohol darzustellen, um mit Hilfe dieser möglicherweise in Bezug auf ihre Constitution wohlbekannten Körper auch über die näheren Structurverhältnisse des Guajols sich Klarheit verschaffen zu können.

Oxydation. — Dass das Guajol an der Luft einen krystallinischen Körper liefert, wurde bereits von Deville beobachtet, ohne dass er die Reaction weiter verfolgt hätte. Merkwürdigerweise scheint diese Angabe Deville's von allen Forschern, die sich weiterhin mit dem Guajol beschäftigt haben, ganz übersehen worden zu sein. Und doch ist mit der Erkenntniss dieser Substanz der Schlüssel zur vollständigen Aufklärung der Constitution des Guajols gegeben. Es genügt nämlich etwa 1—2 Gr. Guajol an der Luft verdunsten zu lassen, um Krystalle zu erhalten, die bei 63° schmelzen und alle Eigenschaften der Tiglinsäure zeigen.

Bei der Darstellung der Tiglinsäure in grösserer Menge habe ich das Guajol in einer Flasche der Einwirkung des Sauerstoffes überlassen in der Art, wie von Lieben und Zeisel bei der Oxydation der durch Condensation erhaltenen Aldehyde verfahren wird. Um den Gang der Oxydation besser übersehen und eine etwa nicht oxydirbare Beimengung constatiren zu können, habe ich die Oxydation dreimal sistirt. Die Flüssigkeit wurde dann am Rückflusskühler mit kohlensaurem Calcium erwärmt und das nicht oxydirte Oel abdestillirt und wieder der Oxydation ausgesetzt. Bei der letzten Oxydation erhielt ich von 39 Gr. nur

noch gegen 2 Gr. unangegriffenes Öl und selbst dieses lieferte auf einem Uhrglase verdunstet noch immer Krystalle vom Schmelzpunkt 63—64°.

Die bei dieser Operation erhaltenen Calciumsalze wurden vereinigt und abgedampft, wobei sich ein schwer lösliches Calciumsalz ausschied. Diese Krystallisation wurde von der Mutterlauge sorgfältig getrennt, mit Schwefelsäure zersetzt und mit Äther ausgeschüttelt. Zur Entfernung etwa vorhandener niederer Fettsäuren wurde der Äther neuerdings mit Wasser geschüttelt und dann verdunstet. Er hinterliess Krystalle vom Habitus der Tiglinsäure, welche bei 63° schmelzen und constant bei 197—198° uncorr. (201·8 corr.) sieden. Genügt schon die Bestimmung dieser Constanten, um die Identität der Verbindung mit Tiglinsäure nachzuweisen, so habe ich noch die Elementaranalyse derselben ausgeführt. Sie ergab folgendes Resultat:

0.2720 Gr. Substanz gaben 0.6001 Gr. Kohlensäure und 0.1928 Gr. Wasser.

In 100 Theilen

	Gefunden	Berechnet für $C_5H_8O_2$
C=.....	60.18	60.00
H=.....	7.88	8.00.

Ich will noch bemerken, dass ich bei einigen Oxydationen im Kleinen sorgfältig jede Erwärmung vermieden habe, ohne dass sich je ein anderes Product gebildet hätte als Tiglinsäure. Es ist also eine andere Bildungsweise der Tiglinsäure als direct aus Guajol durch Oxydation, etwa aus der isomeren Angelicasäure absolut ausgeschlossen.

War durch die früher angeführten Versuche die Aldehydnatur des Guajols sehr wahrscheinlich gemacht worden, so ist dasselbe durch das Auftreten der Tiglinsäure bei der Oxydation in namhafter Menge als der der Tiglinsäure entsprechende Aldehyd charakterisirt und daher als Tiglinaldehyd zu bezeichnen.

Wenn nun auch die Ausbeute an Tiglinsäure als eine keineswegs schlechte bezeichnet zu werden verdient, so ist sie doch nicht das einzige bei der Oxydation auftretende Product. So konnte ich während der Oxydation die Entwicklung von Kohlensäure constatiren und ausserdem enthielt noch die Lauge von dem

schwer löslichen Calciumsalze der Tiglinsäure andere leicht lösliche Calciumsalze organischer Säuren. Das weitere Studium dieser Reaction habe ich unterlassen, weil mit dem Momente, in welchem das Guajol als Tiglinaldehyd erkannt war, die ganze Arbeit in ein ganz anderes Stadium getreten war. Es war mir nämlich durch persönliche Mittheilungen bekannt, dass Lieben und Zeisel im weiteren Verfolge ihrer interessanten Condensationen aus Acet- und Propionaldehyd einen Körper von der Zusammensetzung C_5H_8O erhalten haben, der denselben Siedepunkt besass wie das Guajol und sich ausserdem durch sein gesammtes Verhalten als Tiglinaldehyd erkennen liess. Uebrigens haben die genannten Forscher in einer vorläufigen Mittheilung[1] diesen Körper bereits erwähnt. Es konnte sich daher für mich nicht darum handeln, den Tiglinaldehyd genauer zu studiren, was ja ohnehin von Lieben und Zeisel bereits zum grossen Theile geschehen ist, vielmehr war es meine Aufgabe, durch weitere Versuche die Identität beider Körper festzustellen und die etwa vorhandenen Differenzen aufzuklären.

Ich habe zunächst die Krystallisation der Bisulfitverbindungen einem Vergleiche unterworfen, wobei sich gezeigt hat, dass das mir gütigst überlassene Condensationsproduct C_5H_8O als Bisulfitverbindung dieselbe Krystallform zeigt wie die des Guajols.

Als weiteren Beweis für die Identität habe ich die Reduction mit Eisen und Essigsäure gewählt. Diese Methode ist von Lieben und Zeisel[2] bei Gelegenheit der Reduction des Crotonaldehyds angewandt und beschrieben worden. Man erhält dabei in der Regel den entsprechenden gesättigten Aldehyd und ein Gemisch von gesättigtem und ungesättigtem Alkohol. Dieses Gemisch wird in Wasser gelöst, bromirt, mit Wasser am Rückflusskühler gekocht und dann der gesättigte Alkohol abdestillirt, während im Rückstande eine nicht flüchtige, im Wasser lösliche Verbindung (das entsprechende Glycerin) neben Bromwasserstoff zurückbleibt. Ich habe mich genau an die beschriebene Methode gehalten und es konnten bei der Reduction des Guajols folgende Producte constatirt werden:

[1] Berl. Ber. 1881, S. 932.

[2] Monatshefte für Chemie 1880. S. 818.

Ein gesättigter Aldehyd vom Siedepunkte 90—92° (Valeraldehyd).

Das Gemisch von gesättigtem und ungesättigtem Alkohol (Siedepunkt 125—130° (uncorr.),) und der gesättigte Alkohol (Amylalkohol) (bei 125—126° (uncorr.) siedend).

Endlich aus dem Rückstande nach dem Entfernen der Bromwasserstoffsäure und Abdampfen im Wasserbade eine zähe syrupöse süss schmeckende Masse, welche das entsprechende Pentenylglycerin darstellt.

Dieselben Producte erhielten Lieben und Zeisel nach gütiger persönlicher Mittheilung bei der Reduction des synthetischen Tiglinaldehyds.

Durch diese oben beschriebenen Versuche war die Identität des Guajols mit dem von Lieben und Zeisel erhaltenen Condensationsproducte C_5H_8O erwiesen und nur der Geruch zeigte noch einige Verschiedenheit, da er beim Guajol angenehm und weniger stechend war. Die Eliminirung dieser Differenz musste meine nächste Aufgabe sein und das nächstliegende war wohl die Reindarstellung des Guajols mit Hilfe der Bisulfitverbindung. Dieselbe bietet aber desshalb erhebliche Schwierigkeiten, weil, wie bereits erwähnt, das Guajol auf gewöhnlichem Wege aus der Bisulfitverbindung nicht wieder gewonnen werden kann. Die Zersetzung derselben gelingt aber, wie dies bereits Lieben und Zeisel beim synthetischen Tiglinaldehyd constatiren konnten, wenn man vorsichtig zur erwärmten Bisulfitlösung Barytwasser hinzutreten lässt, ohne das Gemisch alkalisch werden zu lassen. Auf diesem Wege habe ich aus der Bisulfitverbindung des Guajols ein Öl bekommen, welches alle Eigenschaften des Condensationsproductes C_5H_8O besass und sich namentlich im Geruche als vollständig identisch erwies.

Hiemit war der eine Theil der gestellten Aufgabe als gelöst zu betrachten und es blieb zum Schlusse nur noch übrig, die Natur der geringen und trotzdem den Geruch maskirenden Beimengung aufzuklären. Das Guajol, wie ich es in Händen hatte, löste sich, wie bereits erwähnt wurde, nicht ganz vollständig in Bisulfit und

es war daher auf dem Wege der Ueberführung des ganzen Guajols in die Bisulfitverbindung und nachheriges Destillirèn oder Extrahiren mit Äther die Reindarstellung dieser zweiten Substanz zu erwarten. In der That blieb nach wiederholtem Schütteln mit einer Lösung von Natriumbisulfit ein sehr geringer Antheil des Guajols ungelöst zurück, der auch einen vom Geruche des Tiglinaldehyds ganz verschiedenen Geruch zeigte. Derselbe hatte nach dem Trocknen mit Chlorcalcium einen keineswegs constanten Siedepunkt, indem er von 100—160° überging. Auch durch Fractioniren konnte ich daraus keinen Körper von einigermassen constantem Siedepunkte erhalten, und da die Flüssigkeit beim Destilliren immer nachdunkelte und ein brauner Rückstand zurückblieb, so musste ich die Reindarstellung durch Destillation aufgeben. Versuche, durch verschiedene Reactionen mir Klarheit über die Natur des Körpers zu verschaffen, misslangen, und so blieb mir bei der geringen Menge Materials nichts übrig, als auf das genauere Studium dieser Verunreinigung zu verzichten. Ich will nur erwähnen, dass bei der Oxydation von 39 Gr. Guajol dieser Körper verschwand und es muss dahingestellt bleiben, ob er als solcher durch den Sauerstoffstrom weggeführt wurde oder sich ebenfalls oxydirte und das Oxydationsproduct als Calciumsalz in die Mutterlaugen des tiglinsauren Calciums überging.

Eine Frage, die sich Jedermann stellen wird und die wohl mit Rücksicht auf das eigenthümliche Vorkommen des Guajols unter den Destillationsproducten eines Harzes überhaupt einiges Interesse für sich beanspruchen darf, ist die nach der Muttersubstanz des Guajols im Guajakharze. Von Bestandtheilen des Harzes sind es wesentlich drei, die hier berücksichtigt werden müssen, die Guajakharzsäure, die Guajaconsäure und die Guajacylsäure. Die Destillationsproducte sind nur bei der Guajacylsäure und Guajakharzsäure studirt worden. Erstere zerfällt nach Deville[1] glatt auf in Kohlensäure und Guajol, während letztere nach Hlasiwetz[2] bei der trockenen Destillation nur Guajacol und Pyroguajacin, aber kein Guajol liefern soll. Die Guajacylsäure ist aber bisher nur in so minimalen Mengen aus dem Harze

[1] Comp. rend. 19, p. 137.

[2] Ann. ch. Pharm. CXIX, S. 277.

erhalten worden, dass dieselben in gar keinem Verhältnisse zu dem in den Destillationsproducten auftretenden Guajol stehen. Als Beispiel will ich nur anführen, dass Hadelich[1] aus 2 Kilo 0·1 Gr. Guajacylsäure erhielt, während Voelkel[2] aus 3 Pfund Guajakharz 50 Gr. Guajol bekommen haben will. Man kann daher alles Guajol nur unter der Voraussetzung der Guajacylsäure zuschreiben, dass sie in grösserer Menge im Harze enthalten ist und dass die geringe Ausbeute nur durch die Mängel und Fehler der Darstellungsmethode bedingt wird. Andererseits ist es aber auch denkbar und sogar wahrscheinlich, dass der grösste Theil des Guajols seine Entstehung der Zersetzung der Guajaconsäure verdankt. Ich sage wahrscheinlich, weil viele Erscheinungen, die bei der Guajaconsäure beobachtet wurden, darauf hinzudeuten scheinen, dass sie eine ausserordentlich leicht oxydirbare Gruppe enthalten müsse. Versuche in dieser Richtung ergaben bisher kein positives Resultat. Obwohl es die eigentliche Frage nicht tangirt, will ich doch bei dieser Gelegenheit nicht unerwähnt lassen, dass sich sicher und bestimmt nachweisen liess, dass das Guajacol in der Guajaconsäure als präformirt anzusehen ist. Erhitzt man nämlich dieselbe mit bei 0° gesättigter Chlorwasserstoffsäure im zugeschmolzenen Rohre auf 170—180°, so lässt sich dann beim Öffnen des Rohres ganz deutlich die Entwicklung von Chlormethyl nachweisen und der Röhreninhalt, welcher eine dunkelbraune Farbe besitzt, gibt an Äther einen Körper ab, der an seiner Eisenreaction, Schmelzpunkt und anderen Eigenschaften als Brenzcatechin erkannt wurde. Der in Äther unlösliche Antheil konnte bis jetzt keiner genauen Untersuchung unterzogen werden. Das Studium der Guajaconsäure überhaupt bietet schon desshalb grosse Schwierigkeiten, weil sie nicht krystallisirt und man daher nie sicher sein kann, es mit einem chemischen Individuum zu thun zu haben. Sie liefert aber auch fast bei allen Reactionen amorphe Producte, so dass vorläufig noch gar nicht abzusehen ist, auf welchem Wege man ihre Constitution aufklären könnte. Doch sollen trotzdem die Versuche in den beiden oben angedeuteten Richtungen fortgesetzt werden.

[1] J. pr. Chem. 87, S. 324.

[2] Ann. ch. Pharm. 89, S. 346.

Über das Verhalten der Kalksalze der drei isomeren Oxybenzoësäuren und der Anissäure bei der trockenen Destillation.

Von Dr. **G. Goldschmiedt** und **J. Herzig.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth.)

Das Dioxybenzophenon, welches zuerst von Staedel und Gail[1] dargestellt worden ist, hat wegen seiner Beziehungen zum Aurin,[2] Phenolphtalein[3] und Rosanilin[4] ein erhöhtes Interesse gewonnen. Es ergibt sich bei demselben die Parastellung für die Hydroxylgruppen zur Carbonylgruppe. Ausser diesem Dioxybenzophenon ist noch von Städel und Sauer[5] eine isomere Verbindung, welche als β-Verbindung bezeichnet wurde, aus dem von Chancel und Laurent entdeckten Flavin erhalten worden. Ein drittes Isomeres ist ganz kürzlich durch Michael[6] bekannt worden. Dieser Chemiker stellte dasselbe durch Erhitzen von Salicylsäure und Phenol mit Zinnchlorid dar, woraus sich für dasselbe die Orthostellung einer Hydroxylgruppe ableitet. Die Theorie sieht nun sechs[7] isomere Dioxybenzophenone voraus und wir haben die nachstehend beschriebenen Versuche in der Hoffnung unternommen, die Reihe der isomeren Substanzen zu ver-

---

[1] Berl. Ber. XI. 746.

[2] Caro und Gräbe, Berl. Ber. XI. 746.

[3] Bayer und Burkhardt, Berl. Ber. XI. 1348.

[4] Liebermann, Berl. Ber. XI. 1434.

[5] Berl. Ber. XIII. 836.

[6] Berl. Ber. XIV. 656.

[7] Hiebei ist nur Rücksicht genommen auf solche Verbindungen, bei welchen die Hydroxyle auf beide Benzolreste vertheilt sind; bekanntlich haben Doebner und Stackmann (Berl. Ber. XV. 2268) ein Isomeres, bei dem diese Bedingung nicht zutrifft, das Benzoresorcin, dargestellt.

vollständigen. Die Aussicht, dieses Ziel durch Destillation der oxybenzoësauren Kalksalze zu erreichen, schien uns von vornherein sehr gering zu sein, weil ja auch Versuche,[1] die angestellt wurden, um von denselben ausgehend durch Destillation mit ameisensaurem Kalk zu den Aldehyden der entsprechenden Oxysäuren zu gelangen, nicht von Erfolg gekrönt waren. Überdies haben Ost,[2] Kupferberg[3] und v. d. Velden,[4] letzterer speciell auch oxybenzoësaure Erdmetallsalze, unter den verschiedensten Temperaturverhältnissen destillirt und hiebei in den Destillaten nie etwas Anderes als Phenol auffinden können. Es war somit die Bildung der Dioxybenzophenone auf diesem Wege in irgend erheblicher Menge nicht zu erwarten und wir haben desshalb zunächst versucht, ob dies auf dem Umwege der Destillation des Kalksalzes der Äthersäuren der Oxybenzoësäuren nicht zu erreichen wäre. Die Anissäure wurde als am leichtesten beschaffbar in Angriff genommen.

Anissäure.

Chemisch reine Anissäure wurde in das Kalksalz verwandelt und dieses, nachdem es vollkommen entwässert worden war, aus einer Ter Meer'schen Retorte über freiem Feuer destillirt; die Destillation wurde bei jeder Operation so lange fortgesetzt, bis bei gesteigerter Hitze nichts mehr überging; das Destillat betrug bei den einzelnen Operationen 29 bis 31 Percent des angewandten trockenen Kalksalzes, es war von bräunlicher Farbe, angenehm riechend. Es fing bei 150° zu sieden an und durch oft wiederholte Fractionirung konnte eine grössere bei 151—152° constant siedende Flüssigkeitsmenge isolirt werden; die über 240° siedenden Antheile erstarrten zu um so festeren Krystallmassen, bei je höherer Temperatur sie übergegangen waren, aus den dazwischen liegenden Fractionen, konnten trotz sehr häufig wiederholter Fractionirung keine Producte von constantem Siedepunkte erhalten und eine Trennung der in diesem weiten Temperatur-

---

[1] Gottig, Ber. d. chem. Ges. X, pag. 9.
[2] Journ. f. pr. Chemie. 14. S. 93.
[3] Journ. f. pr. Chemie. 13. S. 103.
[4] Journ. f. pr. Chemie. XV. pag. 151.

intervalle siedenden Substanzen auf diesem Wege nicht erreicht werden. Dies gelang aber bald, nachdem es uns aufgefallen war, dass den um 180° siedenden Antheilen ein phenolartiger Geruch eigenthümlich sei, dadurch, dass wir die vereinigten Flüssigkeiten mit verdünntem, wässerigen Kalihydrat schüttelten, den darin unlöslichen Theil in Äther aufnahmen und die ätherische von der wässerigen Flüssigkeit durch einen Scheidetrichter trennten. Nach Verdampfung des Äthers blieb ein Öl zurück, welches getrocknet und abermals fractionirt wurde; hiebei wurde noch eine kleine Menge des bei 151—152° siedenden Körpers und auch des um 250° übergehenden krystallinischen erhalten, während die dazwischen liegenden, übrigens im Ganzen nur einige Cubikcentimeter betragenden Fractionen auch jetzt noch der Trennung durch Destillation ein unüberwindliches Hinderniss entgegenstellten. Es zeigte sich später, nachdem wir die Natur des hochsiedenden Körpers mit Sicherheit festgestellt hatten, dass auch die Mittelfractionen nur die beiden erwähnten Substanzen enthalten.

Die den Mittelfractionen durch wässeriges Kali entzogenen Partien wurden daraus durch Ausschütteln der angesäuerten Lösung mit Äther wiedergewonnen, das als Rückstand des Ätherauszuges hinterbleibende Oel mit Chlorcalcium getrocknet und destillirt. Der Siedepunkt war nun constant bei 182—183° gelegen und das erstarrende Destillat konnte in Folge seines Geruches, Aussehens und Verhaltens keinen Zweifel darüber aufkommen lassen, dass wir es hier mit Phenol zu thun hatten. Die Eisenchlorid, Fichtenholzspahn-Reaction, der Schmelz- und Siedepunkt wiesen darauf hin und überdies zeigte das durch Bromwasser aus der wässerigen Lösung abgeschiedene krystallinische Product nach dem Umkrystallisiren aus Alkohol den Schmelzpunkt des Tribromphenols (94°).

Auch die Natur des bei 151—152° siedenden Körpers war leicht zu ermitteln, der Geruch, sowie der Siedepunkt liessen die Vermuthung, wir hätten es mit Anisol zu thun, um so wahrscheinlicher erscheinen, als das Entstehen dieses Körpers bei der Destillation des anissauren Kalkes ein der Bildung von Phenol aus salicylsaurem Kalk vollkommen analoger Vorgang ist. Diese Vermuthung wurde bestätigt durch Überführung der Substanz in

Phenol, beim Erhitzen mit Salzsäure im geschlossenen Rohr, sowie durch eine Dampfdichtenbestimmung nach dem Quecksilberverdrängungsverfahren ausgeführt.

Angewandte Substanz: 0·1088 Gr.
Angewandtes Quecksilber: 1092·7 Gr.
Ausgeflossenes Quecksilber: 469·7 Gr.
Anfangstemperatur des Bades 19·5°.
Temperatur des Bades 192°.
Abgemessene Höhe der wirksamen Quecksilbersäule: 93 Mm.
Barometerstand: 758·7 Mm.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_5OCH_3$
Dichte:	3·91	3·75.

Die krystallisirenden über 240° siedenden Fractionen wurden in einer Kältemischung gekühlt und dann scharf zwischen Fliesspapier gepresst und nochmals destillirt, der Siedepunkt der Substanz liegt nun bei 255°, ihr Schmelzpunkt bei 46°, diese Constanten sind jene, welche für den Anissäuremethyläther von Cahours und von Ladenburg[1] angegeben worden sind. Kocht man die Substanz mit Kalilauge am aufsteigenden Kühler, so löst sie sich darin bald auf und nach dem Ansäuern scheidet sich aus der alkalischen Lösung eine Substanz aus, welche genau den Schmelzpunkt der Anissäure 185° zeigte. Der krystallinische Körper ist also wirklich Anissäuremethyläther, was auch durch eine Analyse erwiesen wurde.

1·2425 Gr. Substanz gaben 0·5789 Gr. Kohlensäure und 0·1302 Gr. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_9H_{10}O_3$
C.....	65·16	65·06
H.....	5·96	6·02

Nachdem nun die ätherische Natur des hochsiedenden Theiles unseres Destillates ermittelt war, lag es nahe, mit den durch Fractionirung nicht entwirrbaren Producten eine Trennung durch Verseifung zu versuchen; diese wurden daher mit alkoholi-

[1] Annal. d. Chemie u. Pharm. 141, pag. 241.

scher Kalilauge am aufsteigenden Kühler gekocht, dann mit viel Wasser verdünnt. Das sich hiebei abscheidende Öl hatte nach dem Trocknen den Siedepunkt des Anisols, während aus der concentrirten alkalischen Flüssigkeit durch Salzsäure Anissäure abgeschieden wurde, so dass wir wohl behaupten dürfen, die flüchtigen Zersetzungsproducte des anissauren Kalkes beständen nur aus Anisol, Phenol und Anissäuremethyläther, oder enthalten andere Producte zum mindesten nur in verschwindend kleiner Menge. Bemerken wollen wir, dass mindestens zwei Dritttheile des Destillates auf Anisol kommen, und die beiden anderen Bestandtheile desselben zu ungefähr gleichen Antheilen sich vorfinden.

Der Destillationsrückstand, welcher eine graue, manchmal auch braune und blasige Masse darstellte, wurde mit Alkohol extrahirt, dieser hinterliess eine kleine Menge brauner Schmiere, welche nicht weiter berücksichtigt werden konnte. Der in Alkohol unlösliche Theil, welcher nun durchwegs eine hellere Farbe angenommen hatte, wurde mit viel Wasser übergossen und dieses mit Schwefelsäure angesäuert, wobei Kohlensäure in ziemlicher Menge entwich. Durch Filtriren trennte man die Lösung vom Gyps und sonstigem Unlöslichen.

Das Filtrat war hell bernsteingelb gefärbt und gab beim Schütteln mit Äther die darin löslichen Substanzen ab, welche beim Verdunsten desselben in Form eines compacten Krystallkuchen zurückblieben. Dieser Rückstand wurde in Wasser gelöst, mit Bleizucker das durch dieses Reagens Fällbare ausgefällt, der Bleiniederschlag abfiltrirt und gewaschen. Das Filtrat wurde durch Schwefelwasserstoff vom Blei befreit, nach dem Vertreiben des überschüssigen Schwefelwasserstoffes mit Äther ausgeschüttelt, dieser wieder mit Wasser zur Entfernung der Essigsäure behandelt und der Destillationsrückstand des Äthers aus Wasser krystallisirt. Die erhaltenen Krystallnadeln zeigten alle Eigenschaften der Salicylsäure, wie Schmelzpunkt, Eisenreaction u. s. w. Der im warmen Wasser suspendirte Bleiniederschlag wurde gleichfalls mit Schwefelwasserstoff zersetzt, die Lösung nach der Filtration des Schwefelbleies durch Kochen mit Thierkohle entfärbt und im Vacuum über Schwefelsäure eingedampft. Es krystallisirten schon beim Erkalten Nadeln einer Säure vom

Schmelzpunkte 281—282° heraus, deren wässerige Lösung eine intensive rothe Reaction mit Eisenchlorid liefert und welche auch in ihrem sonstigen Verhalten die grösste Übereinstimmung mit der zuerst von Ost,[1] dann von Tiemann und Reimer,[2] Jacobsen[3] und Anderen beschriebenen α Oxyisophtalsäure zeigt. Sublimirt man die Säure langsam, so spaltet sie Kohlensäure ab und das Sublimat gibt nun mit Eisenchlorid die violette Färbung der Salicylsäure und besitzt auch deren Schmelzpunkt. Auch die Silberbestimmung des durch Fällung des Ammoniaksalzes mit Silbernitrat als weissen flockigen Niederschlag erhaltenen Silbersalzes, führte zu einem Metallgehalte, der dem des neutralen α Oxyisophtalsauren Silbers entspricht.

0·4550 Gr. des im Vacuum über Schwefelsäure getrockneten Salzes gaben 0·2496 Gr. Silber.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_8H_4O_5Ag_2$
Ag.....	54·85	54·55.

Der der Hauptmasse nach aus Gyps bestehende Trockenrückstand gab an Alkohol noch eine geringe Quantität brauner Schmiere ab, aus welcher durch kochendes Wasser noch etwas Salicylsäure zu gewinnen war.

Überblickt man nun das Resultat vorstehend mitgetheilter Untersuchung, so findet sich, dass als flüchtige Zersetzungsproducte in Folge der Einwirkung der Hitze auf anissauren Kalk, Anisol, Phenol und Anissäuremethyläther entstehen, während im Rückstande Salicylsäure und Oxyisophtalsäure als Kalksalze, neben kohlensaurem Kalk und schmierigen Zersetzungsproducten gefunden wurden.

Die Deutung dieses sehr complicirt scheinenden Processes macht bei Berücksichtigung aller bekannten einschlägigen Beobachtungen keine Schwierigkeit. Die Entstehung des Anissäuremethyläthers dürfte durch nachstehende Gleichung:

---

[1] Journ. f. pr. Chemie. XIV, pag. 103 u. XV pag. 301.

[2] Ber. d. d. chem. Ges. X, pag. 1571.

[3] Ebendaselbst XI, pag. 377 u. 898.

$$C_6H_4\begin{cases}OCH_3\\COO\end{cases}Ca = C_6H_4\begin{cases}O\\COO\end{cases}Ca + C_6H_4\begin{cases}OCH_3\\COOCH_3\end{cases}$$
$$C_6H_4\begin{cases}COO\\OCH_3\end{cases}$$

eine einfache Erklärung finden. Die Umwandlung von Paraoxybenzoësäure in Salicylsäure beim Erhitzen ihrer Salze und die Bildung von Dicarbonsäuren bei gleichzeitiger Einwirkung von Kohlensäure sind durch die umfassenden und ausführlichen Untersuchungen von Kupferberg,[1] Ost[2] und v. d. Velden[3] bekannt; auch dass beim Erhitzen anissaurer Salze Anisol, oxybenzoësaurer Salze, Phenol sich bildet, sind längst bekannte Thatsachen.

Obwohl die Einwirkung höherer Temperaturen auf oxybenzoësaure Salze, namentlich auf jene der Alkalien in einer Atmosphäre von Kohlensäure von den bereits genannten Forschern gründlich studirt worden sind, so wollten wir, da unsere Versuche doch nicht unter ganz gleichen Verhältnissen ausgeführt worden sind, wie die angeführten, die Destillation der Kalksalze der drei isomeren Oxybenzoësäuren in ganz gleicher Weise durchführen, wie dies bei dem anissauren Kalke beschrieben worden ist. Im Grossen und Ganzen sind die Resultate, die hiebei erzielt worden sind, den Angaben Kupferberg's und Ost's entsprechende, so weit sich dies auf Paraoxybenzoësäure und Salicylsäure bezieht, während die Zersetzung des oxybenzoësauren Kalkes in anderer Weise verläuft, als nach den an den Alkalisalzen derselben Säure durch Kupferberg angestellten Beobachtungen zu erwarten war.

Paraoxybenzoësäure.

Bei Destillation des entwässerten Kalksalzes geht Phenol über; dasselbe ist jedoch in Alkalien nicht vollständig löslich, sondern hinterlässt hiebei einen geringen Rückstand, der durch seinen Geruch an denjenigen des Diphenylenoxyds erinnert, und welcher auch höchst wahrscheinlich von geringen Spuren des-

---

[1] l. c. [2] l. c. [3] l. c.

selben stammt. Durch Umkrystallisiren aus Alkohol unter Anwendung von Thierkohle erhält man den Körper in Gestalt langer, meist gekrümmter weisser Nadeln. Der Schmelzpunkt der Substanz liegt bei 99°. Die Menge der uns zur Zeit zur Verfügung stehenden Paraoxybenzoësäure war nicht so gross, dass wir das Studium dieser Substanz hätten unternehmen können, die vielleicht das Diphenylenoxyd[1] der Parareihe sein könnte. Es wird sich wohl Gelegenheit finden, dies bald nachzuholen. Das aus der alkalischen Lösung durch Säuren abgeschiedene Phenol war nach einmaliger Destillation rein. Der Destillationsrückstand in gleicher Weise wie jener des anissauren Kalkes untersucht, erwies sich als aus denselben Substanzen bestehend. Neben etwas schmierigen Körpern wurde kohlensaurer, basisch salicylsaurer und α oxysophtalsaurer Kalk aufgefunden.

Salicylsäure.

Dass salicylsaurer Kalk sich bei Einwirkung höherer Temperatur ganz wie das Natronsalz verhalte, ist schon längst von Ost mitgetheilt worden, auch haben wir im Rückstande, welcher beinahe weiss geblieben war, nur basisch salicylsauren Kalk nachweisen können. Das Phenol im Destillate hinterliess beim Auflösen in Ätzkali eine Quantität eines Niederschlages, welcher, wenn auch procentisch sehr gering, doch hinreichend war, um die Natur des Körpers festzustellen. Derselbe krystallisirte aus Alkohol in Blättern, deren Schmelzpunkt bei 80 bis 81° lag und gab mit Pikrinsäure eine gelbe Verbindung, die bei derselben Temperatur (94°) schmilzt, wie die von Einem von uns in Gemeinschaft mit M. v. Schmidt[2] beschriebene Pikrinsäureverbindung des Diphenylenoxydes. Überdies führte auch der charakteristische Geruch des Diphenylenoxydes zu dessen Erkennung.

Der Umstand, dass bei Untersuchung des Destillates von salicylsaurem Kalke eine, wenn auch geringe, so doch immerhin fassbare Menge Diphenylenoxyd gefunden worden, während dies

---

[1] Dass die fragliche Substanz kein Dioxybenzophenon ist, geht aus der Unlöslichkeit in Kalilauge hervor.

[2] Monatshefte II, pag. 15.

bei dem para- — und wie vorausgeschickt werden soll — dem meta-oxybenzoësauren Kalk nicht der Fall war, vielmehr die Gegenwart desselben nur durch den bekannten Geruch wahrscheinlich gemacht wurde, legt die Vermuthung nahe, das Diphenylenoxyd sei ein Orthoderivat und bilde sich in diesem Falle nicht aus dem fertig gebildeten Phenol, sondern aus den Resten von salicylsaurem Kalk. Die geringen, durch den Geruch erkennbaren Mengen, welche immer bemerkt wurden, könnten, da Salicylsäure bei der Destillation aller drei Oxybenzoësäuren sich im Rückstande vorfindet, in allen beobachteten Fällen auf diese zurückzuführen sein.

Metaoxybenzoësäure.

Der neutrale metaoxybenzoësaure Kalk, ganz so wie es in den anderen Fällen beschrieben erhitzt, gibt ein Destillat, welches grünlich gefärbt ist, dessen zuletzt übergehende Partien erstarren. Es löst sich bis auf eine kleine Trübung mit rother Farbe in Kalilauge auf. Die Lösung wurde mit Äther ausgeschüttelt, welcher die Trübung aufnahm und überdies sich gelbgrün fluorescirend färbte. Als Ätherrückstand blieb eine minimale Quantität einer schmierigen, schwach nach Diphenylenoxyd riechenden Substanz. Möglicherweise hat sich ein dem Anthrachinon nahestehendes Condensationsproduct gebildet, eine Vermuthung, die durch die grosse Condensationsfähigkeit der Metaoxybenzoësäure, sowie durch Kekule's[1] Beobachtung, dass sich beim Erhitzen des benzoësauren Kalkes Anthrachinon bilde, rechtfertigen lässt.

Die alkalische Lösung wurde angesäuert und gab das ausgeschiedene und abgehobene Öl nach einmaliger Destillation schon, erstarrendes Phenol von richtigem Siedepunkt und eine kleine Menge bei 185° nicht flüchtigen Productes, welches aus Wasser mit Thierkohle umkrystallisirt, in den für Metaoxybenzoësäure charakteristischen Krystallen anschoss und deren Schmelzpunkt und süssen Geschmack besass.

Im Rückstande fanden sich neben unveränderter Metaoxybenzoësäure Salicylsäure und auch durch Bleizucker fällbare Säuren, welche hiedurch von den erstgenannten isolirt wurden.

[1] Ber. d. chem. Ges. V, pag. 908.

Der Bleiniederschlag wurde durch Schwefelwasserstoff zerlegt, die von letzterem befreite Lösung mit Äther ausgeschüttelt und der Rückstand aus Wasser mit Thierkohle umkrystallisirt.

Die zuerst anschiessenden Krystalle gaben in Wasser gelöst keine Reaction mit Eisenchlorid und zeigten einen um 180° liegenden Schmelzpunkt, während die Mutterlaugen und daraus später anschiessende Krystalle, welche einen um 100° höher liegenden Schmelzpunkt hatten, die rothe Eisenreaction zeigten. Es ist also wohl zweifellos, dass sich bei Destillation des metaoxybenzoësauren Kalkes Salicylsäure und α-Oxyisophtalsäure bilde, wie aus der Paraoxybenzoësäure, überdies aber höchst wahrscheinlich auch die Oxyorthophtalsäure, welche zuerst von Baeyer, später von Tiemann und Landshoff, Schall und von Jacobsen beschrieben worden ist. Diese hat nämlich den Schmelzpunkt 181°, ist durch Blei fällbar und gibt keine Eisenchloridreaction. Da nun die Bildung zweibasischer Säuren unter den gegebenen Bedingungen nachgewiesen ist, dürfte es wohl am wahrscheinlichsten sein, dass die beschriebene zur genaueren Untersuchung nicht hinreichende Säure auch durch Kohlensäureaddition entstanden sei, was aus der Metaoxybenzoësäure, ohne Umlagerungen annehmen zu müssen, geschehen kann, indem für Oxyorthophtalsäure die Stellung: $C_6H_3(\underset{1}{COOH})(\underset{2}{COOH})(\underset{4}{OH})$ festgestellt ist.

Wie bereits erwähnt, ist das Verhalten des Kalksalzes der Oxybenzoësäure durchaus verschieden von jenem ihrer Alkalisalze, von welchen Kupferberg gefunden hat, dass beim Erhitzen derselben im Kohlensäurestrome weder mehrbasische Säuren, noch Isomere der Oxybenzoësäure entstehen, während es ihm auch nicht gelang, aus dem Destillate derselben reines Phenol abzuscheiden. Der von uns beschriebene Fall der directen Umwandlung von Metaoxybenzoësäure in Salicylsäure dürfte also jedenfalls bemerkenswerth sein.

Notiz über das Vorkommen von Bernsteinsäure in einem Rindenüberzug auf *Morus alba*.

Von Dr. **Guido Goldschmiedt.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. von Barth.)

Vor längerer Zeit hatte ich Gelegenheit, die Beobachtung zu machen, dass an den Stämmen älterer sowohl, als auch junger Maulbeerbäume aus Rissen der Rinde eine salzig schmeckende Flüssigkeit ausfliesse, welche namentlich an der dem Windanfalle exponirten Seite zu krystallinischen Krusten eintrocknet. Ich habe damals eine Quantität von etwa 2 Grm. dieser Krystallkrusten gesammelt und einer Untersuchung unterworfen, welche ergab, dass dieselben neben kleineren Mengen kohlensauren Kalkes, im Wesentlichen aus bernsteinsaurem Kalk bestanden. Der Geschmack der Krystalle war ganz derselbe, wie jener des reinen bernsteinsauren Kalkes. Zur Reinigung wurden die Krystalle wiederholt unter Anwendung von Thierkohle umkrystallisirt und schliesslich eine Kalkbestimmung ausgeführt.

0·2784 Grm. des bei 200° getrockneten Salzes lieferten 0·0982 „ Kalk.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_4H_4O_4Ca$
Ca...	25·19	25·64

Der Rest des Salzes wurde mit verdünnter Schwefelsäure zersetzt, zur Abscheidung des Gypses mit Alkohol versetzt und die Säure durch Verdunsten des letzteren wieder gewonnen. Nach mehrmaligem Umkrystallisiren wurde der Schmelzpunkt 180° beobachtet, welcher der Bernsteinsäure zukömmt. Durch Destillation konnte das bei 160° schmelzende Anhydrid erhalten werden,

auch die anderen für Bernsteinsäure charakteristischen Reactionen trafen bei dieser Säure vollkommen zu, so dass deren Identität mit Bernsteinsäure zweifellos erscheint.

Das Auftreten von „Ausschwitzungen" an Maulbeerbäumen ist schon vor langer Zeit von Klaproth beobachtet und sind dieselben als Kalksalz einer Säure, die er „Maulbeerholzsäure" nannte, beschrieben worden. Später untersuchte Landerer dieselben und scheint mit jenen Klaproth's übereinstimmende Angaben gemacht zu haben. Anders verhält sich ein Rindenüberzug, den Rouchas in Händen hatte. Mir ist keine der diesbezüglichen Arbeiten im Originale zugänglich gewesen, es scheint aber, dass aus derjenigen Klaproth's zum Mindesten eine grosse Ähnlichkeit der Maulbeerholzsäure mit Bernsteinsäure zu entnehmen ist, denn Gmelin[1] sagt in seinem Handbuche: „Vielleicht ist die von Klaproth beschriebene Maulbeerholzsäure, welche bisweilen in Verbindung mit Kalk aus dem Stamme von *Morus alba* ausschwitzt, nichts anderes als Bernsteinsäure", eine Vermuthung, welche also durch vorstehende Notiz ihre Bestätigung findet.

Das Vorkommen von Bernsteinsäure in Pflanzensäften ist eine längst bekannte und an einer grossen Anzahl von Kräutern erwiesene Thatsache, hingegen findet sich keine Angabe, welche dasselbe in aus Organen von Bäumen gewonnenen Säften mit Bestimmtheit behaupten würde. Der Umstand nun, dass an allen Stellen der Rinde, aus welchen die Ausscheidung erfolgt, sich auch eine braune humusartige Substanz vorfand, liess mich vermuthen, dass die Bernsteinsäure in diesem Falle vielleicht kein physiologisches Secret, vielmehr das Product eines pathologischen Processes sein könnte.

Herr Professor Wiesner, welcher die grosse Freundlichkeit hatte, auf meine Bitte diese braune Substanz einer Untersuchung zu unterziehen, theilte mir hierüber Folgendes mit:

„Die humusartige Substanz besteht aus eingetrockneten Plasmodien und sporenführenden Fruchtkörpern eines Myxomiceten, höchstwahrscheinlich einer Äthaliumart.

Die Sporen waren noch keimfähig und liessen sich daraus Myxomiceten erziehen. Weiter wurde die Cultur nicht fortgesetzt.

---

[1] Handbuch, V, pag. 253.

Die Plasmodien der Myxomiceten sind nach Reinke's[1] Untersuchung sehr reich an Mineralsubstanz. (Die Untersuchung liefert bis über 40% Asche, welche sehr reich an Kalk ist.)

Bernsteinsäure wurde in den Plasmodien von Reinke nicht nachgewiesen. Dies lässt wohl vermuthen, dass der bernsteinsaure Kalk nicht von den Myxomiceten herrührt, vielmehr scheint die Annahme berechtigt, dass dieser auf dem kalkreichen Substrat sich ansiedelt."

Vielleicht ist das Auftreten der Bernsteinsäure auf einen Gährungsprocess zurückzuführen, in Folge dessen die im Safte der Maulbeerbäume[2] bekanntlich vorkommende Äpfelsäure in Bernsteinsäure umgewandelt wird, eine Metamorphose, welche nach den Untersuchungen von Fitz[3] bei Spaltpilzgährungen ziemlich glatt verläuft, nachdem er in Folge quantitativer Bestimmungen für dieselbe zur Umsetzungsgleichung $3C_4H_6O_5 = 2C_4H_5O_4 + C_2H_4O_2 + 2CO_2 + H_2O$ gelangt.

---

[1] Studien über das Protoplasma.

[2] Gmelin, Handbuch, V, pag. 336.

[3] Ber. d. deutsch. Ges., XII, pag. 481.

Über polaristrobometrische Methoden.

Von **F. Lippich** in Prag.

(Mit 1 Tafel.)

I.

Die verschiedenen Polarisatoren geben entweder nur für eine einzige Strahlenrichtung genau geradlinig polarisirtes Licht oder, wenn für alle Strahlenrichtungen innerhalb gewisser Grenzen das Licht geradlinig polarisirt wird, so weichen doch die Polarisationsebenen für die einzelnen Strahlenrichtungen in ihrer Orientirung von einander ab. Bringt man daher zwei Polarisatoren in gekreuzter Stellung vor das Auge, so wird im Allgemeinen das Gesichtsfeld nicht gleichförmig dunkel erscheinen können, sondern von Stellen grösster Dunkelheit aus eine gewisse Abtönung, eine gewisse Helligkeitsvertheilung zeigen, die je nach Umständen, nach der Art der in Verwendung gebrachten Polarisatoren, eine sehr verschiedene sein kann.

Man scheint jedoch der Helligkeitsvertheilung im Gesichtsfelde gekreuzter Polarisatoren und ihrer Abhängigkeit von der Natur der letzteren wenig Aufmerksamkeit zugewendet zu haben und der Grund hievon mag wohl in zwei Umständen zu suchen sein. Einestheils sind die Helligkeitsunterschiede innerhalb eines kleinen Gesichtsfeldes von wenigen Graden, wie es bei Messinstrumenten vorzukommen pflegt und bei Anwendung von Lichtquellen gewöhnlicher Intensität wenig auffallend; bei Polarisationsapparaten aber mit grossem Gesichtsfelde treten anderweitige Umstände hinzu, die einen hohen Grad von Dunkelheit überhaupt nicht zu Stande kommen lassen und meist erfordert auch der Zweck dieser Instrumente keinen solchen. Anderntheils, wenn man bei mässig grossem Gesichtsfelde die Helligkeitsunterschiede durch Anwendung sehr intensiver Lichtquellen, durch

Sonnenlicht, elektrisches Licht u. s. f. bemerkbar zu machen sucht, so geben die Polarisationsinstrumente in der Regel bei der Dunkelstellung ein relativ sehr helles Gesichtsfeld, in welchem wieder alle feineren Unterschiede in der Helligkeit verschwinden.

Über die Helligkeitsvertheilung im Gesichtsfelde gekreuzter Polarisatoren habe ich in der mir zugänglichen einschlägigen Literatur so gut wie Nichts gefunden. Nur in dem bekannten vorzüglichen Werke von Landolt: „Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen“ [1] wird bei Beschreibung des Mitscherlich'schen Polarisationsapparates und der Art seines Gebrauches der schwarze Streifen ausführlicher erwähnt (S. 95—98), der bei grösserem Gesichtsfeld und gekreuzten Nicols dasselbe durchsetzt. Wie aber das Aussehen dieses „Eliminationsstreifens“ seine Orientirung und Beweglichkeit mit den angewandten Polarisationsvorrichtungen zusammenhängt, wird nicht angegeben oder zu erklären versucht.

Es ist nun leicht einzusehen, dass jede wesentliche Verfeinerung der polaristrobometrischen Methoden zunächst die Anwendung sehr intensiver Lichtquellen erfordert und, da alsdann Helligkeitsunterschiede im Gesichtsfelde bei richtiger Construction der Apparate bemerkbar werden, die bei schwächeren Lichtquellen nicht wahrgenommen werden können, dass weiters die Helligkeitsvertheilung und ihre Abhängigkeit von den angewandten Polarisatoren bekannt sein muss, um alsdann auf diese die specielleren Methoden gründen zu können. Dieses dürfte aus den nachfolgenden Betrachtungen noch klarer hervorgehen.

II.

Vollkommen geradlinig polarisirtes Licht geben solche Polarisatoren, zu deren Construction doppelbrechende Medien benützt werden und auf solche wollen wir unsere Betrachtungen zunächst beschränken. Ferner werden wir annehmen, dass ein auf unendliche Entfernung accomodirtes Auge eine unendlich entfernte leuchtende Fläche durch einen Polarisator oder durch mehrere Polarisatoren betrachte, so dass Strahlen, die sich zu einem Bild-

[1] Braunschweig; Vieweg und Sohn, 1879.

punkte im Auge vereinigen, als Parallelstrahlenbündel die Polarisatoren passirt haben; der Fall, in welchem dieses letztere nicht stattfindet, soll später Erwähnung finden.

Um gleich jene Form der Zusammenstellung vor uns zu haben, die durch den Versuch am leichtesten und genauesten realisirt werden kann, nehmen wir an, es sei ein Collimator aufgestellt, in dessen Brennebene sich ein Diaphragma mit kleiner Öffnung befindet, die in irgend einer Weise beleuchtet wird. Die aus dem Objective des Collimators tretenden Strahlen sollen dann einen Polarisator durchlaufen und weiter auf das Objectiv eines Beobachtungsfernrohres fallen, das auf Unendlich eingestellt ist und in welchem sodann ein deutliches Bild der Diaphragmaöffnung erscheint.

Alle Strahlen, die, von einem Punkte a dieser Öffnung ausgehend, sich in dem Bildpunkte a vereinigen, haben nun den Polarisator in parallelen Richtungen, also unter identischer Orientirung gegen die Krystallaxen und die Flächen des Polarisators durchlaufen; daher müssen die Polarisationsebenen der austretenden Strahlen untereinander parallel sein. Diese Strahlen vereinigen sich im Bildpunkte a mit den Phasendifferenzen Null, die resultirende Bewegung in diesem Punkte ist demnach geradlinig polarisirt und die Polarisationsrichtung ist der Schnitt der durch a gelegten Polarisationsebene, der aus dem Polarisator tretenden Strahlen mit der Bildebene. Für jeden anderen Punkt b der Diaphragmaöffnung ist das entsprechende Parallelstrahlenbündel auch anders gegen den Polarisator orientirt und dem Bildpunkte b entspricht daher auch eine von a verschiedene Polarisationsrichtung.

Jedem genau construirten Polarisator kommt eine Ebene zu, die sogenannte Hauptschnittsebene, die auf sämmtlichen Trennungsflächen, welche die Strahlen zu passiren haben, gleichzeitig senkrecht steht und diese Ebene enthält zugleich die optische Axe oder die optischen Axen der Theile, aus denen der Polarisator besteht (wie z. B. bei den gewöhnlichen achromatisirten Kalkspathprismen, beim Polarisator von Sénarmont und Dove, beim Nicol'schen Prisma u. s. w.) oder sie steht, wie beim Rochon'schen Polarisator, in einem der beiden Prismen, aus denen derselbe zusammengesetzt ist, senkrecht zur Axe. Ein

beliebiger Strahl, der parallel zur Hauptschnittsebene einfällt, bleibt in seinem weiteren Verlaufe innerhalb des Polarisators und nach seinem Austritte aus demselben parallel dieser Ebene und seine Polarisationsebene fällt entweder mit ihr zusammen oder steht auf ihr senkrecht.

Wir werden annehmen, dass die Hauptschnittsebene des Polarisators parallel gestellt sei zu der optischen Axe des Collimators und der des Fernrohres. Legt man nun durch die optischen Axen Ebenen, die der Hauptschnittsebene parallel sind, so werden Diaphragmaebene und seine Bildebene im Fernrohre in zwei Geraden ξ und x geschnitten, von welchem die letztere das Bild der ersteren ist. Da jedem Punkte von ξ ein aus dem Collimatorobjectiv austretendes Strahlenbündel entspricht, dessen Strahlen der Hauptschnittsebene parallel sind, so folgt sofort, dass in allen Punkten von x die Polarisationsrichtungen übereinstimmen und je nach der Art des Polarisators entweder mit x zusammenfallen oder auf x senkrecht stehen. Diese Gerade x wollen wir den Hauptschnitt des Bildes oder des Gesichtsfeldes nennen.

Endlich erkennt man sofort, dass Strahlen, die symmetrisch zur Hauptschnittsebene orientirt auf den Polarisator treffen, in ihrem ganzen weiteren Verlaufe es bleiben und Polarisationsebenen haben müssen, die ebenfalls gegen die Hauptschnittsebene symmetrisch gestellt sind. Hieraus aber folgt weiter, dass in symmetrisch zu x gelegenen Punkten auch die Polarisationsrichtungen zu x symmetrisch liegen.

Das Resultat der bisherigen Betrachtungen können wir in folgender Weise aussprechen:

Stellt man zwischen Collimator und Fernrohr einen Polarisator so, dass dessen Hauptschnittsebene den optischen Axen der ersteren parallel ist, so verwandelt sich das durch die Diaphragmaöffnung des Collimators bestimmte und in irgend einer Weise polarisirte Gesichtsfeld in ein linear polarisirtes, in welchem Punkte, die symmetrisch zum Hauptschnitt des Gesichtsfeldes liegen, symmetrisch zu diesem gelegene Polarisationsrichtungen haben.

Die Intensitäten in den einzelnen Punkten des Gesichtsfeldes anlangend, so können wir dieselben in dem vorliegenden Falle offenbar mit hinreichender Annäherung[1] auf folgende Art bestimmen:

Man zerlege die Bewegung, welche in dem betreffenden Punkte des Gesichtsfeldes ohne Zwischenstellung des Polarisators vorhanden wäre, in zwei Componenten, von denen die eine senkrecht zur Polarisationsrichtung des Punktes, die andere nach dieser Richtung polarisirt ist; die Intensität ist dann proportional der Intensität der letzteren Componente.

Der Proportionalitätsfactor ist eigentlich abhängig von der Lage des betreffenden Punktes im Gesichtsfelde; denn er ist abhängig von der Richtung, in welcher die Strahlen den Polarisator treffen; für ein Gesichtsfeld von geringer Ausdehnung, von ein oder zwei Graden, wie wir es voraussetzen, können wir jedoch diesen Factor in der ganzen Ausdehnung desselben als constant annehmen. Ist also das von der Diaphragmaöffnung kommende Licht unpolarisirt und letztere gleichförmig erleuchtet, so wird die Intensität im Gesichtsfelde nach Zwischenstellung des Polarisators constant anzunehmen sein.

Wenn wir von einem Punkte des Gesichtsfeldes in der Polarisationsrichtung des ersteren fortschreiten zu einem benachbarten Punkte, von diesem in derselben Weise zu einem dritten u. s. f., so erhalten wir eine Curve, deren Tangenten die Polarisationsrichtungen der betreffenden Punkte darstellen. Construiren wir solcherart von verschiedenen Punkten aus die ganze Curvenschaar, so wird dieselbe einen Überblick über die Vertheilung der Polarisationsrichtungen geben können. Wir wollen diese Curven die Niveaulinien des Gesichtsfeldes nennen.

Construiren wir ferner zu diesen Niveaulinien die orthogonalen Trajectorien, so erhalten wir eine zweite Curvenschaar, welche, wenn wir die Fresnel'sche Hypothese über die Schwin-

[1] Der Winkel zwischen den Polarisationsebenen eines Strahles vor dem Eintritt und nach dem Austritte aus dem Polarisator, und der Winkel zwischen den Durchschnitten dieser Ebenen mit der Bildebene sind bis auf kleine Grössen zweiter Ordnung einander gleich.

gungsrichtung des linear polarisirten Lichtes adoptiren, diese Richtung in jedem Punkte des Gesichtsfeldes bestimmen; diese Curven mögen die Oscillationslinien des Gesichtsfeldes heissen.

Der Hauptschnitt des Gesichtsfeldes ist nach dem Früheren entweder eine Oscillationslinie oder eine Niveaulinie. Für ein Nicol als Polarisator z. B. wäre er eine Oscillationslinie und überhaupt immer dann, wenn die extraordinären Strahlen zur Verwendung kommen. Liefert hingegen der Polarisator ordinäre Strahlen, so ist der Hauptschnitt eine Niveaulinie.

III.

Für die verschiedenen in Betracht kommenden Strahlenrichtungen vor ihrem Austritte aus dem Polarisator sind die zugehörigen Polarisationsebenen in sehr einfacher Weise bestimmt durch die Lage der optischen Axe in den einzelnen Theilen des Polarisators. Um aber die Polarisationsebenen der Strahlen nach ihrem Austritte und sodann die Niveau- oder Oscillationslinien des Gesichtsfeldes zu bestimmen, hat man das Problem der Refraction beim Übergange des Lichtes aus einaxigen Krystallen in ein isotropes Medium zu lösen, ein Problem, das selbst für den Fall, als wir uns mit einer Näherungsrechnung begnügen, zu ziemlich complicirten Formeln führt. Indessen genügen für die gegenwärtige Untersuchung Betrachtungen allgemeinerer Natur, insoferne es sich nicht um die vollkommen genaue Ermittlung des Gesichtsfeldes eines bestimmten, gegebenen Polarisators handelt.

Bei den im Art. II genannten Polarisatoren hat die optische Axe entweder in beiden Theilen (wie beim Nicol'schen Prisma) oder doch in jenem Theile, aus welchem die Strahlen austreten[1], gegen die Axe des Polarisators, die zugleich als Axe des durchgehenden Strahlenbündels anzusehen ist, eine endliche Neigung, die wohl stets grösser als 45° sein wird. Hieraus schliesst man, dass die Polarisationsebenen der den Polarisator durchdringenden

[1] Sénarmont'sche, Dove'sche und ähnlich wie diese construirte Polarisatoren sind so zu stellen, dass jener Theil, in welchem die optische Axe parallel zur Axe des Strahlenbündels verläuft, den eintretenden Strahlen zugewendet ist; andernfalls können nicht alle austretenden Strahlen genau geradlinig polarisirt sein.

Strahlen vor ihrem Austritt nur kleine Neigungen gegen einander haben werden und dass folglich auch nach ihrem Austritte Gleiches stattfinden wird. Die Niveau- und Oscillationslinien werden demnach, soweit sie innerhalb des Gesichtsfeldes liegen, schwach gekrümmte Curven sein und es ist gestattet, sie durch die Krümmungskreise zu ersetzen, die jenen ihrer Punkte entsprechen, welche etwa in der Mitte der im Gesichtsfelde befindlichen Curvenstücke liegen. Namentlich wird eine dieser beiden Curvenschaaren aus Kreisen bestehen, deren Mittelpunkte sämmtlich auf dem Hauptschnitte liegen oder genauer ausgedrückt:

Im Gesichtsfelde eines Polarisators können, je nachdem bei diesem die extraordinären oder die ordinären Strahlen zur Verwendung kommen, die Niveaulinien oder die Oscillationslinien als eine Schaar von Kreisen angesehen werden, deren Mittelpunkte sämmtlich auf dem Hauptschnitte liegen und zwar in Entfernungen, die sehr gross sind gegen die Dimensionen des Gesichtsfeldes.

Werden die Entfernungen der Kreismittelpunkte unendlich gross, wie dies in der That bei gewissen Polarisatoren sehr nahe der Fall ist, so sind die Niveau- und Oscillationslinien zwei Schaaren von Geraden, die dem Hauptschnitte parallel laufen, beziehungsweise auf diesem senkrecht stehen. Einen derartigen Polarisator wollen wir einen Polarisator mit normalem Gesichtsfelde nennen.

Die Kreismittelpunkte können, wenn nicht genau, so doch sehr nahe in einem Punkte des Hauptschnittes zusammenfallen; dann soll der Polarisator ein solcher mit homocentrischem Gesichtsfelde und der gemeinsame Mittelpunkt das Centrum desselben heissen. Je nach Umständen werden dann die Oscillations- oder die Niveaulinien Gerade, die nach dem Centrum convergiren.

Nachdem die Polarisationsebenen der in Betracht kommenden Strahlen mit der Hauptschnittsebene des Polarisators vor ihrem Austritte Winkel bilden, die entweder wenig von Null oder einem Rechten verschieden sind, so wird die Ablenkung, welche die Polarisationsebene beim Übertritt der Strahlen in das isotrope Medium erleidet, klein sein. Diese Ablenkungswinkel müssen bis

auf sehr kleine Grössen zweiter Ordnung genau berechnet werden, wenn man die Niveau- oder Oscillationslinien bestimmen will; denn, würde man schon die kleinen Grössen erster Ordnung vernachlässigen, so würden die Kreismittelpunkte auf dem Hauptschnitte um endliche Grössen fehlerhaft werden.

Nehmen wir nun an, die Strahlen im Krystalle gehören den ordentlichen Wellen an, so wird der Ablenkungswinkel der Polarisationsebene aus zwei Theilen bestehen; der eine Theil wird die Ablenkung sein, die einträte, wenn das krystallinische Medium ein isotropes wäre mit einem Brechungsindex n, der gleich ist dem der ordinären Wellen des einaxigen Krystalles, der andere Theil wird von der Doppelbrechung abhängen und mit dieser gleichzeitig verschwinden. Dieser letztere Theil wird in unserem Falle klein gegen den ganzen Ablenkungswinkel und wir erhalten eine erste Näherung, wenn wir die Doppelbrechung vernachlässigen. Unter dieser Voraussetzung ist aber, wenn wir mit ε und ε' die Winkel der Polarisationsebenen des einfallenden und gebrochenen Strahles mit der Einfallsebene, mit i und r den Einfalls- und Brechungswinkel bezeichnen:

$$\operatorname{tng} \varepsilon = \frac{\operatorname{tng} \varepsilon'}{\cos (r - i)}.$$

Specialisiren wir unsere Annahmen noch weiter dahin, dass die brechende Fläche des Polarisators, durch welche die Strahlen austreten, senkrecht stehe auf der Axe des Strahlenbündels, so werden i und r sehr klein, der Cosinus bis auf kleine Grössen zweiter Ordnung genau gleich Eins, und daher mit demselben Grade der Annäherung

$$\varepsilon = \varepsilon'.$$

Es sei nun in Fig. 1 NHF die Richtung der Normale zur Austrittsfläche und H ein beliebiger Punkt der ersteren, durch welchen wir uns die sämmtlichen Richtungen der einfallenden und gebrochenen Strahlen gezogen denken, JHJ ein einfallender, HR der zugehörige gebrochene Strahl; endlich sei AHA die Richtung der optischen Axe, die wir ebenso wie NHF parallel der Zeichnungsebene annehmen. Durch einen Punkt F der Normalen legen wir eine Ebene B senkrecht zu NHF und suchen

ihre Schnittpunkte J', R, A mit den früher genannten Strahlen; $RJ'F$ ist dann der Schnitt der Einfallsebene, CAF der Schnitt der Hauptschnittsebene und die Gerade $J'A$ der Schnitt der Polarisationsebene des ordinären Strahles JHJ' mit der Ebene B. Da $FHJ = i$ und $FHR = r$ sehr klein sind, so folgt erstens, dass

$$\frac{FR}{FJ} = \frac{\operatorname{tng} r}{\operatorname{tng} i} = \frac{\sin r}{\sin i} = n$$

und zweitens, dass der Winkel $FJ'A$ bis auf kleine Grössen zweiter Ordnung genau, gleich ε wird. Ziehen wir also RC parallel zu $J'A$, so wird mit demselben Grade der Annäherung die Ebene RHC die Polarisationsebene des gebrochenen Strahles HR sein. Es ist nun

$$\frac{FC}{FA} = \frac{FR}{FJ} = n,$$

und weil A unveränderlich bleibt für alle einfallenden Strahlen, so wird auch C unveränderlich sein für alle gebrochenen Strahlen.

Wir können also sagen, dass in dem behandelten Falle die Polarisationsebenen der austretenden Strahlen, wenn man sich dieselben alle durch einen Punkt H gezogen denkt, durch eine fixe Gerade HC hindurchgehen, die in der Hauptschnittsebene liegt und mit der Normalen zur Grenzfläche des Polarisators einen Winkel w' bildet, der mit dem Winkel w, den die optische Axe mit derselben Normalen einschliesst, durch die Relation zusammenhängt:

$$\operatorname{tng} w' = n \operatorname{tng} w.$$

Die Richtung NHF mag zugleich die Richtung der optischen Axe des Beobachtungsfernrohres sein, wie dies in der That bei richtiger Stellung des Polarisators zutreffen wird. Lassen wir dann H mit dem zweiten Hauptpunkte des Fernrohrobjectives zusammenfallen und nehmen $HF = f$, gleich der Brennweite des Objectives, so wird R ein Punkt des Bildes der Collimatoröffnung und RC die Polarisationsrichtung in diesem Punkte. Das Gesichtsfeld ist also in unserem Falle ein homocentrisch polarisirtes und sein Centrum hat vom Brennpunkt die Entfernung

$$nf \operatorname{tng} w.$$

Wir haben die bisherigen Resultate abgeleitet unter der Voraussetzung, dass das austretende Strahlenbündel, von welchem *HR* ein Strahl ist, herrühre von ordinären Strahlen im Krystalle. Nehmen wir nunmehr an, dasselbe austretende Strahlenbündel rühre her von extraordinären Strahlen, so wird sich in dem Resultate nichts ändern, als dass *RC* nicht die Polarisationsrichtung des Strahles *HR*, sondern dessen Schwingungsrichtung ist.

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so können wir demnach sagen:

Ist die Austrittsfläche der Strahlen bei einem Polarisator senkrecht zur Strahlenaxe, so kann das ihm zukommende Gesichtsfeld mit grosser Annäherung als ein homocentrisch polarisirtes angesehen werden; das Centrum hat in dem vom Fernrohrobjectiv entworfenen Bilde eine Entfernung vom Brennpunkte, die gleich ist $nf \operatorname{tng} w$, wenn n den ordinären Brechungsexponenten des Polarisators, w den Winkel der optischen Axe mit der Fernrohraxe und f die Brennweite des Objectivs bezeichnet. Steht die optische Axe senkrecht zur Fernrohraxe, so ist das Gesichtsfeld ein normal polarisirtes.[1]

IV.

Das Gesichtsfeld der Polarisatoren war vor Allem dadurch ausgezeichnet, dass in ihm die Vertheilung der Polarisationsrichtungen eine symmetrische ist gegen eine gewisse durch die Mitte des Feldes gehende Gerade x, den Hauptschnitt desselben. Es ist nun wichtig zu bemerken, dass diese Symmetrie aufhört, sobald man zwischen Polarisator und Fernrohr ein Medium

[1] Ein in aller Strenge normal polarisirtes Gesichtsfeld wird auch in dem letztgenannten Falle nicht zu Stande kommen. Besteht der Polarisator aus einem Sénarmont'schen Prisma, so hat sowohl der ordinäre Strahlenkegel im Krystall als auch der austretende Strahlenkegel, zwei Symmetrieebenen, die Hauptschnittsebene und die darauf senkrechte Ebene. Die Oscillationscurven werden daher im Gesichtsfelde ebenfalls symmetrisch verlaufen zum Hauptschnitte und zu der auf ihm durch den Mittelpunkt O des Gesichtsfeldes senkrecht geführten Geraden und werden als Kreise anzusehen sein, deren Mittelpunkte im Hauptschnitte zu beiden Seiten von O vertheilt sind.

einschaltet, welches die Polarisationsebene dreht, und dass es im Allgemeinen gar nicht mehr möglich ist durch Gegendrehung des Polarisators um einen Winkel gleich dem, um welchen das Medium dreht, dasselbe Gesichtsfeld, wie es vor Einschaltung desselben vorhanden war, wieder herzustellen.

Um uns hierüber näher zu orientiren, werden wir das Licht homogen und ferner voraussetzen, dass für die wenig verschiedenen Neigungen, unter welchen die Strahlen das Medium durchsetzen und welche für jede Strahlenrichtung verschiedene Dicken der durchstrahlten Schichte zur Folge haben, der Drehungswinkel der Polarisationsebene derselbe sei.

In Fig. 2 bedeutet $AA'B'BB''A''$ die Begrenzung des Gesichtsfeldes, xx den Hauptschnitt desselben, O seinen Mittelpunkt. Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, dass das Gesichtsfeld ein homocentrisch polarisirtes und C sein Centrum sei; die durch C gehenden Geraden mögen etwa die Niveaulinien bedeuten. Das eingeschaltete Medium drehe die Polarisationsebene um den Winkel φ; in jedem Punkte des Gesichtsfeldes erscheint dann die Polarisationsrichtung um den Winkel φ abgelenkt. Ziehen wir durch O die Gerade yy unter dem Winkel φ gegen xx geneigt, so wird sie die Polarisationsrichtung des Punktes O sein; sie ist aber nicht mehr Symmetrieaxe für die Oscillationslinien, wie sich sofort zeigt, wenn man die letzteren, die wieder als Kreise angesehen werden dürfen, aufsucht.

Zu diesem Zwecke ziehen wir durch einen beliebigen Punkt O' von yy' die Gerade $O'C$ und tragen an ihr den Winkel φ ab, machen also $CO'C_1' = \varphi$. Durch O' und C legen wir einen Kreis $A'O'B'$, dessen Mittelpunkt auf $O'C_1'$ liegt und der diese Gerade zum zweiten Male in C_1' schneidet. Dieser Kreis enthält alle Punkte des Gesichtsfeldes, deren Polarisationsrichtungen nach Einschaltung des Mediums nach C_1' convergiren. Da aber OC und daher auch $O'C_1'$ als sehr gross (etwa gleich 50 bis 70mal dem Radius des Gesichtsfeldes) anzunehmen ist, so kann man bis auf kleine Grössen zweiter Ordnung genau $A'O'B'$ auch als Kreisbogen ansehen, der mit dem Radius $C_1'O'$ beschrieben ist, so dass dieser Kreisbogen als jene Oscillationslinie anzusehen ist, die durch den Punkt O' geht. Ihr Krümmungsmittelpunkt wird also erhalten, wenn man $CO'C_1' = \varphi$ macht und in C eine Senkrechte

zu CO' zieht; ihr Schnittpunkt mit $O'C_1'$ ist der gesuchte Mittelpunkt.

Diese Mittelpunkte C_1', C_1'... für die verschiedenen Punkte von yy liegen mit Ausnahme des zu O gehörigen nicht auf dieser Geraden. Durch die angegebene Construction kann man in jedem Falle die Oscillations- oder Niveaulinien für das durch das drehende Medium transformirte Gesichtsfeld bestimmen.

Eine Drehung des Polarisators um den Winkel φ im entgegengesetzten Sinne als das Medium dreht, würde nur bewirken, dass unsere Figur in eine Lage kommt, in welcher yy mit der ursprünglichen Lage xx des Hauptschnittes zusammenfällt; die Vertheilung der Polarisationsrichtungen im Gesichtsfelde gegen yy bliebe natürlich ungeändert.

Wäre die Drehung des eingeschalteten Mediums gleich einem Rechten, so würden im neuen Gesichtsfelde die Oscillations- und Niveaulinien beziehungsweise mit den Niveau- und Oscillationslinien des ursprünglichen zusammenfallen. Anders ausgedrückt ist der Polarisator ein solcher, bei welchem die ordinären Strahlen zur Verwendung kommen, so würde in diesem Falle das Gesichtsfeld so transformirt, als wäre ein Polarisator mit gleichliegendem Hauptschnitte vorhanden, bei welchem aber die extraordinären Strahlen Verwendung finden, und umgekehrt.

Nur dann, wenn das Gesichtsfeld ein normal polarisirtes war, bleibt seine Polarisationsart ungeändert, d. h. es bleibt ein normal polarisirtes.

In ähnlicher Weise entsteht aus einem symmetrisch polarisirten Gesichtsfelde ein asymmetrisch polarisirtes, wenn man das aus dem Polarisator tretende Strahlenbündel an einer spiegelnden Fläche (eines isotropen Körpers, der nicht elliptisch polarisirt) reflectiren lässt. In diesem Falle ist die Drehung der Polarisationsrichtung für die einzelnen Punkte des Gesichtsfeldes nicht mehr constant; denn die Grösse dieser Drehung hängt ab vom Incidenzwinkel und vom Winkel der Polarisationsebene des einfallenden Strahles gegen seine Einfallsebene; beide Winkel variiren aber von einem Punkte des Gesichtsfeldes zum andern.

V.

Wir wollen nunmehr annehmen, dass zwischen dem ersten Polarisator P und dem Fernrohr ein zweiter Polarisator P' eingeschaltet werde und zwar so, dass seine Hauptschnittsebene wieder parallel sei den optischen Axen des Polarisators und des Fernrohres. Die Vertheilung der Polarisationsrichtungen in dem entstehenden Gesichtsfelde sind nach dem Vorhergehenden bestimmt durch die Natur des Polarisators P'; da aber das auf diesen fallende Licht selbst polarisirt ist, so wird die Helligkeit des Gesichtsfeldes nicht mehr constant sein und es wird sich darum handeln, die Helligkeitsvertheilung in demselben näher zu bestimmen.

Um nun die Lichtintensität in einem Punkte des Gesichtsfeldes zu erhalten, haben wir nach dem im Art. II Gesagten in diesem Punkte die Polarisationsrichtungen oder aber die Schwingungsrichtungen aufzusuchen, die dem Gesichtsfelde von P und P' entsprechen; ist ψ der Winkel, den diese Richtungen mit einander bilden, so ist die zugehörige Intensität J proportional dem Quadrate des Cosinus von ψ, also

$$J = k \cos^2 \psi.$$

Verbindet man immer jene Punkte durch eine Curve, in welchen sich die Oscillationslinien oder, was dasselbe ist, die Niveaulinien unter demselben Winkel ψ schneiden, so erhält man eine Curvenschaar, welche als die Curven gleicher Intensität oder schlechtweg als die Intensitätslinien des Gesichtsfeldes zu bezeichnen sind.

In Fig. 3 möge xx_1 der Hauptschnitt des ersten und $x'x'_1$ der des zweiten Polarisators sein; beide werden ferner als gleichartig, d. h. beide als Polarisatoren mit ordinären oder mit extraordinären Strahlen vorausgesetzt und der Winkel, den die beiden Hauptschnitte bilden, sei mit ψ_0 bezeichnet. Sind C und C' die Mittelpunkte je zweier Niveau- oder Oscillationslinien und deren Radien r und r', ist ferner $OC = a$ und $OC' = a'$, endlich ψ der Winkel, den die beiden Niveau- oder Oscillationslinien in ihrem Durchschnittspunkte p mit einander bilden, so hat man

$$r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \psi_0.$$

Sind nun r und r' als Functionen von a respective a' gegeben, so kann man aus dieser Gleichung für ein gegebenes ψ oder J, zu jedem Kreise AB den zugehörigen $A'B'$ finden, der ersteren in einem Punkte der Intensitätslinie J schneidet und so beliebig viele Punkte dieser Curve construiren.

Wenn die Polarisatoren congruente Gesichtsfelder haben, so folgt schon aus Gründen der Symmetrie, dass die Intensitätscurven symmetrisch sein werden gegen die Halbirende des Winkels COC'.

Da ferner die Mittelpunkte C und C' nur auf einer Hälfte der zugehörigen Hauptschnitte Ox und Ox' liegend anzunehmen sind, so verlaufen die Intensitätslinien so, dass C und C' auf derselben Seite und zwar auf der concaven Seite dieser Linien liegen. Um dies einzusehen, betrachten wir die durch O gehende Intensitätslinie und auf ihr einen Punkt q, der sehr nahe an O liegt; wir können dann beim Übergang vom Punkte O zum unendlich nahen Punkte q der Curve die Mittelpunkte der in q sich unter dem Winkel ψ_0 schneidenden Kreise als zusammenfallend ansehen mit den Mittelpunkten C_0 und C_0' der Kreise, die durch O gehen und es wird demnach Oq das Element eines Kreises, der durch die drei Punkte C_0, C_0' und O geführt ist. Dieses Element liegt also nothwendig ausserhalb des Winkels xOx' und der Krümmungsmittelpunkt von O innerhalb desselben. Hieraus ergibt sich leicht die Richtigkeit der früheren Behauptung.

Wenn beide Polarisatoren solche mit homocentrischem Gesichtsfelde sind, so werden die Intensitätslinien dargestellt durch das System der Chordalkreise, die durch die beiden Centra C und C' hindurchgehen.

Je mehr sich das Gesichtsfeld eines der beiden Polarisatoren einem normalen nähert, desto kleiner wird die mittlere Neigung der Intensitätslinien gegen den Hauptschnitt des anderen. Hat der eine Polarisator P ein normales, der andere P' ein homocentrisches Gesichtsfeld mit dem Centrum C', so sind die Intensitätslinien Gerade, die sämmtlich durch C' hindurchgehen.

Das Gesagte gilt auch, wenn die beiden Polarisatoren ungleichartig sind; die Intensitätslinien können wie früher bestimmt werden, nur wird jetzt die Intensität, die einer dieser Curven

zukommt, in deren Punkten sich die Kreise AB, $A'B'$ unter dem Winkel ψ schneiden, proportional dem $\sin^2\psi$.

Denkt man sich die Intensitätscurven so verzeichnet, dass dem Übergang von einer Curve zur nächsten immer dieselbe Änderung der Intensität, ΔJ, entspricht, so erkennt man im Falle zweier Polarisatoren mit homocentrischen Gesichtsfeldern sofort, dass die Curven um so weiter auseinanderrücken, je grösser die Distanzen OC und OC' werden. Hieraus wird man schliessen, dass auch im allgemeinen Falle das gleiche Verhalten eintritt, je mehr sich die Gesichtsfelder normal polarisirten nähern. Sind beide Gesichtsfelder normal, so wird die obige Distanz unendlich gross und das Gesichtsfeld zeigt in allen Punkten constante Helligkeit.

Wir wollen noch unter vereinfachenden Voraussetzungen die Änderung der Helligkeit im Gesichtsfelde oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Änderung von $\cos\psi$ näher bestimmen. Wir werden die beiden Polarisatoren congruent[1] voraussetzen; ferner wollen wir $\cos\psi$ für einen Punkt aufsuchen, der auf der Halbirenden des Winkels xOx' liegt und zwar in einer Entfernung ξ von O. Zur Bestimmung von $\cos\psi$ haben wir dann, indem wir $a = a'$, $r = r'$ setzen, die Gleichungen:

$$r^2(1-\cos\psi) = a^2(1-\cos\psi_0),\quad r^2 = a^2 + \xi^2 + 2a\xi\cos\frac{\psi_0}{2},$$

woraus folgt:

$$\cos\psi = \frac{\cos\psi_0 + 2\frac{\xi}{a}\cos\frac{\psi_0}{2} + \frac{\xi^2}{a^2}}{1 + 2\frac{\xi}{a}\cos\frac{\psi_0}{2} + \frac{\xi^2}{a^2}}.$$

Nehmen wir ξ sehr klein gegen a, was in Wirklichkeit, wie schon gelegentlich bemerkt, immer zutreffen wird, selbst dann, wenn der betrachtete Punkt an der Grenze des Gesichtsfeldes liegt, so können wir die Quadrate des Quotienten $\xi : a$ vernachlässigen und erhalten:

$$\cos\psi = \cos\psi_0 + 2\frac{\xi}{a}\sin\psi_0\sin\frac{\psi_0}{2}$$

oder:

---

[1] So wollen wir im Folgenden Polarisatoren nennen, die congruente Gesichtsfelder liefern.

$$\frac{\cos\psi}{\cos\psi_0} = 1 + 2\frac{\xi}{a}\operatorname{tng}\psi_0 \sin\frac{\psi_0}{2}.$$

So lange daher ψ_0 von $\frac{\pi}{2}$ oder $3\frac{\pi}{2}$ merklich verschieden bleibt, wird das Verhältniss der Cosinusse und daher auch das Verhältniss der Intensitäten im betrachteten Punkte und in der Mitte des Gesichtsfeldes nahe gleich der Einheit und die Intensitätsunterschiede werden, namentlich bei grösserer mittlerer Helligkeit, für das Auge wenig hervortreten, es wird also, wie man sieht, nahezu constante Helligkeit vorhanden sein, auch dann, wenn die Gesichtsfelder keine normal polarisirten sind.

VI.

Wie aus den soeben durchgeführten und den allgemeinen Betrachtungen des Art. V hervorgeht, werden die Helligkeitsunterschiede im Gesichtsfelde bei der Dunkelstellung der beiden Polarisatoren bedeutendere Änderungen aufweisen, die dem Auge sehr wohl bemerkbar werden können. Bei entsprechender Stellung der Polarisatoren wird in das Gesichtsfeld eine Intensitätscurve fallen, deren Intensität den Werth Null hat; von dieser Curve aus wird dann die Intensität nach beiden Seiten hin umsomehr zunehmen, zu je weiter entfernten Intensitätscurven man fortschreitet. Es wird also das Gesichtsfeld von einem dunklen, nach beiden Seiten hin abschattirtem Bande oder Streifen durchzogen erscheinen, der sich beim Drehen des einen Polarisators durch das Gesichtsfeld bewegt und es wird sich zunächst darum handeln, die Abhängigkeit der Stellung dieses Streifens gegen die Hauptschnitte, seines Aussehens und seiner Beweglichkeit von der Natur der Polarisatoren näher zu ermitteln. Hiebei werden wir von jener Lage des dunklen Streifens ausgehen, bei welcher die Intensitätscurve Null den Mittelpunkt des Gesichtsfeldes passirt, was dann eintritt, wenn bei gleichartigen Polarisatoren die Hauptschnitte senkrecht aufeinander stehen, bei ungleichartigen zusammenfallen.

a) Was zunächst die Stellung des dunklen Streifens im Gesichtsfelde oder dessen Mittellinie, die von der Intensitätscurve Null gebildet wird, anbelangt, so ergibt sich aus den

allgemeinen Bemerkungen über die Intensitätslinien im vorhergehenden Artikel hierüber Folgendes:

1. Sind die beiden Polarisatoren gleichartig, so hat man zunächst zur Bestimmung der Schnittpunkte der beiden Kreissysteme auf der Intensitätscurve Null die Gleichung

$$r^2 - a^2 + r'^2 - a'^2 = 0,$$

die aus der allgemeinen Gleichung folgt, wenn man in ihr $\psi = \psi_0 = \frac{\pi}{2}$ setzt. Dieser Relation kann aber immer genügt werden: denn es gibt in unserem Falle, in welchem die Kreismittelpunkte auf je einer Hälfte Ox, Ox' der Hauptschnitte liegen, die wir als die positive bezeichnen wollen, zu jedem in Betracht kommenden Werthe von $r^2 - a^2$ einen gleich grossen, entgegengesetzt bezeichneten Werth von $r'^2 - a'^2$.

Der dunkle Streifen, dessen Krümmung in den gewöhnlich vorkommenden Fällen immer sehr gering ist, erscheint gegen die Hauptschnitte geneigt und liegt stets so, dass die Theile, welche die Kreismittelpunkte enthalten, auf derselben Seite des Streifens sich befinden. Der Streifen stellt sich unter immer kleinerer Neigung gegen jenen Hauptschnitt, auf welchem die Mittelpunkte der Kreise von kleinerem Radius liegen und fällt mit diesem zusammen, wenn das Gesichtsfeld des anderen Polarisators ein normales ist.[1] Dreht man den einen Polarisator um 180°, so nimmt der Streifen eine Stellung an, die in Bezug auf seine

---

[1] Wäre in Übereinstimmung mit dem in der Anmerkung auf Seite 277 Gesagten das angenähert normal polarisirte Gesichtsfeld von P so beschaffen, dass strenge genommen die Mittelpunkte der nicht geradlinigen Niveaulinien zu beiden Seiten von O im Hauptschnitte $x'x'$ symmetrisch vertheilt sind, so könnte $r'^2 - a'^2$ nur für alle Kreise positiv, oder für alle Kreise negativ sein. Die Intensitätslinie Null würde dann symmetrisch zu xx liegen und nur auf einer Seite von $x'x'$ verlaufen; in O hätte sie eine Spitze. Wenn auch der andere Polarisator von gleicher Beschaffenheit ist und dann $r^2 - a^2$ und $r'^2 - a'^2$ gleichzeitig für alle Kreise positiv oder gleichzeitig negativ sind, so würde die Nulllinie sich auf einen Punkt, nämlich den Punkt O reduciren. Sind aber $r^2 - a^2$ und $r'^2 - a'^2$ für die beiden Kreissysteme von ungleichem Vorzeichen, so besteht die Nulllinie aus zwei durch O gehenden Curven, deren vier von O ausgehende Äste zu xx und $x'x'$ symmetrisch liegen.

ursprüngliche Stellung symmetrisch ist gegen den einen und somit auch gegen den anderen Hauptschnitt.

Sind die Polarisatoren congruent, so ist der Streifen unter 45° gegen die Hauptschnitte geneigt; die beiden Lagen des Streifens, die man erhält, wenn man den einen Polarisator um 180° dreht, stehen aufeinander senkrecht.

2. Ganz anders und viel einfacher ist das Verhalten des Streifens, wenn die beiden Polarisatoren ungleichartig sind und daher bei der Dunkelstellung ihre Hauptschnitte zusammenfallen. Da jetzt der eine Hauptschnitt Niveaulinie, der andere Oscillationslinie ist, so werden die Punkte, in denen sich die Niveau- und Oscillationslinien der beiden Gesichtsfelder senkrecht durchschneiden, in den zusammenfallenden Hauptschnitten liegen. Der dunkle Streifen fällt also immer in die beiden sich deckenden Hauptschnitte.

b) Das Aussehen des Streifens hängt natürlich ab von der Intensität der Lichtquelle, durch welche die Collimatoröffnung beleuchtet wird. Ist diese Intensität gering, so wird bei der Dunkelstellung der Streifen überhaupt nicht wahrnehmbar sein; steigert man dieselbe, so wird der Streifen immer deutlicher hervortreten. Da es sich hier nur um die Abhängigkeit des Streifens von der Natur der Polarisatoren handelt, so werden wir eine bestimmte, hinreichend grosse Intensität der Lichtquelle voraussetzen.

Je weiter die Intensitätscurven, die einer gegebenen Zunahme ΔJ der Intensität entsprechen, im Gesichtsfelde auseinanderrücken, desto mehr wird auch die Schärfe des Streifens abnehmen. Allgemein wird man also sagen können, dass der Streifen umso schärfer erscheint, je kleiner die Radien der kreisförmigen Niveau- oder Oscillationslinien werden, je mehr sich also die Gesichtsfelder der Polarisatoren von normal polarisirten entfernen.

Für das Weitere wird es genügen, homocentrische Gesichtsfelder anzunehmen, da sich hieraus das Verhalten im allgemeineren Falle leicht erkennen lässt.

1. Nehmen wir wieder an, die Polarisatoren seien gleichartig. Die Intensitätslinien werden Kreise, die durch die Centra C und C' hindurchgehen. Sind die Entfernungen der Centra von O sehr verschieden und eine von ihnen klein, so werden die Inten-

sitätslinien innerhalb des Gesichtsfeldes merklich gegen das nähere Centrum convergiren und der Streifen wird an verschiedenen Stellen verschieden breit erscheinen; gleichförmig in seiner ganzen Ausdehnung wird er hingegen bei congruenten Polarisatoren und grossen Entfernungen der Centra.

Wir wollen im Mittelpunkte O die Normale zur Intensitätscurve Null gezogen denken und auf dieser von O aus die Länge ξ_1 bestimmen, um welche man fortschreiten muss, bis jene Intensitätscurve erreicht wird, für die $k\cos^2\psi$ einen gewissen kleinen Werth i erreicht. Lassen wir i constant sein, so wird der reciproke Werth des zugehörigen ξ_1 ein Mass für die Schärfe des dunklen Streifens darstellen.

Für den Fall zweier congruenter Polarisatoren erhalten wir ξ_1 aus der am Schlusse des vorigen Artikels aufgestellten Gleichung, indem wir $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ und $\cos\psi = \sqrt{\frac{i}{k}}$ setzen, nämlich

$$\xi_1 = a\sqrt{\frac{i}{2k}} \text{ und } \frac{1}{\xi_1} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2k}{i}}.$$

Entspricht dem einen der Polarisatoren ein normales Gesichtsfeld, in welchem Falle die Intensitätscurven Gerade sind, die im Centrum, das dem anderen Polarisator entspricht, zusammenlaufen, so finden wir unter Vernachlässigung von $\left(\frac{\xi_1}{a}\right)^2$

$$\xi_1 = a\sqrt{\frac{i}{k}} \text{ und } \frac{1}{\xi_1} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{k}{i}}.$$

2. Sind die Polarisatoren ungleichartig, so werden die Intensitätslinien wieder Kreise, die durch die Centra gehen und die früheren Bemerkungen über die Breite des Streifens bleiben auch jetzt noch giltig. Während jedoch in dem früheren Falle die Schärfe des Streifens dieselbe blieb, wenn man den einen Polarisator um 180° drehte, ist dies nunmehr nicht der Fall und man bemerkt sofort, dass die Schärfe des Streifens grösser sein wird, wenn die Centra C und C' auf entgegengesetzten Seiten von O, als wenn sie auf derselben Seite liegen.

Um die entsprechenden Werthe von ξ_1 zu erhalten, sei in Fig. 4, xx die Gerade, in welcher die Hauptschnitte übereinander-

fallen, $Op = \xi_1$ senkrecht zu dieser gezogen. Für den sehr kleinen Winkel ψ' bei p haben wir mit der bisher festgehaltenen Annäherung

$$\psi' = \xi_1 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right);$$

da ferner $\psi' = \frac{\pi}{2} - \psi$ und $k \cos \psi = \sqrt{i}$, so erhalten wir

$$\xi_1 = \frac{aa'}{a+a'} \sqrt{\frac{i}{k}}, \quad \frac{1}{\xi_1} = \frac{a+a'}{aa'} \cdot \sqrt{\frac{k}{i}}.$$

Liegen hingegen C und C' auf derselben Seite von O, wie in Fig. 5, so wird

$$\xi_1 = \frac{aa'}{a-a'} \sqrt{\frac{i}{k}}, \quad \frac{1}{\xi_1} = \frac{a-a'}{aa'} \cdot \sqrt{\frac{k}{i}}.$$

Jetzt kann die Schärfe des Streifens sogar Null werden, nämlich wenn $a = a'$ ist, d. h. das Gesichtsfeld wird gleichmässig dunkel erscheinen und in der That stehen in diesem Falle alle Niveaulinien des einen Gesichtsfeldes senkrecht zu denen des anderen.

c) Wenn man einen der beiden Polarisatoren aus der Stellung, für welche die Intensitätslinie Null durch O geht, herausdreht, so verschiebt sich diese Intensitätslinie und die Grösse dieser Verschiebung im Verhältniss zur Drehung bestimmt die Beweglichkeit des dunklen Streifens. Es ist sofort einleuchtend, dass, je weiter die Intensitätslinien für gleiche Intervalle ΔJ auseinanderrücken, desto kleiner der Drehungswinkel des Polarisators wird, der die Nulllinie mit der nächsten Intensitätslinie in Berührung bringt, dass also die Beweglichkeit wächst, wenn die Schärfe des Streifens abnimmt und umgekehrt.

Wir wollen auch hier, entsprechend den Specialfällen, die wir soeben bezüglich der Schärfe näher untersucht haben, einen Ausdruck für die Beweglichkeit aufsuchen. Diese messen wir wieder durch die Länge ξ_2 auf der Normalen zur Nulllinie im Punkte O und von diesem aus gerechnet, um welche man fortschreiten muss, damit nach der Drehung des einen Polarisators um [illegible] ten sehr kleinen Winkel η wieder der Punkt, in [illegible] ensität Null ist, erreicht werde.

1. Sind die Polarisatoren gleichartig und congruent, so kann zur Bestimmung von ξ_2 die am Schlusse des vorigen Artikels angegebene Gleichung dienen, wenn wir in derselben $\xi = \xi_2$, $\psi = \frac{\pi}{2}$ und $\psi_0 = \frac{\pi}{2} + \eta$ setzen; dann erhalten wir angenähert

$$\xi_2 = \frac{a}{\sqrt{i}}\eta.$$

Kommt dem einen Polarisator ein normal polarisirtes Gesichtsfeld zu, so wird, wie sofort ersichtlich

$$\xi_2 = a\eta.$$

2. Wenn hingegen die Polarisatoren ungleichartig sind, so haben wir nur in den Figuren 4 und 5, $\psi' = \eta$ und $\xi_1 = \xi_2$ zu nehmen, also in den bezüglichen Formeln für ξ_1, an Stelle von $\sqrt{\frac{i}{k}} = \cos\psi$, η zu schreiben. Wir erhalten dann, wenn die Punkte C und C' auf entgegengesetzten Seiten von O liegen

$$\xi_2 = \frac{aa'}{a + a'}\eta,$$

wenn sie auf derselben Seite liegen

$$\xi_2 = \frac{aa'}{a - a'}\eta.$$

In allen diesen Fällen ist das Product aus der Schärfe des Streifens in seine Beweglichkeit unabhängig von den Constanten, durch welche die specielle Beschaffenheit der Polarisatoren bestimmt wird; ein Resultat, das man unschwer auch für den allgemeinsten Fall als giltig erkennen kann.

Beim Drehen des einen Polarisators wird der Streifen, der immer einen grossen Krümmungsradius hat, nur dann parallel mit sich selbst fortschreiten, wenn die Polarisatoren gleichartig und congruent sind. In allen anderen Fällen macht er eine Winkeldrehung, die auffallend werden kann, wenn das Centrum des einen Polarisators nahe am Gesichtsfelde liegt.

VII.

Im Artikel IV wurde bereits der Einfluss besprochen, den ein die Polarisationsebene drehendes Medium auf die Polarisationsart des Gesichtsfeldes hat. Es ist nun klar, dass durch Einschaltung eines solchen Mediums zwischen die beiden Polarisatoren und nachdem durch entsprechende Drehung eines von ihnen die Intensitätslinie Null wieder in das Gesichtsfeld gebracht wurde, auch die Stellung und das Aussehen des dunklen Streifens verändert werden muss. Diese Veränderung wollen wir etwas näher untersuchen.

Wir brauchen hiebei nicht von der ziemlich complicirten Polarisationsart des durch ein circularpolarisirendes Medium transformirten Gesichtsfeldes, wie sie im Art. IV angegeben wurde, auszugehen, sondern, da es sich nur um die Kenntniss der Intensitätslinien handelt, kommen wir schneller zum Ziele, wenn wir von folgender Bemerkung Gebrauch machen.

Wir denken uns zwei Polarisatoren gegeben, ihre Hauptschnitte in beliebiger Stellung zu einander und für diese Stellung die Intensitätslinien des Gesichtsfeldes verzeichnet. Schalten wir dann zwischen die Polarisatoren ein Medium ein, das die Polarisationsebene um den Winkel φ nach der einen oder anderen Richtung dreht, so wird hiedurch der Winkel ψ, den die Polarisationsrichtungen in irgend einem Punkte des Gesichtsfeldes mit einander bilden, in derselben Weise um den Winkel φ geändert; Punkte also, in denen Gleichheit des Winkels ψ vorhanden war, werden auch nach Einschaltung des Mediums Gleichheit der Winkel zwischen den Polarisationsrichtungen aufweisen.

Hieraus folgt, dass die Intensitätslinien im Gesichtsfelde zweier Polarisatoren Intensitätslinien bleiben, wenn man ein beliebiges, die Polarisationsebene drehendes Medium einschaltet; nur die den Linien zukommenden Intensitäten ändern sich hiebei.

Stellt man nun nach Einschaltung des Mediums wieder die Intensität Null im Mittelpunkt des Gesichtsfeldes her, so wird, wenn der Drehungswinkel des Mediums φ ist, bei gleichartigen Polarisatoren der Winkel zwischen den positiven Theilen der

Hauptschnitte entweder $\frac{\pi}{2} \pm \varphi$ oder $3\frac{\pi}{2} \pm \varphi$, bei ungleichartigen Polarisatoren φ oder $\pi + \varphi$ sein müssen. In allen Fällen können wir also sagen, dass bei der einen Dunkelstellung der Winkel zwischen den positiven Theilen der Hauptschnitte ein stumpfer, bei der anderen ein spitzer Winkel sein wird.

Ist in Fig. 3 yy' senkrecht zu $x'x_1'$ und $xOy = \varphi$, so würde diese Figur z. B. der Dunkelstellung zweier gleichartiger Polarisatoren entsprechen nach Einschaltung eines Mediums, welches die Polarisationsebene um den Winkel φ nach rechts dreht. Dieselbe Figur würde aber auch auf die Dunkelstellung zweier ungleichartiger Polarisatoren passen, nachdem ein Medium eingeschaltet wurde, das um $\frac{\pi}{2} - \varphi$ nach links dreht.

Am leichtesten orientirt man sich auch hier wieder, wenn man die Gesichtsfelder beider Polarisatoren homocentrisch annimmt. Hat man aus dem bekannt vorausgesetzten Drehungswinkel des Mediums den Winkel $C_0 O C_0'$ entsprechend einer Dunkelstellung bestimmt und legt durch $C_0 O C_0'$ einen Kreis, so gibt dieser die Stellung der Mittellinie des dunklen Streifens. Bedenkt man ferner, dass beim Fortschreiten von O aus auf einer zur Nulllinie senkrechten Richtung nn, der Peripheriewinkel über der Sehne $C_0 C_0'$ sich um so rascher ändert, je grösser der Winkel $C_0 O C_0'$ ist, dieser Winkel natürlich gezählt von 0 bis π, so kann man auch über die Beweglichkeit und Schärfe des Streifens ein Urtheil gewinnen.

Wenn wir insbesondere die Polarisatoren gleichartig, OC_0 und OC_0' ungleich annehmen und φ von Null an bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen lassen, so sehen wir, dass, je grösser φ wird, der Streifen in beiden Dunkelstellungen umso kleinere Winkel mit den Hauptschnitten bildet, um für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ mit diesen zusammenzufallen; gleichzeitig wird aber in jener Dunkelstellung, die dem stumpfen Winkel der positiven Hauptschnitte entpricht, der Streifen grössere Schärfe und geringere Beweglichkeit besitzen, als bei der Dunkelstellung der Polarisatoren allein, und das Entgegengesetzte wird stattfinden, wenn der Winkel $C_0 O C_0'$ ein spitzer ist. Wäre hingegen

$0C_0 = OC_0'$, so stellt sich für $C_0OC_0' < \frac{\pi}{2}$ der Streifen immer mehr senkrecht gegen die Hauptschnitte und gleichzeitig nimmt seine Schärfe ab, um für $C_0OC_0' = 0$, was eintritt, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$, zu verschwinden. In diesem Falle hat man also ein gleichmässig dunkles Gesichtsfeld wie bei der Dunkelstellung zweier ungleichartiger homocentrischer Polarisatoren, bei welchen $OC_0 = OC_0'$ ist (vergl. Art. IV und Art. VI, *b)* 2).

Sowie bei gleichartigen Polarisatoren mit wachsendem Werthe von φ das Verhalten des dunklen Streifens sich immer mehr jenem nähert, welches er zeigen würde, wenn man zwei ungleichartige Polarisatoren ohne Einschaltung eines drehenden Mediums in die Dunkelstellung bringt, ebenso wird bei Anwendung ungleichartiger Polarisatoren und Zwischenstellung eines circularpolarisirenden Mediums, das Verhalten des Streifens beim Wachsen von φ bis $\frac{\pi}{2}$ sich immer mehr jenem nähern, das für gekreuzte gleichartige Polarisatoren gilt.

Hat einer der beiden Polarisatoren ein normales Gesichtsfeld, so fällt der Streifen für jeden Werth von φ mit dem Hauptschnitte des anderen Polarisators zusammen und behält dieselbe Schärfe und Beweglichkeit. Dreht man demnach, um die Dunkelstellung zu erhalten, immer den Polarisator mit normalem Gesichtsfelde, so behält der Streifen überdies auch dieselbe Lage in demselben. Diese Bemerkungen sind von Wichtigkeit im Hinblick auf Polarimeter, bei denen der dunkle Streifen als Marke verwendet werden soll.

VIII.

Unsere bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf das Bild der Collimatoröffnung, das in der Brennebene des Fernrohres zu Stande kommt. In Wirklichkeit wird dieses Bild noch durch ein Ocular angesehen; ist μ die Vergrösserungszahl des Oculars, wenn dieses als Loupe in Anwendung kommen würde, so kann man sich ein Fernrohrobjectiv denken, dessen Brennweite nicht f, sondern μf ist und erhält dann ein Bild, dessen Dimensionen mit dem durch das Ocular gesehenen übereinstimmt.

Die Intensität J in einem Punkte des Bildes war ausgedrückt durch $k\cos^2\psi$. Wenn wir hierin $\cos\psi$ als Function der Entfernung ξ von der Intensitätslinie Null ausdrücken und unter Voraussetzung kleiner Werthe von ξ entwickeln, so erhalten wir in erster Näherung $\cos\psi$ proportional dem ξ und der Factor von ξ ergibt sich sofort für die im Art. VI behandelten speciellen Fälle aus den für $\frac{1}{\xi_1}$ aufgestellten Formeln gleich dem Factor von $\sqrt{\frac{k}{i}}$. Die Intensität wächst demnach im quadratischen Verhältniss mit der Entfernung von der Mittellinie des dunklen Streifens.

Wir haben noch die Intensität J näher auszudrücken und wollen zu diesem Zwecke unter J die Intensität verstehen, unter welcher dem durch das Fernrohr blickenden Auge der betreffende Punkt erscheint; k ist dann die Helligkeit in diesem Punkte, wenn die Polarisationsrichtungen daselbst zusammenfallen. Wird mit k' die Helligkeit bezeichnet, die, alles übrige unverändert gelassen, vorhanden wäre, wenn man die Polarisatoren ganz entfernt, so hätte man, von den Lichtverlusten absehend, die durch Absorption und Reflexion an den Endflächen der Polarisatoren bedingt sind, $k = \frac{1}{2}k'$ zu setzen.

Wir wollen mit $\varkappa$ die Helligkeit bezeichnen, welche ein Punkt der gleichmässig erleuchteten Collimatoröffnung zeigt, wenn diese mit freiem Auge betrachtet wird; ferner bedeute q die wirksame Objectivfläche, die bestimmt sein wird, durch den Querschnitt der Strahlenbündel, die noch frei die beiden Polarisatoren durchsetzen können, und ν die Vergrösserungszahl des Fernrohres, so dass

$$\mu f = f + \nu\delta,$$

wenn δ die Accomodationsweite des durch das Fernrohr blickenden Auges ist. Endlich sei p die Fläche der Pupillenöffnung und s die des Ocularkreises am Fernrohr. Sehen wir ab von den Lichtverlusten in den Gläsern des Apparates und nehmen wir an, dass alle durch q gehenden Strahlen auch in das Auge gelangen oder, was dasselbe sagt, dass $s < p$ sei, so wird $\frac{k'}{k} = \frac{s}{p}$,

und wenn wir hierin für s seinen Werth $s = \frac{q}{\nu^2}$ setzen, erhalten wir weiter

$$k' = \varkappa \frac{q}{p\nu^2}, \; k = \frac{1}{2}\frac{q\varkappa}{p\nu^2}, \; J = \frac{1}{2}\frac{q\varkappa}{p\nu^2}\cos^2\psi.$$

Hiemit lassen sich die früheren Ausdrücke, namentlich die für die Schärfe und Beweglichkeit des Streifens so umformen, dass auch der Einfluss der Lichtquelle, der Vergrösserung und der Dimensionen der Polarisatoren ersichtlich wird.

Haben wir zwei congruente gleichartige Polarisatoren mit homocentrischen Gesichtsfeldern, so ergibt sich, indem wir jetzt $a = \mu f n \operatorname{tng} w$ setzen

$$J = \frac{q\varkappa}{p\nu^2\mu^2 f^2 n^2 \operatorname{tng}^2 w}\,\xi^2, \; \frac{1}{\xi_1} = \frac{1}{\nu\mu f n \operatorname{tng} w}\sqrt{\frac{q\varkappa}{pi}},$$

$$\xi_2 = \frac{\mu f n \operatorname{tng} w}{\sqrt{2}}\,\eta.$$

Hat der eine Polarisator homocentrisches Gesichtsfeld, der andere ein normales, so wird:

$$J = \frac{q\varkappa}{2p\nu^2\mu^2 f^2 n^2 \operatorname{tng}^2 w}\,\xi^2, \; \frac{1}{\xi_1} = \frac{1}{\nu\mu f n \operatorname{tng} w}\sqrt{\frac{qk}{2pi}}$$

$$\xi_2 = \mu f n \operatorname{tng} w \,.\, \eta.$$

Auch in den übrigen Fällen der Combinationen von Polarisatoren mit homocentrischen Gesichtsfeldern (Art. VI) erhält ξ_1 den Factor $\nu\mu$, während ξ_2 den Factor μ hat und dies wird, wie man leicht übersieht, allgemein zutreffen. Hieraus ist ersichtlich, dass die Beweglichkeit im einfachen Verhältniss mit der Vergrösserung zunimmt, während gleichzeitig die Schärfe im quadratischen Verhältniss mit dieser abnimmt. Es ist also zweckmässiger, die Beweglichkeit durch den Polarisator, d. h. durch entsprechende Wahl von w, statt durch die Vergrösserung des Fernrohres zu steigern.

Wir wollen durch ein numerisches Beispiel, zu welchem die Daten einem wirklich ausgeführten Versuche entnommen sind, das Vorhergegangene noch anschaulicher machen.

Collimator- und Fernrohrobjectiv hatten eine Brennweite $f = 300$ Mm., das Fernrohr gab eine Vergrösserung $\nu = 5$ und

hieraus ergibt die Vergrösserungszahl des Oculars, wenn wir die deutliche Sehweite $\delta = 300$ Mm. annehmen, $\mu = 6$. Die Nicol, beide von gleichen Dimensionen und mit geraden Endflächen versehen, gestatteten eine kreisrunde Diaphragmaöffnung von 12 Mm. Durchmesser anzubringen; nehmen wir für den Durchmesser der Pupille 4 Mm., so ist $q : p = 9$. Der Durchmesser des Ocularkreises entsprechend der wirksamen Öffnung des Nicol ist $12 : 5 = 2{\cdot}4$ Mm., also in der That kleiner als der der Pupille.

Die Neigung der optischen Axe gegen die Längsaxe der Nicol ist sehr nahe gleich 58°, der Brechungsexponent der ordentlichen Strahlen im Kalkspath 1·654; demnach wird

$$a = \mu f n \operatorname{tng} w = 6.300.1{\cdot}654.\operatorname{tng} 58° = 4765 \text{ Mm.}$$

In dieser grossen Entfernung scheint also dem durch das Fernrohr blickenden Beobachter das Centrum des Gesichtsfeldes, von O aus gerechnet, zu liegen.

Um zunächst einen Werth für die Intensität in der Entfernung ξ vom dunkeln Streifen zu erhalten, haben wir entsprechend dem Falle congruenter Polarisatoren

$$\frac{J}{\varkappa} = \frac{q}{p\nu^2 a^2}\xi^2 = \frac{1}{63.10^6}\xi^2.$$

Nehmen wir als Einheit der Intensitäten jene, die für das freie Auge die Flamme einer Normalkerze hat und setzen wir dementsprechend beispielsweise $\varkappa = 3000$ voraus, so folgt

$$J = 0{\cdot}000048\ \xi^2,$$

wo ξ in Millimetern auszudrücken ist.

Diese Intensität ist allerdings sehr klein und man könnte meinen, dass unter den gemachten Annahmen ein deutlich hervortretender Streifen nicht zu Stande kommen kann. Das Resultat stellt sich aber ganz anders, wenn wir auf die Intensität, die das Auge von absoluter Dunkelheit zu unterscheiden vermag, gehörig Rücksicht nehmen. Um wenigstens die Grössenordnung derselben in den gewählten Einheiten festzustellen, habe ich folgenden Versuch ausgeführt. Unmittelbar vor eine Kerzenflamme wurde ein schwarzer Schirm mit kleiner Öffnung von 2 Mm. Durchmesser gestellt und vor das Auge die beiden oben genannten Nicol; die Entfernung des Auges vom Schirm betrug 30 bis 40 Ctm. Unter

diesen Verhältnissen konnte die kleine leuchtende Öffnung ganz zum Verschwinden gebracht werden. Nun stellte ich wiederholt auf vollständige Dunkelheit ein und drehte dann das eine Nicol so weit, dass die Öffnung in dem vollkommen dunkeln Sehfelde gerade noch wahrnehmbar wurde. Die Drehung des Nicols ergab sich im Mittel gleich 6′. Nun ist

$$\sin^2 6' = 0{\cdot}000003,$$

man kann also sagen, dass das Auge eine Lichtintensität von 3 Milliontel einer Kerze schon von absoluter Dunkelheit zu unterscheiden vermag. Diese Zahl wird noch bei Weitem nicht als Grenzwerth der unter günstigsten Umständen unterscheidbaren Intensität angesehen werden können. Nehmen wir sie indessen als solchen an und bezeichnen sie mit i, so lautet der vorige Ausdruck

$$J = (4\xi)^2 . i.$$

Die Breite, innerhalb welcher uns der Streifen vollkommen dunkel erscheint, wird demnach gewiss nicht mehr als $^1/_2$ Mm. betragen und von da ab nimmt die Intensität sehr rasch zu; für $\xi = 2{\cdot}5$ Mm. würde $J = 100 . i$ sein und das wäre die Helligkeit, unter welcher die Kerzenflamme erscheint, wenn man das eine Nicol um 1° aus der Dunkelstellung herausdreht.

Aus all diesem geht hervor, dass wir einen sehr deutlichen und wohlbestimmten Streifen erhalten, wie es auch die Beobachtung bestätigt.

Nun wollen wir uns noch über die Beweglichkeit des Streifens orientiren; setzen wir zu diesem Zwecke in die jetzt geltende Gleichung für ξ_2

$$\xi_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \eta$$

η gleich dem Bogen des Winkels von 6″, also $\eta = 0{\cdot}000049$, so erhalten wir

$$\xi_2 = 0{\cdot}1 \text{ Mm.}$$

Eine Drehung des einen Nicol um 6 Bogensecunden verschiebt den Streifen im Sehfelde um den zehnten Theil eines Millimeters, also um eine Grösse, die bei der Bestimmtheit, die der Streifen besitzt, der Beobachtung nicht entgehen wird.

Anstatt zweier Nicol habe ich noch zwei rechtwinklige Kalkspath-Parallelepipede von 40 Mm. Länge combinirt, bei welchen die optische Axe nahe 45° mit der Längsaxe bildete und nach Belieben die ordinären oder extraordinären Strahlen abgeblendet werden konnten. Der dunkle Streifen erschien viel schärfer als in dem oben gegebenen Beispiele, wenn in beiden Parallelepipeden gleichzeitig die ordinären oder die extraordinären Strahlen benützt wurden; sind aber in dem einen die ordinären, im anderen die extraordinären Strahlen abgeblendet, so erscheint in der einen Dunkelstellung ein scharfer Streifen, in der anderen ist das Gesichtsfeld fast gleichmässig dunkel, ganz in Übereinstimmung mit dem im Art. VI, *b)* 2 enthaltenen Erörterungen.

IX.

Es hat keine Schwierigkeit, die Erscheinungen an dem dunkeln Streifen, wie sie sich der Theorie nach darstellen müssen, wirklich zu beobachten. Da es sich aber hiebei um die Unterscheidung minimaler Intensitäten handelt und äusserst geringe locale Änderungen des Winkels der Polarisationsrichtungen die Regelmässigkeit der Erscheinung schon sehr merklich beeinflussen, so sind doch mancherlei Umstände zu beachten, die vielleicht für nebensächlich gehalten werden könnten, bei deren Ausserachtlassung aber von dem ganzen Phänomen nicht mehr übrig bleibt, als eine kaum bemerkbare Andeutung, oder doch die für Messungen nöthige Deutlichkeit erheblich leidet.

Alles fremde Licht muss durch zweckmässig angebrachte Diaphragmen, Blenden und Schirme auf das Sorgfältigste abgehalten werden; ebenso ist auf das zerstreute Licht zu achten, das von den mattgeschliffenen Seitenflächen der Polarisatoren herrührt.

Diese letzteren müssen in Bezug auf Schliff, Verkittung, Homogeneität und Reinheit des Materiales möglichst fehlerfrei sein. Wenn bei einem Nicol die Hauptschnitte der beiden Hälften nicht genau parallel zu einander sind, so werden beim Eindringen des Lichtes in die zweite Hälfte nicht blos extraordinäre Strahlen, sondern neben diesen auch ordinäre, allerdings von sehr kleiner Intensität, zu Stande kommen. Letztere erscheinen bei einem

Nicol, dessen optische Axe auf der Längsaxe nicht senkrecht steht, nach ihrem Austritte stark abgelenkt, so dass sie unschädlich werden. Bei den neuen sehr kurzen von Glan[1] construirten Prismen hingegen, in welchen die optische Axe senkrecht zur Längsaxe steht und die sich daher zur Erzeugung eines normal polarisirten Gesichtsfeldes eignen, wird die Parallelstellung der Hauptschnittsebenen mit grösserer Präcision auszuführen sein.

Je deutlicher der dunkle Streifen erscheinen soll, desto genauer muss das aus den Polarisatoren tretende Licht geradlinig polarisirt sein. Entsprechen in dieser Beziehung die Polarisatoren vollständig den Anforderungen, stellt man aber zwischen dieselben Medien, die das Licht theilweise oder elliptisch polarisiren, so wird der Streifen ganz verschwinden oder doch in seiner Schwärze und Bestimmtheit beeinflusst werden. Dies wird natürlich umsomehr der Fall sein, je grösser die Intensität des Lichtes ist, das aus der Collimatoröffnung tritt und je kleiner man die Schärfe des Streifens gemacht hat. Unter Anwendung der im vorigen Artikel erwähnten Nicol und bei Beleuchtung der Collimatoröffnung durch Sonnenlicht habe ich eine grössere Zahl von vorzüglich gearbeiteten Planparallelplatten von verschiedener Dicke, die in dem optischen Institute von Steinheil hergestellt waren, geprüft und bei allen die elliptische Polarisation so gross gefunden, dass bei ihrer Einschaltung der Streifen ganz unkenntlich wurde. Nur eine Platte von $^1/_3$ Mm. Dicke liess denselben soweit unverändert, als es für messende Versuche gefordert werden muss.

Es dürfte somit der dunkle Streifen, bei grosser Lichtintensität und entsprechenden Polatisatoren erzeugt, wohl das feinste Prüfungsmittel für elliptisch- oder theilweise polarisirende Körper abgeben.

Man sieht hieraus, dass es schwierig sein wird, brauchbare Verschlussplatten für die Röhren zu erhalten, welche die zu untersuchenden Flüssigkeiten oder Gase aufzunehmen bestimmt sind und es werden hierüber, sowie über die Möglichkeit, Platten aus Glas ganz zu vermeiden, noch weitere Versuche anzustellen sein.

---

[1] Über einen Polarisator. Centralzeitung für Optik und Mechanik, Jahrgang 1880, Nr. 9.

Ferner zeigt sich aber auch, dass es ganz fehlerhaft ist, ein Polarimeter so anzuordnen, dass zwischen den Polarisatoren Linsengläser, Prismen oder Glasgefässe mit absorbirenden Flüssigkeiten zu stehen kommen. Hierin ist eine der Ursachen zu suchen, warum bei derartigen Apparaten die Anwendung sehr intensiven Lichtes keinen Vortheil bietet und ein dunkles Sehfeld gar nicht zu Stande kommt.

Eine zweite Ursache liegt aber darin, dass bei den gewöhnlichen Apparaten die Polarisatoren nicht im parallelen Lichte stehen und dass alsdann in keinem Punkte des Gesichtsfeldes absolute Dunkelheit eintreten kann. Dieser Umstand scheint bisher ganz übersehen worden zu sein, ist jedoch für eine Verfeinerung der polaristrobometrischen Methoden von grosser Wichtigkeit und mag daher etwas näher erörtert werden.

Den im Artikel II angeführten Satz zur Bestimmung der Intensität in einem Punkte des Gesichtsfeldes konnten wir, wie es geschehen, aussprechen, wenn die im Bildpunkte sich vereinigenden Strahlen parallel zu einander durch den Polarisator gingen, weil in diesem Falle jeder der Strahlen identische Intensitätsänderungen erfahren hat, es also genügt, die eines einzigen Strahles des Bündels, etwa des durch den zweiten Hauptpunkt des Fernrohrobjectives gehenden, zu kennen.

Fällt jedoch auf die Polarisatoren ein Bündel divergirender oder convergirender Strahlen, die sich schliesslich in einem Bildpunkte vereinigen, so kann die Intensität des letzteren, die sich aus der Summe der Intensitäten der einzelnen Strahlen ergibt, nicht mehr in der angegebenen Weise bestimmt werden, da beim Durchgang durch die Polarisatoren jeder Strahl anders orientirt ist und daher auch eine andere Intensitätsänderung erfahren wird. Stehen z. B. für einen Strahl die Polarisationsebenen vor und nach ihrem Durchgang durch das zweite Nicol genau senkrecht auf einander, so wird dies nicht gleichzeitig für alle übrigen Strahlen des Bündels zutreffen und es wird der zugehörige Bildpunkt nicht die Intensität Null haben. Allgemein zu reden, wird dies für keinen Punkt des Gesichtsfeldes der Fall sein können.

Die folgenden Betrachtungen werden die Helligkeitsvertheilung im Gesichtsfelde noch genauer überblicken lassen.

In Fig. 6*a* sei AB die optische Axe einer Linse, H_1H_2 und die in diesen Punkten zu AB senkrecht geführten Ebenen, die Hauptpunkte und Hauptebenen dieser Linse und F ihr Brennpunkt. Ebenfalls senkrecht zu AB sei ein Diaphragma mit der beleuchteten Öffnung QQ gestellt, von welcher die Linse ein Bild $Q'Q'$ entwirft. Von einem Punkt a der Öffnung werde die Gerade aH_1, und H_2a' parallel zu dieser gezogen, so dass a' das Bild von a ist; SaS sei der ganze von a ausgehende, auf die Linse fallende Strahlenkegel, $S'a'S'$ der ihm entsprechende gebrochene. Legen wir noch durch F eine senkrechte Ebene zu AB, so schneidet in dieser der gebrochene Strahlenkegel eine Fläche ss aus, welche die zu a' gehörige Zerstreuungsfläche heissen mag und in welcher jedem einfallenden Strahle aM, ein Schnittpunkt m des zugehörigen austretenden Strahles $M'a'$ entspricht.

Nun denken wir uns zwischen QQ und der Linse oder vor QQ zwei Polarisatoren so gestellt, dass die Intensität des Centralstrahles AB Null wird, also z. B. zwei Nicol, dessen Hauptschnittsebenen aufeinander senkrecht stehen und zu AB parallel sind. Von der Verschiebung, welche im ersten Falle das Bild $Q'Q'$ erleidet, wollen wir absehen oder, wir nehmen $Q'Q'$ als Ort des Bildes nach Zwischenstellung der Nicol und haben dann unter QQ das durch die Nicol entworfene (virtuelle) Bild der gegebenen Öffnung zu verstehen. Die Begrenzung des Strahlenkegels SS und somit auch die der Zerstreuungsfläche wird bestimmt sein durch die Diaphragmen der Nicol und durch die Lage des Punktes a. Denken wir uns ein Parallelstrahlenbündel in der Richtung aM einfallend, so wäre m der Vereinigungspunkt dieser Strahlen nach dem Durchgang durch die Linse und die Intensität in diesem Punkte fänden wir nach den früher gegebenen Regeln, wie sie gelten, wenn die Polarisatoren von parallelen Strahlenbündeln durchsetzt werden. Nun wird sich aber diese Intensität im Punkte m verhalten zur Intensität des Strahles $M'm$, wie der Querschnitt des fingirten Parallelstrahlenbündels zum unendlich kleinen Querschnitt des Strahles aM. Bestimmen wir also die Vertheilung der Intensitäten J in den Punkten m der Brennebene entsprechend einer angenommenen wirksamen Objectivöffnung O ganz so wie es in den Artikeln V, VI und VII näher angegeben, so werden

die Intensitäten J der durch m gehenden Strahlen ausgedrückt werden können durch

$$J' = \frac{o}{O} J,$$

wenn o der Querschnitt des Strahles aM in M ist. Summiren wir die Intensitäten aller durch die Zerstreuungsfläche von a' gehenden Strahlen, so erhalten wir schliesslich die Intensität in a', die mit J_1 bezeichnet sein mag.

Ist $d\omega$ ein Flächenelement der Zerstreuungsfläche, b die Bildweite H_2B und f die Brennweite der Linse, so ist

$$o = \frac{b^2}{(b-f)^2} d\omega$$

und daher

$$J_1 = \frac{b^2}{O(b-f)^2} \int J d\omega,$$

das Integral erstreckt über die ganze Zerstreuungsfläche des Punktes a'. Da im Allgemeinen J nur in den Punkten einer Linie Null wird, so kann J_1 nicht verschwinden. In Fig. 6*b* ist der Theil der Brennebene, der noch von Strahlen getroffen wird, durch $Q''Q''$ angedeutet, sowie die ihm zukommende Helligkeitsvertheilung, durch ss die Zerstreuungsfläche des Punktes a'. Verschiebt man ss innerhalb $Q''Q''$, so übersieht man sofort die Änderungen, welche die Helligkeiten in den Punkten des Bildes $Q'Q'$ beim Übergang von einem zum anderen erleiden.

Projicirt man die Mittellinie des dunkeln Streifens in $Q''Q''$ central aus H_2 in die Ebene $Q'Q'$, so erhält man offenbar jene Punkte des Bildes, in denen die Intensität ein Minimum ist, denn die zugehörigen Zerstreuungsflächen werden vom dunkeln Bande den grösstmöglichsten Theil aufnehmen, wenn sie anders nahe kreisförmig oder doch symmetrisch in Bezug auf eine zur Nullinie Parallele begrenzt sind. Man bemerkt zugleich, dass die Form dieser Begrenzung, die meist von der Form der Diaphragmen an den Polarisatoren abhängen wird, die Helligkeitsvertheilung im Bilde wesentlich beeinflussen kann. Werden die Zerstreuungsflächen immer grösser, so wird das Bild auch immer heller und gleichförmiger erhellt erscheinen; denselben Einfluss hat eine Steigerung der Intensität der Lichtquelle, da bei grösserer

Gesammthelligkeit die Unterscheidungsfähigkeit für Helligkeitsunterschiede kleiner wird.[1] Zusammenfassend können wir sagen:

Wenn zwei Polarisatoren in paralleles Licht gestellt ein Gesichtsfeld mit dunkeln Streifen geben, so werden sie in convergentem oder divergentem Lichte ein Gesichtsfeld liefern, das zwar auch von einem dunkleren Bande durchzogen erscheint, in dem aber die Intensität nirgend Null ist. Dieses Band wird sich um so mehr aufhellen und schliesslich ganz verschwinden, je näher die leuchtende Fläche dem Fernrohr oder dem Auge rückt, allgemein, je mehr die Strahlenbündel, welche die Polarisatoren durchsetzen vom Parallelismus abweichen und je intensiver die Lichtquelle ist.

Man bemerkt den grossen Unterschied im Verhalten der Polarisatoren, wenn sie in paralleles Licht gestellt sind oder nicht. Während im ersten Fall die Steigerung der Lichtintensität den Streifen deutlicher und schärfer macht, bewirkt sie im letzteren Falle schliesslich sein vollständiges Verschwinden.

Dass der ofterwähnte Parallelismus der Lichtstrahlen um so genauer einzuhalten ist, je intensiver die Lichtquelle gewählt wird, ergibt sich von selbst; wie klein die Abweichungen vom Parallelismus aber sind, die schon einen merklichen Einfluss erkennen lassen, zeigt folgender Versuch.

Indem ich den Collimator ganz entfernte, Nicol und Fernrohr jedoch beibehielt und zwar dieselben, die im Art. VIII näher angeführt erscheinen, stellte ich die durch Sonnenlicht erleuchtete Öffnung in drei Meter Entfernung vom Fernrohrobjectiv auf, vor welchem sich unmittelbar die Nicol befanden. Während diese letzteren mit Collimator und unter Anwendung von Sonnenlicht einen sehr schönen, in seiner Mitte fast vollkommen schwarzen Streifen geben, war derselbe nunmehr verblasst und undeutlich. Der Öffnungswinkel der auf das Objectiv fallenden Strahlenkegel war aber, in dem erwähnten Versuche, wie sich aus der Grösse

[1] Wie man zu verfahren hat, wenn Linsengläser und Polarisatoren in irgend einer anderen, als der oben betrachteten Anordnung, aufeinanderfolgen, ist leicht zu erkennen und mag hier unerörtert bleiben.

der Diaphragmaöffnung an dem Nicol (12 Mm. Durchmesser) ergibt nicht ganz 14', der Durchmesser des Zerstreuungskreises in der Brennebene gleich 1·3 Mm. Will man hieraus auf die Undeutlichkeit des Bildes schliessen, im Vergleiche zu dem Bilde, das bei Anwendung eines Collimators erhalten wird und das in dem Beispiele des vorigen Artikels ausführlich angegeben ist, so muss man sich erinnern, dass letzteres auf eine Brennweite μf bezogen wurde. Die Dimensionen des Bildes, in welches obiger Zerstreuungskreis einzutragen wäre, sind $^1/_6$ des auf μf bezüglichen und man erkennt, dass, wenn der Zerstreuungskreis um Punkte der Nulllinie construirt wird, Intensitäten innerhalb desselben zu liegen kommen, die schon bedeutend von Null abweichen.

Polarisatoren mit normalen Gesichtsfeldern würden, auch wenn sie in nichtparallelem Lichte stehen, ein vollkommen dunkles Gesichtsfeld liefern. Es ist jedoch nicht zu übersehen, dass durch senkrechte Stellung der Krystallaxe zur Längsaxe des Polarisators, oder, was dasselbe ist, zur optischen Axe des Fernrohres ein solches normal polarisirtes Gesichtsfeld nur näherungsweise zu Stande kommt.

Viele vom Nichtparallelismus der Strahlen herrührende Erscheinungen an Polarisatoren scheint man bisher dem an den Seitenflächen auftretenden zerstreuten Lichte zugeschrieben zu haben; letzteres dürfte jedoch im Allgemeinen, selbst bei intensiven Lichtquellen, keineswegs sehr störend wirken.

X.

Das Vorangehende enthält die theoretische Grundlage für die Construction eines Polarimeters, das anf die Erscheinung des dunkeln Streifens basirt, ist aber nicht minder wichtig für die Vervollkommnung der bereits im Gebrauche befindlichen Polaristrobometer und die Erklärung mancher Wahrnehmungen, die bei ihrem Gebrauche gemacht werden.

Bei den meisten Polarimetern[1] handelt es sich darum, möglichst kleine Änderungen der Helligkeit, die entweder in benach-

[1] Von jenen Polarimetern, welche die Soleil'sche Doppelplatte benützen, soll hier abgesehen werden.

barten Punkten des Gesichtsfeldes gleichzeitig erfolgen, oder nacheinander in dem Gesichtsfelde auftreten, für das Auge noch erkennbar zu machen.

Nun ist aber nach psychophysischen Gesetzen die Änderung der Intensität der Lichtempfindung, die einer Änderung ΔJ der Lichtintensität J entspricht, direct proportional dem ΔJ und verkehrt proportional dem J anzunehmen. Um also die Änderung der Empfindungsintensität möglichst gross zu machen, werden wir J möglichst klein zu nehmen haben, wobei aber J nicht unter jenen Grenzwerth i heruntersinken darf, für welchen die Empfindungsintensität bereits Null wird, weil alsdann auch eine Änderung von J nicht mehr bemerkbar ist. Bei Beobachtungen mit Halbschattenapparaten oder mit Wild'schen Polaristrobometern sollte man demnach die mittlere Helligkeit des Gesichtsfeldes möglichst klein wählen, eine Forderung, der bei den gebräuchlichen Instrumenten dieser Art gewöhnlich nicht entsprochen ist. Man darf aber den Grenzwerth für die mittlere Helligkeit nicht etwa dadurch zu erreichen suchen, dass man absorbirende Medien anwendet, denn dadurch würde sich ΔJ in gleichem Masse wie J ändern. Um die Bedeutung der obigen Forderung besser übersehen zu können, wollen wir den Quotienten $\frac{\Delta J}{J}$, dem die Änderung der Empfindungsintensität proportional ist, durch den Winkel ψ ausdrücken, den die Polarisationsrichtungen im betreffenden Punkte des Gesichtsfeldes mit einander bilden und durch die Änderung ΔJ dieses Winkels; wir hatten $J = k \cos^2 \psi$ gesetzt und hieraus folgt

$$\frac{\Delta J}{J} = -2 \operatorname{tng} \psi . \Delta\psi .$$

Um also ein möglichst kleines $\Delta\psi$ oder eine möglichst kleine Drehung des einen Polarisators noch wahrnehmbar zu machen, haben wir ψ möglichst nahe gleich einem Rechten zu wählen; hiebei darf aber ψ nicht grösser sein, als der aus der Gleichung

$$i = k \cos^2 \psi_0$$

folgende Grenzwerth von ψ, worin i sehr klein und als eine Grösse anzunehmen ist, die je nach Umständen beträchtlich verschiedene Werthe aufweisen wird.

Der Factor k ist unter sonst gleichen Umständen proportional der Intensität der Lichtquelle; nehmen wir für ψ den günstigsten Werth ψ_0 und $\Delta\psi$ so, dass ihm eine bestimmte Änderung der Empfindungsintensität Δe entspricht, so folgt

$$\Delta\psi = A\frac{\Delta e}{\sqrt{\frac{k}{i}-1}},$$

wo A einen Proportionalfactor bedeutet. Je kleiner $\Delta\psi$ ist, das einem bestimmten Werthe von Δe entspricht, um so grösser werden wir die Genauigkeit des Polarimeters nennen und da $\frac{k}{i}$ jedenfalls gross gegen die Einheit ist, so können wir sagen:

Insoferne die Einstellung an einem Polarimeter blos durch die Wahrnehmung von Helligkeitsunterschieden bedingt ist, wächst dieselbe unter sonst gleichen Umständen proportional mit der Quadratwurzel aus der Intensität der Lichtquelle.

Man sieht daher, dass eine wesentliche Steigerung der Genauigkeit irgend welcher polaristrobometrischer Methoden, nur unter Benützung sehr intensiver Lichtquellen zu erzielen ist. Alle anderen Hilfsmittel können wohl den Werth i und den Proportionalfactor A beeinflussen, so dürfte z. B. für einen Halbschattenapparat i kleiner und A grösser anzunehmen sein, als für einen Mitscherlich'schen Polarisationsapparat, allein sehr bedeutend werden die Schwankungen dieser Grössen nicht ausfallen.

Sobald man mit grossen Intensitäten arbeitet, werden alle die früher besprochenen Erscheinungen zu beachten sein und augenfällig werden und gewisse derselben auch bei geringeren Intensitäten, wenn nur das Gesichtsfeld entsprechend gross ist.

Bei den Halbschattenapparaten besteht das Gesichtsfeld nach Entfernung des Analyseurs aus zwei scharf aneinander grenzenden Hälften, deren Hauptschnitte einen kleinen Winkel α mit einander bilden. Sollen diese Hälften nach entsprechender Einschaltung des Analyseurs immer den günstigsten Grad von Dunkelheit besitzen, so muss α entsprechend der angewandten Lichtquelle verändert werden können, wie dies bei den Laurentschen Apparaten in der That der Fall ist. Bei der Dunkelstellung

wird mit dem Kleinerwerden des Winkels α, bald die Erscheinung des dunkeln Streifens zu Tage treten; beim Drehen des Analyseurs wird durch jede Gesichtsfeldhälfte ein solcher Streifen hindurchwandern und die beiden Streifen werden nur für $\alpha = o$ so liegen, dass der eine die Fortsetzung des anderen bildet. Damit die Grenzlinie zwischen beiden Gesichtsfeldhälften in ihrer ganzen Ausdehnung gleichzeitig verschwinden könne, müssen die Streifen dieser Grenzlinie parallel liegen und man wird verlangen, dass sie diese Lage auch wieder annehmen, wenn man den Analyseur um π gedreht hat. Dies ist sehr nahe erreicht, wenn die Halbirende des Winkels α der Grenzlinie parallel und das Gesichtsfeld des Analyseurs ein normalpolarisirtes ist. In diesem Falle behält der dunkle Streifen auch die geforderte Lage, wenn ein circularpolarisirendes Medium eingeschaltet wird.

Auch bei dem Wild'schen Polaristrobometer wird gleiche Helligkeit in aneinandergrenzenden Theilen des Gesichtsfeldes hergestellt, nur sind es jetzt eine grössere Zahl streifenförmiger Partieen, in denen dies zu geschehen hat, und diese mit sie durch Interferenzstreifen gebildet werden, stossen nicht, da scharfen Grenzen aneinander. Wir wollen annehmen, die Savart'sche Doppelplatte, durch welche das Interferenzphänomen erzeugt wird, sei so gestellt, dass der eine ihrer beiden aufeinander senkrecht stehenden Hauptschnitte P, Q, z. B. P, mit dem Hauptschnitte H_1 des feststehenden analysirenden Nicol den Winkel α bilde, wobei $\alpha < \frac{\pi}{4}$ vorausgesetzt sei. So oft der Hauptschnitt H_1 des drehbaren Polarisators mit einem der Hauptschnitte P, Q zusammenfällt, verschwinden die Streifen und zwar bei verschiedener mittlerer Helligkeit des Gesichtsfeldes; sind die beiden Polarisatoren gleichartig, so ist die Helligkeit kleiner, wenn H_1 mit Q, grösser, wenn H_1 mit P zusammenfällt, sind sie ungleichartig, so findet das Umgekehrte statt; wir wollen gleichartige Polarisatoren voraussetzen. Man sollte auch hier den Apparat so einrichten, dass α je nach der disponiblen Intensität verkleinert oder vergrössert werden kann; gewöhnlich nimmt man jedoch $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und hat dann allerdings den Vortheil, vier Stellungen des Polarisators

benützen zu können; bei grösserer Intensität wäre jedoch diese Anordnung nicht zu gebrauchen.

Die Streifen verschwinden gewöhnlich nicht im ganzen Gesichtsfelde, es zeigt sich vielmehr eine streifenfreie Partie, die beim Drehen des Polarisators durch das Gesichtsfeld wandert. Der Grund dieser Erscheinung und die näheren Umstände, die sie begleiten müssen, lassen sich leicht angeben.

Wir denken uns zu diesem Zwecke das Gesichtsfeld bestimmt, welches den extraordinären Strahlen der ersten Platte des Savart'schen Polariskopes, d. h. jener, die gegen den drehbaren Polarisator gewendet ist, entspricht. Dieses Gesichtsfeld wird in erster Näherung ein homocentrisches sein mit dem Centrum C_1 auf dem Hauptschnitte der ersten Platte, welcher als der Hauptschnitt Q angenommen werde. Gegen C_1 hin convergiren also die geradlinigen Oscillationscurven und da in der Platte die optische Axe nahe 45° mit den Endflächen bildet, so wird C_1 dem Mittelpunkte O des Gesichtsfeldes viel näher liegen, als die den gebräuchlichen Nicol entsprechenden Centra. Bestimmen wir nun auch die dem drehbaren Nicol zukommenden Schwingungsrichtungen, so werden wir jene Punkte des Gesichtsfeldes aufzusuchen haben, in denen die Schwingungsrichtungen der Platte und des Nicols entweder die Winkel Null oder $\frac{\pi}{2}$ einschliessen, in diesen Punkten verschwinden die Streifen. Fällt demnach der Hauptschnitt H_1 des Nicols mit Q zusammen, so verschwinden die Fransen in allen Punkten von Q und diese Gerade ist also die Mittellinie der streifenfreien Partie, sie ist unter 45° gegen die Fransen geneigt; ihre Breite wird grösser sein, wenn das Centrum C des Nicols mit C_1 auf derselben Seite von O, als wenn sie auf entgegengesetzten Seiten liegt (Art. VI, *b*, 2). Steht aber H_1 auf Q senkrecht, so verschwinden die Fransen in den Punkten des durch O, C und C_1 gelegten Kreises; wäre $OC = OC_1$, so würde bei diesen Stellungen die Mittellinie der streifenfreien Partie einmal parallel den Fransen, das andere Mal senkrecht zu ihnen verlaufen, wegen $OC > OC_1$ nähert sie sich mehr der Richtung von Q. Ist das Gesichtsfeld des drehbaren Polarisators ein normales, so hat die streifenfreie Partie in allen vier Stellungen, bei welchen die Fransen verschwinden, die Lage von Q und

immer dieselbe Breite; dann wird auch durch Einschaltung eines die Polarisationsebene drehenden Mediums an der Erscheinung Nichts geändert.

Es ist klar, dass Apparate, bei denen die Polarisatoren nicht im parallelen Lichte stehen, die beschriebenen Erscheinungen ziemlich unbestimmt zeigen werden.

Durch Zusammenstellung eines Halbschattenapparates, der mit Collimator versehen war, beliebig grosse Beschattung des Gesichtsfeldes gestattet und für Licht von jeder Wellenlänge anwendbar ist, habe ich in der That nachgewiesen, dass die Genauigkeit der Einstellungen wesentlich grösser und der Apparat für sehr intensive Lichtquellen anwendbar wird. [1] Bei einem Polaristrobometer von Wild hat Tollens gezeigt, dass durch Verringerung der Helligkeit, bei welcher die Fransen verschwinden sollen, die Einstellungen schärfer werden. Die Verringerung der Breite der streifenfreien Partie, die Tollens gleichzeitig beobachtet hat, rührt nur daher, dass das Auge bei geringerer Gesammthelligkeit grössere Unterscheidungsfähigkeit für Helligkeitsunterschiede erlangt und daher die Fransen weiter bis zu den Punkten, in denen sie vollständig verschwinden, verfolgen kann, als bei hellerem Gesichtsfelde.

Es ist kaum nöthig zu erwähnen, dass auch bei Constructionen von Photometern, welche die Lichtschwächung durch Polarisatoren benützen, das Vorangehende Berücksichtigung finden wird, namentlich dann, wenn es sich um Messung grosser Helligkeitsunterschiede handelt, in welchem Falle die Fehler sehr bedeutend werden können, oder der nöthige Grad von Dunkelheit gar nicht zu erreichen ist.

XI.

a) Wie wir gesehen haben, werden durch die Helligkeitsabstufungen am dunkeln Streifen die Änderungen des Winkels ψ von dem Werthe $\psi = \frac{\pi}{2}$ aus, in dem Gesichtsfelde dem Auge in der einfachsten und klarsten Weise erkennbar und, da der Streifen

[1] Über ein Halbschattenpolarimeter; naturwissenschaftliches Jahrbuch „Lotos", neue Folge II. Bd., Prag, Tempsky, 1880.

in der gehörigen Schärfe und Beweglichkeit hergestellt werden kann, so wird dieser sich zu einer besonders einfachen und hohe Genauigkeit gewährenden polaristrobometrischen Methode verwerthen lassen.

Durch die Société genèvoise pour la construction d'instruments de Physique habe ich nach den auseinandergesetzten Principien ein Polarimeter verfertigen lassen, das den Anforderungen in vorzüglicher Weise entspricht und dessen Einrichtung ich hier, mit Weglassung aller constructiven Details, angeben will. Die Nicol, welche bisher an diesem Instrumente verwendet wurden, lieferte die optische Anstalt von Dr. Steeg und Reuter in tadelloser Ausführung; es sind dieselben, die dem Zahlenbeispiel im Art. VIII zu Grunde liegen.

Um dem Instrumente einestheils möglichste Stabilität zu geben, anderntheils um dasselbe zu Versuchen geeignet zu machen, die sehr verschiedene Anordnung erfordern, habe ich Polarisator und Analyseur ganz von einander getrennt. Beide Theile sind fast congruent construirt und bestehen der Hauptsache nach aus einem verticalen Kreise, dessen horizontale Drehungsaxe mit einer Durchbohrung zur Aufnahme des Polarisators versehen ist. Der eine dieser Kreise hat einen Durchmesser von 30 Ctm. und ist mit einer Theilung versehen, an welcher mittelst zweier Mikrometer-Mikroskope noch die einzelne Secunde abgelesen werden kann. Auf der horizontalen Platte, die das Lager der Drehungsaxe trägt, ist zugleich das Fernrohr, beziehungsweise der Collimator montirt und mit den nöthigen Bewegungen versehen, welche die optische Axe parallel zur Drehungsaxe des Polarisators zu stellen und überdies das Fernrohr parallel zu sich selbst in horizontalem und verticalem Sinne zu verstellen gestattet. Die Tragplatte von Kreis und Fernrohr besitzt eine verticale Drehungsaxe, die sich in dem massiven, mit Stellschrauben versehenen Fusse befindet, wodurch die genaue Orientirung der beiden Theile gegen einander ermöglicht ist. Diese werden auf eine Steinplatte von entprechenden Dimensionen gestellt, wodurch die Unveränderlichkeit der relativen Lage von Polarisator und Analyseur, auf die es vor Allem ankommt, gesichert erscheint. Eisen- und Stahlbestandtheile sind möglichst vermieden. Das gewöhnliche Objectiv des Collimators oder des Fernrohres kann

durch ein Heliometerobjectiv, dessen Hälften in der Ebene des Objectives parallel und senkrecht zur Schnittlinie verschiebbar sind, ersetzt werden. Das Fernrohr gestattet mittelst mehrerer Oculare 5-, 10- und 15fache Vergrösserung.

Um die Helligkeitsabstufungen im dunkeln Streifen durch Contrastwirkung noch mehr hervortreten und überdies in den Collimator nicht mehr Licht eindringen zu lassen, als erforderlich ist, gibt man der Collimatoröffnung am besten die Form einer schmalen Spalte von $^1/_3$ bis $^1/_2$ Mm. Breite und stellt den Streifen senkrecht zu den Spalträndern. Vor der Spalte, ebenfalls senkrecht zu deren Rändern sind zwei feine Fäden oder Dräthe gespannt, zwischen deren Bild der Streifen eingestellt wird. Das Ocular enthält überdies ein Fadenkreuz, das dazu dient, die Unveränderlichkeit in der relativen Stellung von Polarisator und Analyseur jeden Augenblick controliren zu können. Es wäre natürlich ebenso gut möglich, die Parallelfäden in das Ocular und das Fadenkreuz an die Spalte zu verlegen. Fig. 7 gibt das Bild, wie es in meinem Apparate unter Anwendung von Sonnenlicht und bei 5facher Vergrösserung des Fernrohres erscheint, möglichst getreu wieder; das Sonnenlicht wurde mittelst einer Cylinderlinse auf die Spalte concentrirt. Der Abstand der Parallelfäden und ihre Dicke sind für die Genauigkeit der Einstellung nicht unwesentlich. Man beurtheilt nämlich die richtige Einstellung des Streifens eigentlich nach zwei ganz verschiedenen Principien, einmal auf rein geometrische Weise, indem man den Fadenabstand durch die dunkelste Stelle des Streifens halbiren lässt, dann aber auch durch die Gleichheit des Contrastes, mit welchem sich die einander zugekehrten Ränder der schwarzen Fäden von dem etwas lichteren Untergrunde abheben. Je schärfer der Streifen in Bezug auf den Fadenabstand, desto mehr überwiegt, wenn man so sagen darf, die geometrische Einstellung, je verwaschener er ist, desto mehr beurtheilt man nach der Gleichheit des Contrastes und man hat die Verhältnisse wenn möglich so zu wählen, dass sich beide Urtheile unterstützen können.

In der folgenden Tabelle führe ich aus einer grösseren Zahl von Beobachtungen unter Nr. 1 und Nr. 2 zwei Reihen von Einstellungen an, die bei Anwendung von Sonnenlicht und 5facher Fernrohrvergrösserung gemacht wurden; Nr. 3 bezieht sich auf

eine 15fache Fernrohrvergrösserung, wobei die Fäden dieselben blieben wie in den beiden ersten Reihen; bei dieser Vergrösserung konnte besonders gut nach der Gleichheit des Contrastes der Fäden gegen den Hintergrund eingestellt werden. Die mit *A* bezeichneten Columnen enthalten die Ablesungen, die mit *D* überschriebenen die Abweichungen vom Mittel; die Grade und Minuten sind als unwesentlich weggelassen. Die mit *m* bezeichnete Zeile gibt die arithmetischen Mittel und neben F_m und F_w sind die mittleren und wahrscheinlichen Fehler einer Einstellung angesetzt.

Nr. 1.		Nr. 2.		Nr. 3.	
A	*D*	*A*	*D*	*A*	*D*
36'5	+1·8	7'0	+1·1	21'0	−4·1
41·5	−3·2	5·5	+2·6	12·0	−4·9
41·0	−2·7	8·5	−0·4	10·0	−6·9
30·0	+8·3	11·5	−3·4	21·5	+4·6
46·0	−7·7	9·0	−0·9	13·5	−3·4
38·5	−0·2	8·0	+0·1	18·5	+1·6
39·0	−0·7	3·0	+5·1	15·0	+1·9
42·0	−3·7	10·0	−1·9	24·0	+7·6
35·0	+3·3	6·5	+1·6	18·5	+1·6
33·5	+4·8	12·0	−3·9	14·0	−2·9
m 38·3		8·1		16·9	
F_m	±4'7		±2'8		±4'7
F_w	±3·1		±1·9		±3·1

Ferner mögen hier noch drei Reihen von Einstellungen (s. pag. 311) folgen, die unter Anwendung von Kalklicht[1] erhalten wurden; die Fernrohrvergrösserung war wie in den beiden ersten Reihen der vorigen Tabelle die fünffache.

Zur weiteren Beurtheilung dieser Zahlen füge ich noch bei, dass ich die Ablesung an den Mikroskopen selbst besorgte, der Heliostatenspiegel während einer Beobachtungsreihe öfter richtig gestellt werden musste und die Instrumente einfach auf einen Experimentirtisch mit starker Eichenholzplatte standen. Bei den Beobachtungen mit Kalklicht dürfte die Stabilität der Aufstellung

[1] Das Kalklicht wurde durch eine, von Prof. Linnemann construirte Leuchtgas-Sauerstoff-Lampe erzeugt, die bei sehr geringem Gasverbrauche ein sehr intensives und constantes Licht liefert.

Nr. 4.

A	*D*	*A*	*D*	*A*	*D*
45'0	+5·6	24'5	+ 1·0	2'0	+2·7
54·0	—3·4	27·0	— 1·5	1·0	+3·7
54·0	—3·4	26·0	— 0·5	6·5	—1·8
60·0	—9·4	20·5	+ 5·0	9·0	—4·3
52·0	—1·4	20·0	+ 5·5	2·5	+2·2
45·0	+5·6	36·0	—10·5	11·5	—6·8
51·5	—0·9	23·5	— 2·0	3·0	+1·7
52·0	—1·4	25·0	+ 0·5	4·5	+0·2
45·0	+5·6	22·5	+ 3·0	2·0	+2·7
47 5	+3·1	29·5	— 4·0	5·5	—0·8
m 50·6		25·5		4·7	
F_m	±4'9		±4'6		±3'4
F_r	±3·3		±3 1		±2·3

grösser gewesen sein und ausserdem ist das Licht von ausgezeichneter Constanz. Jedenfalls waren die Umstände solche, dass die berechneten Fehler, wie auch die Schwankungen in ihren Werthen zeigen, durchschnittlich noch zu gross sind. Es kann daher als bewiesen angesehen werden, dass die polaristrobometrischen Methoden eines hohen Grades von Genauigkeit fähig sind, den man vielleicht bisher als unerreichbar angesehen hat. Die Genauigkeit der Einstellung wird sowohl mit der Schärfe $\frac{1}{\xi_1}$ des Streifens, als auch mit der Beweglichkeit ξ_2 desselben zunehmen. Wäre sie proportional $\xi_2 \frac{1}{\xi_1}$, so könnte sie wegen des im Art. VI bewiesenen Satzes durch verschiedene Wahl der Polarisatoren nicht verändert werden, würde aber direct proportional der Quadratwurzel aus der Intensität der Lichtquelle und verkehrt proportional der Fernrohrvergrösserung sein (Art. VIII). Dies trifft vielleicht zu, wenn der Streifen sehr scharf ist; bei geringerer Schärfe hingegen, wie sie den obigen Beobachtungen zu Grunde liegt, dürfte die Genauigkeit rascher mit der Beweglichkeit als mit der Schärfe zunehmen. Dies zeigt die Beobachtungsreihe Nr. 3, die bei 3mal stärkerer Vergrösserung, also bei 3mal grösserer Beweglichkeit und 9mal kleinerer Schärfe angestellt war, als die Reihen Nr. 1 und Nr. 2, und doch nahe dieselbe Genauigkeit liefert, wornach

diese proportional $\xi_2 \sqrt{\frac{1}{\xi_1}}$ gesetzt werden könnte. Bei weiterer Abnahme von $\frac{1}{\xi_1}$ dürfte sich der Einfluss von ξ_2 wieder vermindern und schliesslich der Einfluss der Schärfe überwiegen.

Dreht man den einen Polarisator um 180°, so erscheint der Streifen in der Längsrichtung der Spalte und in dieser Lage ist die Genauigkeit der Einstellung geringer. Man müsste also gleichzeitig die Spalte um 90° drehen, um die frühere Methode der Einstellung anwenden zu können. Einfacher ist es, als drehbaren Polarisator einen solchen mit normalem Gesichtsfeld zu wählen, was namentlich dann zu geschehen hat, wenn man den Streifen auch nach Einschaltung einer activen Substanz, immer in derselben Lage und Schärfe im Gesichtsfelde erhalten will. Handelt es sich aber um die Bestimmung sehr kleiner Drehungen, dann können auch die obgenannten Polarisatoren verwendet werden. Es ist in diesem Falle gar nicht nöthig, den einen Polarisator drehbar zu machen, man kann durch ein Ocularmikrometer die Verschiebung des Streifens im Gesichtsfelde messen und daraus die Grösse der Drehung ableiten. Glasplatten, die zwischen den Polarisatoren zu stehen kommen, können dann leicht ganz vermieden werden, indem man die Polarisatoren selbst zum Verschlusse des Rohres benützt, welches die zu untersuchenden Gase oder Flüssigkeiten enthält, oder aber dieselben ganz innerhalb des Rohres anbringt, und dasselbe durch Glasplatten schliesst, so dass die letzteren in eine Lage kommen, in welcher sie das Aussehen des dunkeln Streifens nicht weiter beeinflussen.

Wird der zu messende Drehungswinkel grösser, so tritt gleichzeitig eine merkliche Rotationsdispersion ein und im Spaltenbild erscheint eine Aufeinanderfolge von mehr oder weniger lebhaften Farbentönen, die an gewissen Stellen ziemlich gut ausgeprägte Übergangsstellen zeigen; diese können zur Einstellung benützt werden. Um diese mit grösserer Genauigkeit auszuführen, wird vor das Objectiv des Fernrohres ein Reversionsprisma angebracht, wie es schon Zöllner bei seinem Reversionsspectroskop verwendet hat und zwar in einer solchen Stellung, dass die Hypothenusenfläche des Prismas, mit der Schnittfläche des Heliometerobjectives zusammenfällt. Verdoppelt

man alsdann mit Hilfe des letzteren das Spaltenbild, so erhält man zwei, neben einander liegende Spaltenbilder, in denen die Farbenfolge in entgegengesetzten Richtungen verläuft und beim Drehen des Polarisators sich auch in entgegengesetzten Richtungen verschiebt. Sehr zweckmässig ist es, noch ein zweites total reflectirendes Prisma zur Perversion des Spaltenbildes zu verwenden, wodurch die Bilder desselben Spaltenrandes in Contact gebracht werden können und zwar desshalb, weil die Farbengrenzen sich nicht ganz regelmässig von einem Spaltenrand zum anderen erstrecken. Diese Anordnung kann natürlich auch zur Erhöhung der Genauigkeit bei Einstellung des dunkeln Streifens benützt werden.

Bei stärkerer Rotationsdispersion ist die nöthige Homogeneität des Lichtes durch spectrale Auflösung desselben herzustellen und man kann dann auf zwei verschiedene Arten verfahren.

1. Man stellt das Prismensystem zwischen dem zweiten Polarisator und dem Fernrohrobjectiv auf und verengt die Collimatorspalte so, dass ein hinlänglich reines Spectrum zu Stande kommt. War der Streifen vor Einschaltung der circularpolarisirenden Substanz senkrecht gegen die Spaltenränder gerichtet, so wird das Spectrum nach Einschaltung derselben von einer dunkleren, nach beiden Seiten hin abschattirten Curve durchzogen erscheinen, deren Verlauf sofort einen Überblick der Abhängigkeit der Rotationsdispersion von der Wellenlänge liefert. Durch Drehen des Polarisators können einzelne Punkte der Curve z. B. jene, die auf gewissen Fraunhofer'schen Linien liegen, zwischen die Parallelfäden, welche das ganze Spectrum senkrecht zur Spaltrichtung durchziehen, gebracht werden. Bestimmt man an diesen Stellen noch die Neigung des dunkeln Bandes gegen die Fadenrichtung, so wird man hieraus einen Werth für den Differentialquotienten der Drehung nach der Wellenlänge ableiten und hiedurch die Curve, welche die Abhängigkeit der Drehung von der Wellenlänge darstellt viel genauer bestimmen, als es durch Messung der Drehungen in einzelnen Punkten allein möglich ist. Ein Ocularschieber gestattet, das Spectrum bis auf den Theil, den man eben beobachten will, abzublenden.

Damit die Curve im Spectrum nicht zu steil verlaufe, muss die Dispersion des Prismensystemes der Grösse der Rotations-

dispersion entsprechend angepasst sein. In gleicher Weise werden die Polarisatoren und die Fernrohrvergrösserung so zu wählen sein, dass erstere für sich allein um so grössere Schärfe des Streifens geben, je grösser die anzuwendende Dispersion ist. Die Genauigkeit der Einstellungen muss dann geringer werden als jene, die in den obigen Tabellen zu Tage getreten ist. Bei kleinerer Dispersion, wie ich sie an meinem Apparate durch ein Halbprisma mit gerader Durchsicht von A. Hilger in London, in der verkleinernden Stellung hervorbringe, habe ich mich jedoch überzeugt, dass das Aussehen des dunkeln Streifens nicht viel ungünstiger ist, als das des Streifens, mit welchem die Beobachtungsreihe Nr. 3 ausgeführt wurde.

Das genannte Prisma ist sehr lichtstark; es wird mittelst einer Hülse unmittelbar am Objectivkopf des Fernrohres befestigt und bietet den grossen Vortheil, dass durch Neigen des Prismas in seiner Fassung um eine zur brechenden Kante parallelen Axe, das ganze Spectrum durch das Gesichtsfeld geführt werden kann.

Je grösser die Rotationsdispersion im Vergleiche zur Dispersion der Prismen ist, um so mehr stellt sich der Streifen parallel der Spalte und nimmt schliesslich deren Richtung an; es ist dann ganz gleichgiltig, in welcher Weise die Hauptschnitte der Polarisatoren gegen die Spaltrichtung orientirt werden. Man hat dann die Anordnung vor sich, die Broch, sowie Fizeau und Foucault gewählt haben, nur mit dem Unterschiede, dass hier der Collimator vor dem ersten und nicht hinter dem zweiten Polarisator steht.

Die Angabe, die man gewöhnlich findet, dass bei gekreuztem Nicol und Einschaltung einer activen Substanz das horizontale Spectrum von einem oder mehreren verticalen dunkeln Streifen durchzogen erscheint, bedarf, wie aus dem Obigen erhellt, einer Berichtigung.

2. Hat man grosse Dispersion in Anwendung zu bringen, so dürfte es am zweckmässigsten sein, mittelst eines vollständigen, möglichst lichtstarken Spectralapparates ein reines Spectrum auf die Spaltebene des Collimators am Polarisator zu entwerfen. Zu diesem Behufe wird man am Spectrometer das bewegliche Fernrohr durch Einsetzen einer Lichtspalte an Stelle des Oculares zum Collimator machen und den eigentlichen Collimator mit dem des Polarisators in unveränderliche Verbindung bringen. Durch

Drehung des mit Spalte versehenen Fernrohres kann man dann jeden beliebigen Theil des Spectrums in den Polarisationsapparat werfen. Arbeitet man mit Sonnenlicht, so wird vor der Fernrohrspalte ein kleiner beweglicher Spiegel anzubringen sein, durch welchen bei den verschiedenen Stellungen des Fernrohres das Heliostatenlicht in die Axe des ersteren reflectirt wird. Verwendet man Kalklicht, so kann leicht die ganze Lampe[1] mit dem beweglichen Fernrohrarm fest verbunden werden. Man hat auf diese Weise freilich ein Objectiv mehr als bei der früheren Anordnung, gewinnt aber den Vortheil, dass man auf das Bild der Collimatorspalte am Polarisator, Reversion und Perversion zugleich mit der Verdopplung des Bildes anwenden kann. Es entstehen so die beiden Bilder *abcd* und *a'b'c'd'*, Fig. 8, wobei *a*, *a'*; *b*, *b'*; *c*, *c'*; *d*, *d'* Bilder derselben Punkte sind. Die dunkeln Streifen in beiden Bildern bewegen sich nach entgegengesetzten Richtungen beim Drehen des Polarisators und die Messungen gelten für jene Stelle oder Linie im Spectrum, welche mit dem Rande *ac* der Spaltöffnung zusammenfällt; hiedurch ist diese Stelle des Spectrums oder die Wellenlänge, auf welche sich die Einstellungen beziehen, sehr genau definirt.

Nach den Messungen von Soret und Sarasin[2] über die Circularpolarisation des Quarzes beträgt der Unterschied der Drehungen für die beiden *D*- Linien in einer 1 Mm. dicken Platte 187″. Würden wir die Polarisatoren so wählen, dass die Schärfe des Streifens doppelt so gross wird, als im Zahlenbeispiele des Art. VIII, so würden 180″ einer Entfernung von 1·5 Mm. vom dunkeln Streifen und senkrecht zu diesem entsprechen. Ist die Dispersion des Spectroskopes von solcher Grösse, dass im Gesichtsfelde des Analyseurfernrohres die *D*- Linien in einem Abstande von 1 Mm. erscheinen, so erhielte der dunkle Streifen eine Neigung von beiläufig 34° gegen die Ränder des Spaltbildes, eine Neigung, welche für die Einstellungen noch nicht zu klein wäre. Man sieht aus diesem Beispiele so viel, dass schon für Rotationsdispersionen wie sie 1 Mm. dicke Quarzplatten zeigen,

[1] Die Linnemann'sche Lampe hat geringe Dimensionen und geringes Gewicht.

[2] Beibl. zu Pogg. Ann., 1877, S. 113.

die Dispersion des Prismensystemes ziemlich beträchtlich sein muss. Die sehr lichtstarken und kräftigen Flüssigkeitsprismen, welche in neuester Zeit Wernicke[1] construirt, dürften für diese Versuche besonders gut geeignet sein.

b) Wenn die Rotationsdispersion sehr gross ist, so wird es wegen der eintretenden Lichtschwächung nicht mehr möglich, das Spectrum so weit auszudehnen, dass die Neigung des Streifens gegen die Spalträuder genügend gross erscheint; man wird ihn dann senkrecht zur Längsrichtung des Spectrums stellen und hat dann im Wesentlichen, wie schon bemerkt, die Broch'sche Methode.

Wir wollen auch für diese Methode einen Ausdruck für die Schärfe und Beweglichkeit des Streifens aufstellen, und zwar unter der Voraussetzung, dass die verticale Spalte am Collimator des Polarisators als Lichtspalte verwendet und das Prismensytem zwischen Analyseur und Fernrohr gestellt werde.

Der dunkle Streifen stehe an einer Stelle des Spectrums, deren Wellenlänge λ ist; von dieser Stelle aus werden sich die Wellenlängen proportional der Entfernung ξ vom Streifen ändern, so lange ξ klein ist, so dass wir setzen können $\xi = D\Delta\lambda$ und D ein Mass für die Dispersion an der betreffenden Stelle des Spectrums abgibt. Stellt ferner $\psi = F(\lambda)$ die Abhängigkeit der Drehung von der Wellenlänge dar, so folgt aus $\Delta\psi = F'\Delta\lambda$:

$$\xi = \frac{D}{F'}\Delta\psi.$$

Die Intensität J, die der Änderung von ψ an der Stelle des Streifens um $\Delta\psi$ entspricht, ist proportional $\sin^2\Delta\psi$ und wir können setzen

$$J = k_1\Delta\psi^2,$$

wo k_1 die Helligkeit ist, wenn die Polarisatoren so gestellt werden, dass die betrachtete Partie des Spectrums die grösste Intensität zeigt, und die in ähnlicher Weise zu berechnen wäre, wie für k im Art. VII geschehen. Wir haben demnach

$$J = k_1\frac{F'^2}{D^2}\xi^2,$$

---

[1] Zeitschrift f. Instrumentenkunde 1881, S. 353.

und für die Schärfe $\frac{1}{\xi'_1}$ und die Beweglichkeit ξ'_2 des Streifen würden wir erhalten

$$\frac{1}{\xi'_1} = \frac{F'}{D}\sqrt{\frac{k_1}{i}}, \quad \xi'^2 = \frac{D}{F'}\eta,$$

wo i und η dieselbe Bedeutung haben wie im Art. VII.

Würden wir unter denselben Umständen die Polarisatoren so stellen, dass ohne Einschaltung des circularpolarisirenden Mediums der Streifen horizontal liegt, so hätten wir für die Schärfe und Beweglichkeit dieses Streifens

$$\frac{1}{\xi_1} = A\sqrt{\frac{k_1}{i}}, \quad \xi_2 = \frac{1}{A}\eta,$$

wobei A nur von der Beschaffenheit der angewandten Polarisatoren abhängt. Macht man also

$$\frac{F'}{D} = A,$$

so wird die Beweglichkeit des nach der Broch'schen Methode erhaltenen Streifens in horizontalem Sinne und des bei der früher dargelegten Methode entstehenden Streifens im verticalen Sinne, gleich und die Genauigkeit der Einstellung wäre in beiden Fällen, wenn nur im letztgenannten die Neigung des Streifens eine entsprechende ist, nicht wesentlich verschieden. Dies wird jedenfalls innerhalb ziemlich weiter Grenzen zutreffen. Nur wenn die Rotationsdispersion, für welche F' ein Mass darstellt, klein ist, so dass der dunkle Streifen einen zu grossen Theil des Spectrums überdeckt, falls die Broch'sche Methode in Anwendung kommt, wird die andere Methode vorzuziehen sein und überhaupt, wie schon erwähnt, diese in die erstere von selbst bei grossen Werthen von F' übergehen.

Auch wenn man den Streifen in der Lage senkrecht zur Länge des Spectrums anwenden will oder muss, kann man mit Vortheil das Spectrum auf die Spalte des Collimators am Polarisator projiciren, wobei dieselbe in die Richtung des Spectrums gebracht und weit geöffnet wird. Der Streifen erscheint dann weniger scharf, als wenn das Prismensystem vor dem Fernrohrobjectiv steht, denn die $\Delta\psi$ bestehen im ersteren Falle aus zwei

Theilen, von entgegengesetztem Vorzeichen, einem, der von der Rotationsdispersion herrührt und einem zweiten, der durch das Gesichtsfeld der Polarisatoren bedingt wird. Die genannte Anordnung ist auch besonders geeignet, wenn man die Genauigkeit der Messungen durch Anwendung der Reversion erhöhen will; man wird dann zweckmässig die beiden Spaltenbilder etwas übergreifen lassen.

Für Messungen der Drehungswinkel der Polarisationsebene durch den Quarz hat schon v. Lang[1] eine Methode angegeben durch welche in zwei übereinander liegenden, aber gleichlaufenden Spectren, die Streifen nach entgegengesetzten Richtungen sich bewegen, indem er eine Doppelplatte aus Quarz anwandte.

XII.

Statt den dunkeln Streifen zwischen zwei Parallelfäden einzustellen, kann man noch in anderer Weise verfahren. An der Collimatorspalte wird senkrecht gegen ihre Ränder ein schmaler, undurchsichtiger Streifen mit scharfen Rändern befestiget, so dass das Bild der Spalte von einem schwarzen Bande quer durchzogen erscheint. Stellt man den dunkeln Streifen, den die Polarisatoren geben, so ein, dass seine Mittellinie mit der Mittellinie des Bandes zusammenfällt, so werden die Intensitäten an den Rändern des Bandes gleich sein. Nun verdoppelt man mit Hilfe des Collimatorobjectives das Spaltenbild in seiner Längsrichtung, bis der obere Rand des Bandes in dem einen Bilde mit dem unteren im anderen Bilde genau zusammenfällt. Zu beiden Seiten der Linie, in welcher die Ränder sich berühren, sind gleiche Helligkeiten vorhanden und die Trennungslinie muss daher verschwinden, sofort aber sichtbar werden, wenn durch Drehung eines der Polarisatoren der dunkle Streifen näher an den einen oder anderen Rand des Bandes rückt. Wie man sieht, erfolgt also jetzt die Einstellung nach dem Halbschattenprincip.

Die Breite des Bandes wird man natürlich der Breite des dunkeln Streifens anpassen und erstere immer so zu wählen haben, dass die Intensitäten an den Rändern möglichst klein

[1] Sitzungsber. d. Wiener Akademie, LXXIV, S. 209.

ausfallen. Wenn wir den dunkeln Streifen, auf den sich die Zahlenangaben im Art. VIII beziehen, voraussetzen und dem Bande eine solche Breite geben, dass die Breite des Bildes 1 Mm. beträgt, so würde dies einem Halbschattenapparate entsprechen, in welchem die Hauptschnitte der Polarisatorhälften einen Winkel von 1′ einschliessen. Der Änderung dieses Winkels entspricht nach unserem Verfahren eine Änderung der Breite des Bandes.

Es ist natürlich hier sowohl, als überhaupt bei Anwendung von Doppelbildern erforderlich, dass beide Bilder gleiche Helligkeit besitzen und zu diesem Zwecke muss das aus dem zweiten Polarisator tretende Strahlenbündel durch die Schnittebene des Heliometerobjectives halbirt werden. Um dieses erreichen zu können, ist die schon oben bemerkte Einrichtung getroffen, dass das Fernrohr parallel zu sich selbst eine Verschiebung in verticalem und horizontalem Sinne gestattet.

Bei nicht zu grosser Rotationsdispersion kann diese Methode ebenfalls angewendet werden; man beurtheilt dann die richtige Einstellung nach der Gleichheit des Farbentones zu beiden Seiten der Trennungslinie und das Verfahren wird also ganz ähnlich dem mit der Soleil'schen Doppelplatte. Bedeutende Rotationsdispersion würde wieder spectrale Auflösung erfordern, bei welcher jedoch die früher angegebenen Methoden vorzuziehen sein werden.

Erheblicher als bei diesen früher angegebenen Methoden ist bei der Halbschattenmethode der Einfluss einer Veränderung in der Augenstellung gegen das Ocular, der überhaupt bei allen Instrumenten wohl zu beachten ist, mit denen Helligkeitsvergleichungen angestellt werden sollen. Die Helligkeitsveränderungen, die eine kleine Bewegung des Auges begleiten, rühren in unserem Falle davon her, dass durch die Pupille von den beiden Lichtbündeln, die den Objectivhälften entsprechen, das eine oder das andere theilweise abgeblendet wird. Hat z. B. die Pupille einen Durchmesser von 4 Mm. und der Ocularkrus wie in dem Zahlenbeispiel des Art. VIII einen Durchmesser von 2·4 Mm., so würde schon eine Verschiebung des Auges von 0·8 Mm. aus der Normalstellung heraus, den Pupillenrand mit dem Ocularkreis in Berührung bringen. Man muss daher den Ocularkreis bedeutend kleiner als die Pupillenöffnung machen, das heisst eine stärkere

Fernrohrvergrösserung anwenden. Eine 10- bis 15malige Vergrösserung war an dem oben beschriebenen Apparate hinreichend, um den Einfluss einer kleinen Änderung in der Augenstellung leicht und ohne besondere Hilfsmittel zu eliminiren.

Die angegebene Halbschattenmethode ist auch dann anwendbar, wenn die Schärfe des Streifens ziemlich klein wird; wählt man daher die Polarisatoren so, dass die Beweglichkeit des Streifens gross ist, so wird diese Methode einer besonders hohen Genauigkeit fähig sein. Ich habe sie nur mit Hilfe der beiden Nicol prüfen können, die auch zu den im Art XI. angegebenen Versuchsreihen dienten und die nachfolgende Tabelle gibt einige der erhaltenen Zahlen. Die Versuche wurden mit Sonnenlicht angestellt; die Zahlen in Nr. 5 und Nr. 6 beziehen sich auf eine 10malige, die in Nr. 7 auf eine 15malige Vergrösserung. Der vor der Spalte angebrachte Querstreifen hatte eine Breite von beiläufig $^1/_3$ Mm. Fig. 9 gibt das Bild bei 10maliger Vergrösserung.

Nr. 5.		Nr. 6.		Nr. 7.	
A	*D*	*A*	*D*	*A*	*D*
53″	−1·9	19	+3·3	15	−6·5
53	−1·9	25	−2·7	13	−4·5
49	+2·1	23	−0·7	13	−4·5
50	+1·1	18	+4·3	6	+2·5
54	−2·9	24	−1·7	7	+1·5
56	−4·9	23	−0·7	7	+1·5
45	+6 1	26	−3·7	4	+4·5
57	−5·9	21	+1·3	6	+2·5
45	+6·1	24	−1·7	8	+0·5
49	+2 1	20	+2·3	6	+2·5
m 51·1		22·3		8·5	
F_m	±4″2		±2″7		±3″7
F_w	±2·8		±1·8		±2·5

Die angegebenen Fehler sind ohne Zweifel noch zu gross, theils wegen der ungenügenden Stabilität der Aufstellung des Apparates, theils aus einem anderen Grunde. Die Methode erfordert nämlich, dass die Lichtstrahlen dieselbe Richtung gegen den Collimator behalten, was aber an meinem Uhrheliostaten nicht mit der nöthigen Genauigkeit zu erzielen war. Ein Handheliostat, der mittelst zweier Schlüssel vom Beobachter selbst

während er durch das Fernrohr sah, gestellt werden konnte, gab bessere Resultate.

Die vollkommenste Halbschattenmethode würde man erreichen durch jene Zusammenstellung, die ich in meiner, schon im Art. X. citirten Abhandlung: „Über ein Halbschattenpolarimeter" angegeben habe, indem man Polarisatoren mit normalem Gesichtsfelde in Anwendung bringt. Ob aber solche mit dem nöthigen Grade von Präcision herstellbar sind, darüber konnte ich mir bis jetzt keine Erfahrungen verschaffen.

Jedenfalls kann man auf Grund des Vorhergehenden behaupten, dass es möglich ist, die Drehung der Polarisationsebene, wenn sie nicht von einer merklichen Rotationsdispersion begleitet ist, mit einem wahrscheinlichen Fehler einer Einstellung zu bestimmen, der $\pm 2''$ nicht überschreiten dürfte.

XIII.

Es gibt noch einen anderen, im Principe von dem vorherbeschriebenen ganz verschiedenen Weg, um eine grosse Genauigkeit in der Bestimmung der Lage der Polarisationebene zu erreichen und dieser besteht darin, durch geeignete Vorrichtungen die Drehung der Polarisationsebene zu vergrössern. Jede solche Vergrösserung ist aber mit einer entsprechenden Lichtschwächung verbunden und diese Methode würde daher ebenfalls Lichtquellen von grosser Intensität erfordern.

Schon Fizeau hat bei seinem berühmten Versuche über die Drehung der Polarisationsebene durch die Erdbewegung[1] die Eigenschaft der Glasplattensäulen, den Winkel der Polarisationsebene mit der Einfallsebene zu vergrössern, benützt. Haben wir eine Säule von z parallelen Platten, ist i der Einfalls- und r der Brechungswinkel für eine dieser Platten, α der Winkel, den die Polarisationsebene der einfallenden Strahlen, β der Winkel, den die der austretenden Strahlen mit der Einfallsebene einschliessen, und setzen wir

$$\left(\frac{1}{\cos^2(i-r)}\right)^z = k,$$

[1] Pogg. Ann. CXIV. S. 554.

so erhalten wir aus der bekannten Beziehung $\operatorname{tng}\beta = \operatorname{tng}\alpha . k$:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{(1+\operatorname{tng}^2\alpha)k}{1+\operatorname{tng}^2\alpha . k}.$$

Der Differentialquotient wird ein Maximum für $\alpha=0$, nämlich

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = k,$$

und die Intensität des durchgehenden Lichtes J, die des einfallenden Eins gesetzt, ist gleichzeitig

$$J = \left[\frac{\sin 2r \sin 2i}{\sin^2(i+r)}\right]^{2z}.$$

Setzen wir beispielsweise den Brechungsindex $n = 1 \cdot 487$ und $i = 60°$ voraus und nehmen wir ferner an, die Säule enthielte 12 Platten, so wäre

$$k = 9 \cdot 1, \quad J = 0 \cdot 0108.$$

Eine solche Säule würde man am zweckmässigsten in folgender Weise verwenden. Man stellt dieselbe unmittelbar vor das analysirende Nicol, das unbeweglich ist, und zwar so, dass die Einfallsebene mit dem Hauptschnitte des drehbaren Polarisators zusammenfällt. Den Analyseur verbindet man entweder mit einer Bravai'schen Doppelplatte, oder, wenn man das Halbschattenprincip in Anwendung bringen will, man ersetzt ihn durch ein getheiltes Nicol, indem man das Fernrohr gleichzeitig mit einem Heliometerobjectiv versieht, und verfährt, wie dies in der Beschreibung meines Halbschattenpolarimeters angegeben ist. Da die Säule, wie wir angenommen, eine kleine Drehung des Polarisators 9mal vergrössert, so wird man, wenn nur die Intensität der Lichtquelle auf das Hundertfache gesteigert wird, auch den Polarisator mit neun mal grösserer Genauigkeit einstellen, und gestatten demnach die gebräuchlichen Methoden den Drehungswinkel mit einem wahrscheinlichen Fehler von 1′ zu bestimmen, so würde derselbe durch den Vergrösserungsapparat nahezu auf 6″ herabgedrückt. Selbst ein wahrscheinlicher Fehler von 1″ würde noch keine übermässig grosse Intensität der Lichtquelle erfordern.

Die vielfachen Reflexionen, sowie die elliptische Polarisation des Glases und die schwer herzustellende Homogeneität desselben,

dürften jedoch der Construction stark vergrössernder Glasplattensäulen unüberwindliche Schwierigkeiten darbieten.

Zweckmässiger wäre es in dieser Hinsicht, die Vergrösserung der Drehung durch Reflexion zu bewirken. Wenn wir, die früheren Bezeichnungen beibehaltend, setzen

$$k_1 = \frac{\cos(i-r)}{\cos(i+r)},$$

so bestimmt die Gleichung

$$\operatorname{tng}\beta = \frac{\operatorname{tng}\alpha}{k_1}$$

den Winkel der Polarisationsebene mit der Einfallsebene nach der Reflexion. Aus ihr folgt:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1+\operatorname{tng}^2\alpha}{k_1 + \frac{\operatorname{tng}^2\alpha}{k_1}};$$

das Maximum des Differentialquotienten ergibt sich für $\alpha = 90°$ und zwar

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = k_1,$$

während gleichzeitig die Intensität gegeben ist durch die Gleichung

$$J = \frac{\operatorname{tng}^2(i-r)}{\operatorname{tng}^2(i+r)}.$$

Unter Annahme derselben Zahlenwerthe wie oben, nämlich $n = 1 \cdot 487$, $i = 60°$ erhalten wir jetzt:

$$k_1 = 9 \cdot 3,\ J = 0 \cdot 0020.$$

Der Polarisationswinkel wäre im gegenwärtigen Fall 56° 5′ und daher der Einfallswinkel gross genug, um die elliptische Polarisation vernachlässigen zu können. Dies wäre selbst noch für $i = 58°$ gestattet, und für diesen Einfallswinkel würde sich ergeben

$$k_1 = 18 \cdot 7,\ J = 0 \cdot 0005.$$

Eine Lichtquelle, deren Intensität etwa 3000 Normalkerzen beträgt, wäre im letzteren Falle schon hinreichend und würde unter Anwendung der Halbschattenmethode noch Winkel von 2 bis 3″ zu messen gestatten.

Versuche, die ich in dieser Beziehung angestellt, scheinen das Gesagte zu bestätigen. Nur die eigenthümliche Transformation, die das Gesichtsfeld des Polarisators durch Reflexion der aus demselben tretenden Strahlen an einer ebenen Fläche erleidet, und auf welche im Art. IV bereits hingewiesen wurde, bringt einige Schwierigkeiten mit sich, die durch gehörige Wahl der Polarisatoren zu beheben sein dürften, die mir aber gegenwärtig nicht zur Verfügung stehen.

XIV.

Den Anstoss zu den vorhergehenden Untersuchungen und ihren Resultaten gaben gewisse Vorversuche, die ich in der Absicht anstellte, das wichtige Fizeau'sche Experiment über die Ablenkung der Polarisationsebene des Lichtes durch die Erdbewegung zu wiederholen. Die Schwierigkeiten, die eine so grosse Zahl von Glasplatten, wie sie Fizeau anwandte, mit sich bringen, dachte ich dadurch zu vermindern, dass nur wenige, etwa 4 bis 8 Platten benützt werden sollten, und zwar dickere Platten, die es ermöglichen, die im Innern derselben reflectirten Strahlen abzublenden, wie dies schon von Ketteler[1] vorgeschlagen wurde. Gleichzeitig musste dann eine viel genauere Methode zur Messung der Drehungswinkel, als die Anwendung von Polariskopen, Doppelquarze u. dgl. gewöhnlich bedingen, ermittelt werden. Letzteres ist nun wohl gelungen, allein selbst bei vier Platten ist die elliptische Polarisation schon so gross, dass einige Genauigkeit nicht erreicht werden kann. Es müssten diese Platten aus einer grossen Zahl ausgesucht und so combinirt werden, dass sich ihre störenden Wirkungen compensiren.

Es gibt aber eine Modification des Fizeau'schen Versuches, die geringere experimentelle Schwierigkeiten darbieten wird, und die darin besteht, dass man nicht das gebrochene, sondern das reflectirte Licht benützt;[2] in letzterem müsste sich ebenfalls eine Drehung der Polarisationsebene nachweisen lassen, wenn sie bei

[1] Astronomische Undulationstheorie, Bonn 1873, S. 134.

[2] In den „Recueil des travaux scientifiques de Léon Foucault", Paris, Gauthier-Villars, 1878, wird Seite 561 ein hieher gehörender Versuch erwähnt. Leider fehlen alle Angaben über das von Foucault eingeschlagene Verfahren zur Erreichung der erzielten grossen Genauigkeit.

ersterem vorhanden ist. Eine Theorie der Drehung der Polarisationsebene durch die Erdbewegung ist von Ketteler[1] gegeben worden und nach dieser wäre für eine einmalige Reflexion unter 45° eine Drehung von 6″, für zweimalige Reflexion eine Drehung von 16″ zu erwarten; das sind Grössen, die nach unserer Methode der Beobachtung nicht entgehen werden, wenn auch die auftretende Rotationsdispersion die Genauigkeit der Methode beeinträchtigen sollte.

Da indessen die Wellenfläche doppeltbrechender Körper durch die Bewegung der Theorie zufolge, ebenfalls eine Modification erleidet, so wäre es sehr wohl möglich, dass schon die blosse Combination zweier Polarisatoren den Einfluss der Erdbewegung erkennen lässt und dieser mögliche Einfluss, sowie seine Abhängigkeit von der Stellung des Apparates und der Lage der Axen der Polarisatoren gegen die Bewegungsrichtung müsste vor Allem untersucht werden.[2] Nach den bisher bekannt gewordenen Versuchen ist man in der That nur berechtigt in jenen Fällen ein negatives Resultat zu erwarten, in denen es blos auf die Strahlenrichtung und Wellenlänge ankommt. Ich hoffe demnächst die einschlägigen Experimente, soweit es meine Hilfsmittel gestatten, ausführen zu können.

Noch vielen anderen Fragen, die den Chemiker und Physiker interessiren und bei denen es sich um den Nachweis sehr kleiner Drehungen handelt, wird man durch die angegebene Beobachtungsmethode näher treten können. Der Nachweis der elektromagnetischen Drehung der Polarisationsebene in einer Luftsäule von 0·5 Meter Länge unter Atmosphärendruck ist mir durch diese Methode gelungen[3] und sie dürfte insbesondere geeignet sein die von Kundt und Röntgen[4] unter sehr hohen Drucken erhaltenen Resultate durch Versuche bei niederen Drucken zu ergänzen. Es wird sich hier von selbst die Frage aufwerfen, ob

---

[1] A. a. O. S. 107.

[2] Die noch unaufgeklärten beträchtlichen Differenzen in den Fizeau'schen Zahlenwerthen könnten darin ihren Grund haben, dass verschiedene Beobachtungsreihen mit verschiedenen Polarisatoren oder bei verschiedener Orientirung derselben angestellt wurden.

[3] Akad. Anzeiger, Jahrg. 1879, S. 126. (Sitzung vom 15. Mai.)

[4] Wiedemann., Ann., Bd. VIII., S. 278, 1879.

das Vacuum eine elektromagnetische Drehung zeigt, oder besser ausgedrückt, ob eine directe Einwirkung des elektrischen Stromes in der Stromspirale auf die Lichtschwingungen stattfindet oder nicht. Die Hypothese, auf welche z. B. C. Neumann eine Theorie der magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes gegründet hat,[1] würde eine solche directe Wirkung möglich erscheinen lassen, und man kann vorläufig auf Grund der bisherigen experimentellen Thatsachen nur behaupten, dass sie, wie es auch die Theorie voraussetzt, sehr klein sei.

Die beiden Theile des im Art. IX näher angegebenen Polarimeters sind so eingerichtet, dass die Drehungen um die verticalen Axen an horizontalen Theilkreisen bis auf einzelne Minuten abgelesen werden können. Hiedurch wird es möglich, Beobachtungen an vertical gestellten, spiegelnden Flächen unter verschiedenen Incidenzwinkeln oder an Beugungsgittern anzustellen, und z. B. die etwaige Modification des reflectirten Lichtes unter Einfluss elektromagnetischer Einwirkung zu untersuchen; ein diesbezüglicher Versuch, an einer Glasfläche ausgeführt, hat bisher kein positives Resultat ergeben und muss mit kräftigeren Strömen wiederholt werden. Auch die Polarisation des gebeugten Lichtes dürfte nunmehr einer genaueren Bestimmung zugänglich sein, die vielleicht auch auf den noch nicht untersuchten Fall eines Gitters ausgedehnt werden kann, das, wie etwa ein Drahtgitter in Luft, nicht an der Grenzfläche zweier Medien sich befindet.

Schliesslich sei bemerkt, dass noch genaue Prüfungen und Messungen an Polarisatoren verschiedener Construction vorzunehmen und zum Zwecke von Beobachtungen, die einen sehr scharfen dunkeln Streifen erfordern, neue Constructionen zu versuchen sein werden. Die diesbezüglichen Ergebnisse könnten auch in rein theoretischer Beziehung von Belang sein, indem man sie mit den Resultaten vergleicht, welche die einzelnen Lichttheorien auf Grund einer strengen Berechnung der Polarisationsart des Gesichtsfeldes der betreffenden Polarisatoren ergeben würden.

[1] Halle, 1863.

Fig. 3.

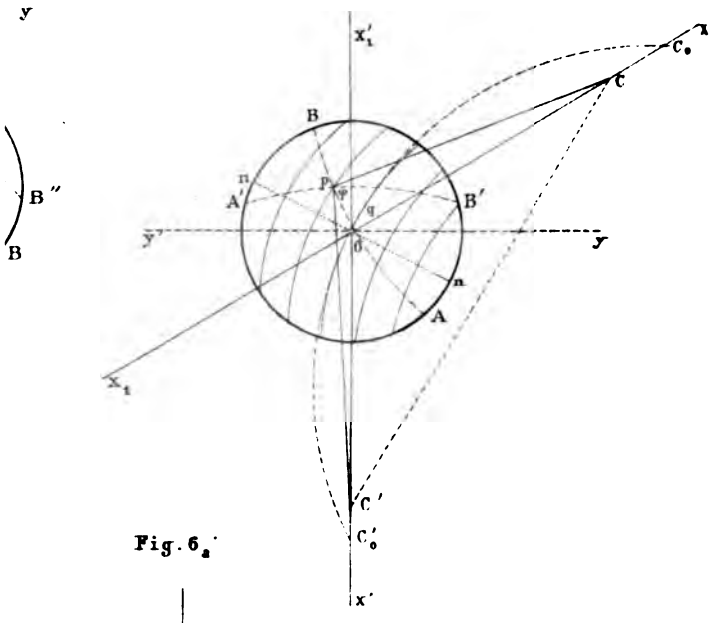


Fig. 6a.

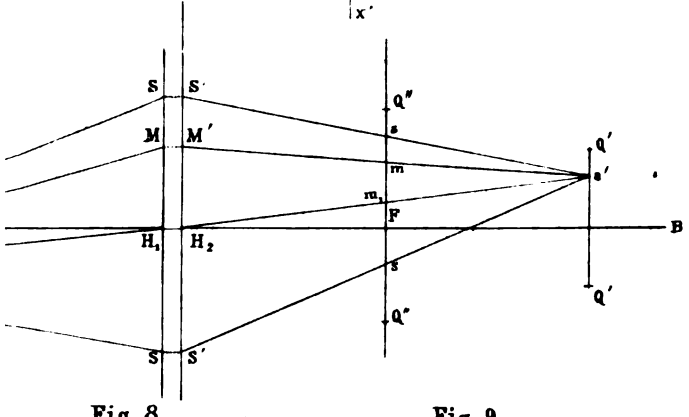


Fig. 8

Fig. 9.

Druck v. J. Wagner, Wien

Über die Tragkraft von ringförmigen Elektromagneten.

Von **A. Wassmuth** in Czernowitz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Jänner 1882.)

Es gibt bekanntlich nicht wenig Versuche, die zur Ermittlung der Abhängigkeit der Tragkraft eines Elektromagneten von seinem Magnetismus, respective von der einwirkenden magnetisirenden Kraft ausgeführt wurden. Die gefundenen Resultate der einzelnen Beobachter gehen indess weit auseinander. Während die einen die Tragkraft geschlossener Hufeisenmagnete proportional dem Quadrate des Magnetismus setzen und andere wenigstens ein viel höheres Verhältniss, wie das des Magnetismus selbst, annehmen, gelangt Siemens[1] zu dem Schlusse, dass die Tragkraft eines kurzen Ring- oder Röhrenmagnetes nahe proportional sei dem durch Induction gemessenen wirksamen Magnetismus. Diese Abweichung der einzelnen Beobachtungen findet ihre theilweise Erklärung in der Anwendung der verschiedensten Formen von Elektromagneten, wodurch auch im Allgemeinen eine stets andere Anordnung des in die Ferne wirkenden freien Magnetismus bedingt war. Stefan[2] hat unter Berücksichtigung derartiger Kräfte sowohl für einen Ringmagnet als auch für eine gleichförmig magnetisirte Kugel die Tragkraft berechnet und zugleich die Bedingungen für die Giltigkeit der abgeleiteten Formeln angegeben (cf. l. c. pag. 94); diesen Anforderungen entsprechen nahezu fünf aus einer Arbeit von Waltenhofen[3] entnommene Daten, die sich bis auf einen Proportionalitätsfactor gut an die aufgestellte Formel anschliessen.

[1] Siemens, Über Beiträge zur Theorie des Elektromagnetismus. Berl. Monatsb. Juni 1881, pag. 705.

[2] Stefan, Über die Tragkraft der Magnete. Sitzb. d. k. Akademie II. 81, pag. 89—116.

[3] Waltenhofen, Sitzb. d. k. Akad., LXI. Bd. II, 1870.

Bei dieser geringen Zahl von zum Vergleiche der Theorie mit dem Experimente brauchbaren Versuchen — die Untersuchungen von Siemens wurden mir erst im December 1881 bekannt — schien es mir wünschenswerth, genaue, auf absolute Messungen gegründete Beobachtungen durchzuführen und dabei die Versuche so anzuordnen, dass den Bedingungen der Theorie möglichst entsprechen wurde.

Diese Untersuchungen begannen im Mai 1881 und wurden, da sich grosse Abweichungen von der Theorie ergaben, bis in den Herbst fortgesetzt. Die Nichtübereinstimmung zwischen Rechnung und Erfahrung verschwindet, sobald man den von Stefan betrachteten idealen Fall den in der Praxis wirklich vorhandenen Verhältnissen anpasst; dieser so modificirten Theorie schliessen sich dann auch die Versuche von Siemens gut an.

I.

Zur Verwendung gelangten ausschliesslich Ringmagnete, d. h. kreisförmig gebogene Eisenkerne, die gleichmässig mit mehreren Lagen Draht umwickelt waren. Es treten dann bekanntlich bei der Magnetisirung keine freien Magnetismen auf, so dass schon durch geringe magnetisirende Kräfte ein bedeutendes Moment erzielt werden kann.

Jeder solcher Elektromagnet war durch einen Schnitt, der durch die Axe ging, in zwei möglichst gleiche Theile getheilt, so dass die eine Hälfte als Magnet, die andere als Anker verwendet werden konnte. Der letztere Theil war mit Hilfe eines gabelförmig gebogenen Drahtes aus Kupfer und einigen eingeschalteten Zwischengliedern in Verbindung mit einer Federwage, die durch eine starke, über eine Rolle gehende Schnur gespannt wurde und so den ausgeübten Zug erkennen liess.

Es gelang, beide Enden des Ankers fast gleichzeitig abzureissen. Die gegenüberstehenden Flächen waren sorgfältig eben geschliffen und polirt. An den Enden von Magnet und Anker waren kleine, umgebogene Messingbügel angelöthet, die es ermöglichten, mit den Windungen bis knapp an die Berührungsflächen heranzugehen. Auf diese Art durfte ich hoffen, den von der Theorie (Stefan l. c. pag. 94) geforderten Bedingungen möglichst gerecht zu werden. Es soll nämlich: „der Magnet und

Anker keinen freien Magnetismus enthalten, die Richtung der Magnetisirung senkrecht auf der angegebenen Berührungsfläche stehen und die Intensität der Magnetisirung in jedem Punkte dieser Fläche die gleiche sein."

Hinsichtlich des letzteren Punktes sei bemerkt, dass die radialen Dimensionen jedes Ringes sehr klein waren gegen den mittleren Radius des letzteren, so dass die magnetisirende Kraft, die bekanntlich der Entfernung von der Axe umgekehrt proportional ist, nur einen sehr kleinen Spielraum durchlaufen konnte. So war z. B. der zweite Ring absichtlich hoch und recht dünn genommen worden.

Es möge gleich hier bemerkt werden, dass dann (Stefan l. c. p. 93) unter der Voraussetzung der obigen Bedingungen die Tragkraft T im absoluten Masse gegeben ist durch die Formel:

$$T = 2\pi q \mu^2,$$

wenn μ das magnetische Moment der Volumseinheit und q die Summe beider Berührungsflächen vorstellt; durch Division mit $g = 9806$, der Beschleunigung der Schwere, erhält man T in Milligrammen.

Zur Bestimmung des Magnetismus, der Grösse μ, nach absolutem Masse [1] wurden einige Windungen eines zweiten Drahtes um den Anker herumgelegt und mit einem Spiegelgalvanometer von mässiger Dämpfung verbunden. Bei der Ummagnetisirung des Eisenringes entstand nun in diesen secundären Windungen ein inducirter Integralstrom, dessen Grösse sich aus dem mittelst Fernrohr und Skala gemessenen Ausschlage des Spiegels leicht ermitteln liess, da für das Galvanometer sowohl die Schwingungsdauer (4·75″) seines Magnetes und das logarithmische Decrement als auch der Reductionsfactor hinlänglich genau bekannt waren. Der magnetisirende Strom durchlief ausser den primären Windungen noch eine Tangentenboussole, wodurch es möglich wurde, die Stärke desselben ebenfalls nach absolutem Masse zu messen.

Es sei w der Widerstand des Drahtes, den der Integralstrom j zu durchlaufen hat, m_1 und m_2 die Zahl der Windungen

---

[1] Kirchhoff, Pogg. Annal. Ergänzungsband V, pag. 1. Stoletow, Pogg. Ann. B. CXLVI.

in der primären und secundären Spule, J die Stärke des magnetisirenden Stromes und $r^2\pi$ der Querschnitt des Eisenringes; ausserdem sollen mit L und L_1 zwei Integrale von der Form $\int\frac{df}{\rho}$ bezeichnet werden, worin df ein Flächenelement und ρ seine Entfernung von der Ringaxe vorstellt und L sich auf einen Querschnitt des Eisens, L_1 auf einen Querschnitt der primären Spule bezieht.

Die magnetisirende Kraft x, sowie die Magnetisirungsfunction $k=\frac{\mu}{x}$ sind dann bekanntlich gegeben durch:

$$x=\frac{2m_1JL}{r^2\pi}$$

$$k=\frac{\mu}{x}=\frac{w}{16m_1m_2L\pi}\cdot\frac{j}{J}-\frac{L_1}{4\pi L},$$

woraus sich also μ nach absolutem Masse bestimmen liess.

Nachstehend folgen die Untersuchungen mit einem Ringmagnet (I) vom Gewichte 81800 Mgr., für den sein mittlerer Radius zu 58·4 Mm. und der Durchmesser seiner kreisförmigen Endflächen zu 6 Mm. angenommen werden konnten; daraus berechnet sich die ganze Berührungsfläche zu 56·5 Qmm. Die Zahl der magnetisirenden Windungen war 961 (in vier Lagen), während die Zahl der Windungen für den Inductionsstrom 34 betrug. Die Tragkräfte T sind in Kilogrammen angegeben und ist, wie oben, $k=\frac{\mu}{x}$.

k	μ	T	$\frac{T.10^6}{\mu}$	$\frac{T.10^6}{\mu^2}$	T' berechnet	$T-T'$
28·94	532	0·10	188	0·35333	0·05	+0·05
34·95	746	0·12	161	0·21563	0·10	+0·02
38·41	959	0·13	136	0·14135	0·15	—0·02
42·42	1386	0·20	144	0·10412	0·28	—0·08
61·28	2564	0·55	215	0·08366	0·67	—0·12
73·49	3634	0·90	248	0·06815	0·98	—0·08
77·34	4703	1·20	255	0·05425	1·27	—0·07

k	μ	T	$\frac{T.10^6}{\mu}$	$\frac{T.16^6}{\mu^2}$	T' berechnet	$T-T'$
76·28	5987	1·85	309	0·05161	1·65	+0·20
76·26	7055	2·15	305	0·04320	1·99	+0·26
73·09	8123	2·55	314	0·03865	2·37	+0·18
63·56	8867	2·90	327	0·03688	2·65	+0·24
58·04	9610	3·15	328	0·03411	2·97	+0·18
53·05	10034	3·30	329	0·03278	3·15	+0·15
48·52	10670	3·45	323	0·03030	3·45	—
39·58	11409	3·70	324	0.02842	3·82	−0·12
33·27	11710	3·90	333	0·02844	3·97	−0·07
33·03	11923	4·00	335	0·02814	4·09	−0·09
26·95	12118	4·15	342	0·02826	4·19	−0·04
22·45	12415	4·25	342	0·02745	4·37	−0·12
19·17	12765	4·45	349	0·02731	4·55	−0·10
15·51	12882	4·65	361	0 02802	4·62	+0·03
14·07	13075	4·75	363	0·02778	4·73	+0·02

Construirt man die ziemlich regelmässig verlaufende Curve, für welche μ die Abscissen und k die Ordinaten vorstellen, so zeigt dieselbe die bekannte Form; für grössere μ nimmt sie die Gestalt einer geraden Linie an, welche die Abscissenaxe in einem Punkte $m = 14000$ trifft. Dieser Werth des Maximums von μ ist identisch mit dem von Stefan gegebenen.

Um das Maximum der Tragkraft T zu finden, construire man die Curve, bei der die Abscissen durch T und die Ordinaten durch k dargestellt werden. Sie schneidet die Abscissenaxe in einem Punkte $T_m = 5·45$.

Der Quotient $\frac{T}{\mu}$ ist, wie man aus der vierten Colonne ersieht, nicht constant, sondern ändert sich mit μ; er besitzt vor Eintritt des Wendepunktes — des grössten k — ein Minimum und nimmt dann stetig zu.

Das Verhältniss $\frac{T}{\mu^2}$ nimmt mit steigender Magnetisirung sehr schnell ab; nur für sehr hohe Werthe von μ steigt es ein wenig. Es wird gleich $\frac{2\pi q}{g} = \frac{113 \times \pi}{9806} = 0·0362$ für $\mu = 8867$, d. i. in unmittelbarer Nähe des Wendepunktes.

Die Werthe T' sind nach einer später zu erörternden Formel berechnet.

In viel schärfer ausgesprochener Weise liess sich das erwähnte Verhalten von $\frac{T}{\mu}$ und $\frac{T}{\mu^2}$ an einem zweiten Ringe (II) mit rechteckigem Querschnitte verfolgen. Derselbe war aus Walzeisen von der Dichte 7·69 hergestellt, sorgfältig zu einem Kreise mit dem inneren Radius $\rho_0 = 54{\cdot}1$ Mm. gebogen und bildeten die eben geschliffenen Berührungsflächen Rechtecke von 19·65 Mm. Höhe und 5·5 Mm. Breite, so dass der äussere Radius $\rho_1 = 54{\cdot}1 + 5{\cdot}5 = 59{\cdot}6$ Mm. betrug.

Die magnetisirende Kraft änderte sich also von innen nach aussen nur sehr wenig. Das Gewicht des feststehenden Magnetes, dessen nach oben gerichtete Endflächen in einer horizontalen Ebene lagen, betrug 149·31 Mgr. und das des Ankers 147·97 Mgr. Die primäre Spule für den magnetisirenden Strom wurde aus vier Lagen Draht von je $128+125$, $127+123$, $120+119$ und $118+111$, d. i. zusammen 971 Windungen gebildet, während für den Inductionsstrom sechzehn weitere, um die Mitte des Magnets gewickelte Windungen dazu kamen.

Ist φ der an der Tangentenboussole abgelesene Winkel und z die beobachtete Zahl der Millimeter an der Skala, so findet sich zur Berechnung von k und μ:

$$\log x = 2{\cdot}31\ 896 + \log \operatorname{tg} \varphi$$
$$\log (k + 0{\cdot}1529) = 0{\cdot}76101 - 1 + \log z - \log \operatorname{tg} \varphi.$$

k	μ	T	$\frac{T.10^6}{\mu}$	$\frac{T.10^6}{\mu^2}$	T' berechnet	$T-T'$
11·42	297	0·50	1686	5·6847	0·39	+0·11
13·35	416	0·55	1322	3·1786	0·55	0
16·61	715	0·85	1188	1·6617	0·81	+0·04
27·29	1674	1·30	777	0·4639	1·25	+0·05
27·43	2109	1·55	735	0·3484	1·40	+0·15
33·71	3351	2·05	612	0·1825	2·08	−0·03
34·71	4010	2·45	611	0·1524	2·56	−0·11
33·25	4727	3·10	656	0·1387	3·17	−0·07
31·46	5801	4·20	724	0·1248	4·28	−0·08

k	μ	T	$\frac{7.10^6}{\mu}$	$\frac{T.10^6}{\mu^2}$	T' berechnet	$T-T'$
30·42	6520	4·70	721	0·1106	5·12	—0·42
28·99	7176	6·40	892	0·1243	6·02	+0·38
27·82	8070	7·25	898	0·1113	7·35	—0·10
24·04	8422	8·20	974	0·1157	7·91	+0·29
20·39	8830	8·25	934	0·1058	8·60	—0·35
16·12	9469	9·00	951	0·1004	9·63	—0·63
14·73	10350	11·60	1120	0·1135	11·44	+0·16
11·58	10680	11·75	1100	0·1031	12·12	+0·37
8·34	11570	14·30	1236	0·1068	14 05	+0·25

Trägt man die Werthe von μ als Abscissen, die Werthe von $T, k, \frac{T}{\mu}$ als Ordinaten auf, so besitzt die Curve T eine ziemlich regelmässig verlaufende Form und ist, wenigstens für etwas höhere Werthe von μ, nach oben concav gekrümmt.

Die Quotienten $\frac{T}{\mu}$ zeigen deutlich ein Minimum in der unmittelbaren Nähe des Wendepunktes. Werden die Werthe von $\frac{\mu}{T}$ als Ordinaten aufgetragen, so erhält man eine krumme Linie, die einen ähnlichen Verlauf wie die Curve der k aufweist; es wächst $\frac{\mu}{T}$ etwas schneller als k. Man kann indess nicht mit Sicherheit behaupten, dass zu zwei gleichen, auf verschiedenen Seiten des Wendepunktes gelegenen Werthen von k auch gleiche Werthe von $\frac{\mu}{T}$ gehören; $\frac{\mu}{T}$ kann somit von k allein nicht abhängen.

Der Quotient $\frac{T}{\mu^2}$ beginnt bei kleinem μ mit einem hohen Werthe, fällt dann sehr rasch und erlangt in der unmittelbaren Nähe des Wendepunktes — bei der achten Beobachtung — jenen Werth, der der Gleichung

$$\frac{T}{\mu^2} = \frac{2\pi \times 216{\cdot}15}{9806} = 0{\cdot}1385$$

entspräche. Von da an sinkt $\frac{T}{\mu^2}$ nur langsam, um für sehr hohe Werthe von μ an wieder etwas zu steigen.

Die Curve $\frac{\mu^2}{T}$ hat eigenthümlicherweise dieselbe Form, wie jene, bei der x als Abscisse und μ als Ordinate gewählt wird. Es hängt daher $\frac{\mu^2}{T}$ von μ in ähnlicher Weise ab, wie μ von x; der letztere Zusammenhang ist z. B. durch die von Ruths gegebene Gleichung ausgedrückt, so dass man auf diese Art zu einer übrigens nicht schlecht stimmenden, empirischen Formel für T leicht gelangen kann. Ich unterlasse dieses, da, wie sich zeigen wird, auch die Theorie zu einer mit der Beobachtung übereinstimmenden Formel führt.

Das über das Verhalten der Quotienten $\frac{T}{\mu}$, $\frac{T}{\mu^2}$ Mitgetheilte findet seine Bestätigung in den Versuchen von Siemens (c. f. pag. 707); dabei waren μ und x nicht nach absolutem Masse gemessen, doch konnte wohl das Verhältniss des secundären Stromes zu dem primären Strome der Magnetisirungsfunction $k = \frac{\mu}{x}$ gleichgesetzt werden; zumal es übrigens auf die absoluten Werthe von k nicht ankam. So z. B. für das Eisenrohr I (Wandstärke = 2·3 Mm., Lichtweite = 10·8 Mm.

x	μ	k	T	$\frac{\mu}{T}$	$\frac{T}{\mu^2}$	T' berechnet	$T-T'$
23·0	30·2	1·313	10·3	2·92	0·011293	10·3	0
32·4	39·4	1·216	12·6	3·11	0·008116	12·3	+0·3
44·4	44·0	0·991	14·2	3·10	0·007335	13·7	+0·5
51·6	49·5	0·959	16·5	3·00	0·006734	15·8	+0·7
69·0	53·7	0·778	17·0	3·16	0·005895	17·9	−0·9
133·8	61·1	0·457	20·8	2·94	0·005572	22·5	−1·7
195·0	63·6	0·349	23·5	2·71	0·005810	24·4	−0·9
248·0	66·3	0·267	27·3	2·43	0·006211	26·7	+0·6
296·0	68·2	0·230	28·5	2·39	0·006127	28·5	0
343·0	69·5	0·203	31·5	2·21	0·006522	29·7	+1·8

Die Curve der k geht für die 4., 5., 6., 7. und 8. Beobachtung in eine Gerade über, welche die Abscissenaxe in einem Punkte $m = 72{\cdot}5$ trifft; die 9. und 10. Beobachtung zeigt das von Haubner[1] für ungemein hohe Werthe von μ bemerkte, nochmalige Umbiegen.

Analog vorgehend erhalte ich für das Maximum von T, d. i. für den zu m gehörigen Werth von T die Zahl $T_m = 36{\cdot}0$.

Für das Eisenrohr II (l. c. pag. 707) erhält man:

μ	44·7	78·1	86·5	101·1	100·8
k	2·6	2·5	2·1	1·5	1·46
T	11·6	20·1	25·0	61·0	59·8
$\frac{\mu}{T}$	3·85	3·89	3·46	1·66	1·66
$\frac{T}{\mu^2}$	0·0058	0·0033	0·0033	0·0059	

$m = 135$

und für das Eisenrohr III (l. c. 708):

μ	38·9	63·3	75·0	89·1	104
k	1·62	1·69	1·59	1·31	0·74
T	10·5	24·3	34·2	41·2	53·3
$\frac{\mu}{T}$	3·70	2·60	2·19	2·16	1·95
$\frac{T}{\mu^2}$	0·00694	0·00608	0·00608	0·00519	0·00493

$m = 124 \quad T_m = 69$ Kgr..

Für das kreisförmig gebogene Eisenrohr (pag. 709) wählte ich den, den fallenden μ entsprechenden Theil, da der aufsteigende Ast nicht sehr regelmässig verläuft. Ich erhielt:

μ	T	k	$\frac{\mu}{T}$	$\frac{T}{\mu^2}$	T' berechnet	$T - T'$
38·3	18·0	4·615	2	0·01227	18·2	−0·2
46·0	24·9	3·833	1·7	0·01177	23·0	+1·9
52·6	29·4	2·922	1·8	0·01063	28·4	+1·0
61·3	37·8	1·803	1·6	0·01006	38·0	−0·2
66·0	45·3	1·294	1·5	0·01040	44·6	+0·7
69·0	49·3	1·062	1·4	0·01035	49·3	0
77·4	65·2	0·423	1·2	0·01090	65·4	−0·2

$m = 82 \quad T_m = 73$ Klgr.

während Siemens (pag. 710) dafür 75 Klgr. annimmt.

[1] Haubner, Versuche über das magnetische Verhalten des Eisens. Sitzb. d. k. Akad. LXXXII. Bd., pag. 771.

Wie zu ersehen, findet das über das Verhalten der Quotienten $\frac{T}{\mu}$ und $\frac{T}{\mu^2}$ Gesagte auch in diesen Versuchen seine Bestätigung; dabei muss allerdings hervorgehoben werden, dass hier kleinere Werthe von μ, d. i. solche, die vor dem Wendepunkte liegen, nicht vorkommen. Der Wendepunkt tritt bekanntlich ein für ein μ, das nahe gleich $^1/_3 m$ ist. — Das Minimum von $\frac{T}{\mu^2}$ tritt nahe bei $\mu = 0{\cdot}8 \times m$ ein.

Zum Schlusse dieses experimentellen Theiles möge eine merkwürdige Erscheinung kurz besprochen werden. Befindet sich zwischen Anker und Magnet eine Glasplatte, so nimmt bekanntlich die Tragkraft sehr rasch mit der Dicke dieser Platte ab. Das Entgegengesetzte trat ein, sobald ich ein sehr dünnes Glimmerblättchen anwendete; es zeigte sich, dass dann bei schwächeren Magnetisirungen die Tragkraft bedeutend zunahm. Zu gleicher Zeit erreichte der inducirte Strom nahe jene Stärke, die dieser höheren Tragkraft entsprach, falls keine Zwischenlagen angewendet worden wären.

So stieg z. B. (Ring II) bei $\mu = 6520$ die Tragkraft von 4·7 auf 9·0 Kgr., während der Ausschlag des Spiegels von 545 auf 815 erhöht wurde; nach Wegnahme der Glimmerblättchen trat nach zweimaligem Stromwechsel der frühere Zustand wieder ein. Bei fortgesetzter Magnetisirung erhielt ich bei der Tragkraft 9·0 den Ausschlag 795.

Selbst bei den stärksten von mir angewandten Magnetisirungen zeigte sich eine, wenn auch geringere Zunahme der Tragkraft; der inducirte Strom nahm ebenfalls zu.

Die Erklärung dieser eigenthümlichen Erscheinung finde ich darin, dass durch das Einschieben der sehr dünnen Blättchen die Distanz der einwirkenden magnetischen Flächen zwar vergrössert wurde, dass aber auch die Dichte der auf diesen Flächen ausgeschiedenen freien magnetischen Massen bedeutend zugenommen hat. Ist also die Dicke der Zwischenlage nur hinreichend klein, so kann doch eine Verstärkung der ursprünglichen Tragkraft eintreten.

Man vergleiche übrigens die folgende Theorie. Das Wachsen des inducirten Stromes ist dann leicht zu deuten.

II.

Zu der Formel $T = \frac{2\pi q \mu^2}{g}$ gelangt man bekanntlich (Stefan pag. 93) dadurch, dass man sich den Ring in unendlich viele, unendlich nahe Querschnitte zerlegt denkt und die Anziehung von zwei solchen Flächen bestimmt. Bei einem wirklichen Versuche werden sich nun die Endflächen von Anker und Magnet nicht unmittelbar berühren, sondern sich in einer endlichen Distanz befinden; es wird auch nicht gestattet sein, die Einwirkung benachbarter Schichten auf die Berührungsflächen zu vernachlässigen. Da letztere im Allgemeinen so wirkt wie eine Vergrösserung der Distanz, so wird es klar, warum der Quotient $\frac{T}{\mu^2}$ vom Wendepunkte an kleiner ausfiel als $\frac{2\pi q}{g}$; es bleibt aber unerklärt, warum dieser Quotient für kleinere μ einen so bedeutend höheren Werth aufwies.

Ich gehe daher aus von der Annahme, dass der Ringmagnet aus magnetischen Platten von der endlichen Dicke D bestehe und D mit steigender Magnetisirung bis zu einem Maximum zunehme; die Distanz d von zwei solchen Platten zeigt dann das entgegengesetzte Verhalten, indem die Summe beider einer Constanten gleich sein muss. ($D + d = C$.)

Man braucht nur an die Theorie der drehbaren Molekularmagnete zu denken, um sofort einzusehen, wie wahrscheinlich die obige Annahme ist; bei fortgesetzter Magnetisirung müssen sich die magnetischen Axen der Molekule immer mehr der Richtung der magnetisirenden Kraft zuwenden. Diese Vorstellung bleibt auch aufrecht, wenn man die von Stefan[1] und neuerdings von Siemens[2] so plausibel gemachte Hypothese der astatischen Doppelmolekule beibehält.

---

[1] Stefan, Zur Theorie der magnetischen Kräfte. LXIX. Bd, p. 34 und 35.

[2] Siemens (l. c. pag 703).

Ist dann q der Querschnitt, σ die Dichte der darauf befindlichen magnetischen Massen, μ das magnetische Moment der Volumseinheit, so gilt die Gleichung:

$$\sigma D q = q\mu(d+D),$$

woraus sich

$$\sigma = \mu\left(1+\frac{d}{D}\right) \qquad 1)$$

ergibt. Wegen $d+D=C$ wird der Quotient

$$\frac{d}{D} = \frac{1}{\frac{C}{d}-1},$$

woraus man ersieht, dass dieser im Allgemeinen kleine Quotient mit wachsendem μ abnehmen muss, weil d unter dieser Voraussetzung kleiner wird.

Ich wähle für d die Form:

$$d = \frac{1}{a_1+b_1\mu^2}, \qquad 2)$$

wobei a_1 und b_1 positive Constanten vorstellen sollen; die Bedeutung derselben tritt mehr hervor, wenn $\mu = 0$ und $\mu = m$ gesetzt wird.

Die Entfernung d von zwei im Innern gelegenen magnetischen Platten ist nicht zu verwechseln mit der Distanz δ der Berührungsflächen von Anker und Magnet; letztere muss bei starken Magnetisirungen mit wachsender Anziehungskraft abnehmen, da dann die Flächen viel stärker aneinander gepresst werden. Man wird daher

$$\delta = a_0 - b_0\mu^2 \qquad 3)$$

setzen müssen, worin a_0 und b_0 positive Constanten vorstellen.

Wegen des endlichen Werthes von δ wurde es nun nöthig, die Anziehung A von zwei gleich grossen, parallelen Flächen desselben Cylinders in endlicher, wenn auch sehr kleiner Entfernung u zu bestimmen. Ist q der kreisförmige Querschnitt vom Radius R, σ die Dichte der Belegung, so erhalte ich mit Hilfe einer etwas umständlichen Reihenentwicklung

$$A = 2\pi q\sigma^2\left[1-\frac{7}{6}\frac{u}{R}+\frac{2}{3}\frac{u^3}{R^3}\right], \qquad 4)$$

wobei der Coëfficient des dritten Gliedes noch etwas unsicher blieb.

Man denke sich nun durch die Mitte von δ den trennenden Schnitt gelegt, bezeichne mit $n_1 s_1$, $n_2 s_2$, ... die magnetischen Platten des Magnetes und ebenso mit $s'n'$, $s''n''$, ... die des Ankers und ermittle die resultirende Anziehung.

Die Kraft, mit der die Fläche s' des Ankers von der Fläche n_1 des Magnetes angezogen wird, ist mit hinreichender Näherung:

$$A_0 = 2\pi q\sigma^2[1 - \frac{7}{6}\frac{\delta}{R}].$$

Dazu kommt die Abstossung A_1 zwischen der Fläche n_1 und dem kleinen Magnete $n's''$ und ebenso die gleiche und gleich gerichtete Abstossung A' zwischen s' und $s_1 n_2$; die Distanz u ist in beiden Fällen gleich $\delta + D + \frac{d}{2}$. Setzt man in der Gleichung 4) einmal $u - \frac{d}{2}$, dann $u + \frac{d}{2}$, so erhält man durch Subtraction:

$$A_1 = A' = -\frac{7}{6}\frac{d}{R}.2\pi q\sigma^2,$$

wo ebenfalls das höhere Glied weggelassen wurde.

Die Anziehung zwischen den Magneten $s''n'$ und $s_1 n_2$ verschwindet gegen die oben angegebenen Werthe. Die Betrachtung der Wirkung noch weiter gelegener Querschnitte hielt ich nicht für nothwendig.

Die Kraft T, mit der der Anker gegen den Magnet gedrückt wird, ist somit gegeben durch die Gleichung:

$$T = A_0 + 2A_1 = 2\pi q\sigma^2[1 - \frac{7}{6}\frac{\delta+2d}{R}] = 2\pi q\mu^2(1+\frac{d}{D})^2 [1 - \frac{7}{6}\frac{\delta+2d}{B}].$$

Hiefür kann wegen der Kleinheit von $\frac{d}{D}$ auch geschrieben werden:

$$T = 2\pi q\mu^2[1 + 2\frac{d}{D} - \frac{7}{6}\frac{\delta+2d}{R}].$$

Da sich d analog wie δ verhält, so muss $\frac{7}{6}\frac{\delta+2d}{R}$ die Form $a_2 - b_2\mu^2$ annehmen, wenn a_2 und b_2 positive Constanten vorstellen; ferner wird

$$2\frac{d}{D} = \frac{1}{{}^1/_2(Ca_1-1)+{}^1/_2Cb_1\mu^2} = \frac{1}{a+b\mu^2},$$

so dass also

$$T = 2\pi q\mu^2\left[1-a_2+b_2\mu^2+\frac{1}{a+b\mu^2}\right]$$

resultirt.

Diese Gleichung hat die Form

$$T = \mu^2(\alpha+\varepsilon\mu^2+\frac{1}{\beta+\gamma\mu^2}) \qquad 5)$$

wenn

$$2\pi q(1-a_2) = \alpha,\ 2\pi qb_2 = \varepsilon,\ \frac{a}{2\pi q} = \beta \text{ und } \frac{b}{2\pi q} = \gamma$$

gesetzt wird.

Sind die Tragkräfte nicht sehr hoch, wie z. B. bei den von mir untersuchten Ringmagneten, so kann ohne merklichen Fehler $\varepsilon = 0$ genommen werden; der Quotient $\frac{T}{\mu^2}$ nimmt dann mit wachsendem μ ab. Für die viel kräftigeren Elektromagnete von Siemens erhält ε einen sehr kleinen, aber endlichen Werth. Der Ausdruck

$$\frac{T}{\mu^2} = \alpha+\varepsilon\mu^2+\frac{1}{\beta+\gamma\mu^2}$$

wird, den Beobachtungen entsprechend, für sehr hohe Werthe von μ ein Minimum; man findet, dass dies für $\beta+\gamma\mu^2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\varepsilon}}$ eintritt, was wegen des sehr kleinen ε auf ein hohes μ schliessen lässt.

Der Quotient $\frac{T}{\mu}$ zeigt ebenfalls ein den Versuchen entsprechendes Verhalten. Ist ε, wie bei meinen Ringmagneten, nahe gleich Null, so findet man die Stelle μ_1 des Minimums aus der Gleichung:

$$\gamma\mu_1^2 = -\beta+\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\alpha}\sqrt{1-8\alpha\beta},$$

wofür mit hinreichender Näherung $\gamma\mu_1^2 = \frac{1}{\alpha} - 3\beta$ genommen werden kann; auch muss $\gamma\mu_1^2 > 3\beta$ sein.

Die Grösse β ist nur bei sehr kleinen Werthen von μ von Einfluss; ich nahm daher zuvörderst $\beta = 0$, bestimmte für die beiden Ringe I und II aus einigen Beobachtungen α und γ und berechnete nachträglich β aus den ersten Beobachtungen.

Für den Ring I fand ich, wenn noch $\mu = 10^3 . \nu$ gesetzt wurde, $\alpha = 0{\cdot}022$, $\beta = 6$, $\gamma = 1$ und $\varepsilon = 0$ und rechnete die Tragkraft T' in Kilogrammen nach der Gleichung:

$$T' = 0{\cdot}022 . \nu^2 + \frac{\nu^2}{6 + \nu^2},$$

wofür für grössere ν geschrieben werden kann

$$T' = 0{\cdot}022 . \nu^2 + 1 - \frac{6}{\nu^2}.$$

Der Werth von β ist etwas unsicher; doch stimmen, wie aus der Tafel pag. 330 u. 331 zu ersehen, die Rechnung und die Beobachtung ziemlich überein.

Für den zweiten Ring rechnete ich die Tragkräfte T' nach der Formel

$$T' = 0{\cdot}0975 . \nu^2 + \frac{\nu^2}{0{\cdot}15 + \nu^2}$$

und zeigt die Tabelle auf Seite 332 u. 333 die befriedigende Übereinstimmung von T und T'; die Abweichungen $T - T'$ liegen weit unter den Beobachtungsfehlern und wechseln wiederholt das Zeichen. Das berechnete Minimum von $\frac{T}{\nu}$ fällt an die Stelle $\nu = 2{\cdot}9$, während die Zeichnung $\nu = 3{\cdot}6$ ergibt.

Für die Maximalwerthe der Tragkräfte ergeben sich in den beiden Fällen die Zahlen 5·3 und 19·2 Klgr., während die Zeichnungen die Werthe 5·45 und 19·0 lieferten.

Weitere Folgerungen an die aufgestellten Formeln hinsichtlich der Grössen von δ und d anzustellen, halte ich noch für unthunlich, da sich selbst beim Ringe II trotz aller Sorgfalt die gegenüber liegenden Flächen von Anker und Magnet nie voll-

ständig deckten; die sich wirklich berührenden Flächen waren demnach nicht allein kleiner als q, sondern es musste überdies eine Vergrösserung von a_2 eintreten.

Da die Versuche von Siemens schon oberhalb des Wendepunktes lagen, so konnte ohne weiters $\beta = 0$ genommen werden, so dass

$$T = \lambda + \alpha\mu^2 + \varepsilon\mu^4$$

wird, wenn der Kürze wegen $\frac{1}{\gamma} = \lambda$ gesetzt ist.

Die Constanten wurden in der Art bestimmt, dass dieselben unter Berücksichtigung der Lage des Minimums von $\frac{T}{\mu^2}$ aus mehreren Gleichungen ermittelt wurden.

Die Beobachtungen am Eisenrohre I werden, wie aus der Tafel auf Seite 334 zu ersehen ist, gut wiedergegeben durch die Formel:

$$T' = 8{\cdot}38 + 0{\cdot}001627 . \mu^2 + \frac{0{\cdot}578}{10^6}\mu^4.$$

Zur Berechnung der Versuche mit dem kreisförmig gebogenen Eisenrohre (Siemens l. c. pag. 709) benützte ich die Gleichung:

$$T' = 9{\cdot}94 + 0{\cdot}004455.\mu^2 + 0{\cdot}0000008017.\mu^4,$$

wobei die Coëfficienten einfach aus drei Gleichungen ermittelt wurden. Wie die Tafel auf Seite 335 erkennen lässt, stimmen Rechnung und Beobachtung auch in diesem Falle in befriedigender Weise überein; für das Maximum $m = 82$ ergibt diese Formel den Werth 76·1 Klgr., während Siemens dafür 75 Klgr. annimmt.

Die Rotationsschwingungen flüssiger Cylinder.

Von **Max Margules.**

1. Sei eine incompressible Flüssigkeit von zwei conaxialen Cylindern begrenzt, welche um die Axe rotirend schwingen, mit in geometrischer Progression abnehmenden Amplituden; jeder axiale Cylinder der Flüssigkeit rotirt wie eine starre Fläche. Haben beide Wände gleiche Schwingungsdauer und gleiches Decrement, so sind auch Periode und Decrement der Oscillationen im Zwischenraum dieselben. Zur Darstellung dieser Flüssigkeitsbewegung findet man einen Ausdruck der Winkelgeschwindigkeit, welcher vier unbestimmte Constante enthält als Coëfficienten von vier aus den Bessel'schen Functionen erster Ordnung abgeleiteten Transcendenten, welche mit F, G, f, g bezeichnet und vorerst nach steigenden Potenzen des dem Radius proportionalen Argumentes entwickelt werden. Schwingen die Wände nach dem Sinusgesetze mit verschiedener Dauer und verschiedenem Decrement, so wird die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit dargestellt durch die Summe zweier Ausdrücke der beschriebenen Art. Es können auch Summen von mehreren solchen Ausdrücken benützt werden, um die aperiodische Bewegung der Flüssigkeit zu beschreiben, wenn die Bewegung jeder Wand zusammengesetzt ist aus mehreren Rotationsschwingungen mit verschiedenen Perioden und Decrementen. Man kann schliesslich jede rotirende Bewegung der Wände ansehen als zusammengesetzt aus unendlich vielen Rotationsschwingungen mit constanten Amplituden und man kann sonach die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeitscylinder angeben für beliebige rotirende Bewegungen der Grenzen.

Die in den Formeln vorkommenden Transcendenten sollen untersucht werden mit Beziehung auf die einfachsten Fälle.

2*a*). Constante Schwingungen der Flüssigkeit innerhalb eines rotirend schwingenden Cylinders: Nur F, G erscheinen im Ausdruck der Winkelgeschwindigkeit. Die Amplituden nehmen vom Rand gegen die Axe hin ab, um so schneller, je grösser das Argument der Functionen, d. h. je grösser der Radius und die Dichte, je kleiner die Periode und der Reibungscoëfficient sind. Die Strecken des Radius, welche gleichen Phasendifferenzen entsprechen, sind in der Nähe der Axe variabel, nehmen mit wachsendem Argument von F, G ab und nähern sich rasch einer constanten Grenze. Wird die Strecke des Radius, welche zwischen zwei nächsten Cylindern von gleicher Phase liegt, eine Wellenlänge genannt, so gibt es in einem schwingenden Cylinder von genügend grossem Radius in einiger Entfernung von der Axe Wellen von constanter Länge, welche für Wasser von 10° C. 4·04 Mm. beträgt, wenn die Schwingungsdauer 1 Secunde ist.

2*b*). Abnehmende Schwingungen in einem Cylinder: Als Beispiel wird der Fall behandelt, in welchem das logarithmische Decrement 2π ist. Die Strecken, welche gleichen Phasendifferenzen entsprechen, nehmen von der Axe aus bald ab bald zu, nähern sich aber gleichfalls sehr rasch einer festen Grenze, welche unter sonst ähnlichen Umständen kleiner ist, als bei constanten Schwingungen. Für Wasser beträgt die Wellenlänge unter sonst gleichen Verhältnissen wie oben nur 2·60 Mm.

3. Es werden Beispiele für die schwingende Flüssigkeitsbewegung zwischen zwei conaxialen Cylindern berechnet, wozu alle vier Functionen F, G, f, g herangezogen werden müssen, und zwar wird als erstes Exempel die Bewegung zwischen einer schwingenden und einer ruhenden und dann diejenige zwischen zwei schwingenden Wände behandelt, welche starr verbunden sind.

4. Die Integration der für die Winkelgeschwindigkeit geltenden Differentialgleichung wird neuerdings durchgeführt, indem die Coëfficienten der periodischen Functionen nach fallenden Potenzen des dem Radius proportionalen Argumentes geordnet werden. Man erhält im Ausdruck, welcher für einfache Rotationsschwingungen gilt, vier halbconvergente Reihen, welche sich aus den entsprechenden Formen der Bessel'schen Functionen, wie sie zum Theile schon von Poisson und Jacobi entwickelt worden sind und deren Restglied Herr Lipschitz untersucht

hat, ableiten lassen. Der neue Ausdruck wird benützt, um allgemein zu beweisen, was vorhin an Beispielen hervortrat, dass sich die Wellenlängen einfacher Schwingungen mit wachsendem Radius festen Grenzen nähern und dass die Grenze mit wachsendem Decrement abnimmt, gleich wie bei ebenen Transversalschwingungen.

Ein Theil der Formeln des ersten Abschnittes ist schon enthalten in der Abhandlung „Ueber die Bestimmung des Reibungs- und Gleitungscoëfficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit.“ (Sitzungsber. B. 83. 1881). Aus dieser Abhandlung ist zu ersehen, dass durch die Annahme, die Flüssigkeit hafte an den Wänden, hier keine Beschränkung eingeführt wird. Findet Gleitung statt, so ist in Folgendem überall statt Wand zu setzen: die Grenzschicht der Flüssigkeit.

1.

Die Flüssigkeit sei von einem Cylinder oder von zwei coaxialen Cylindern begrenzt und sie werde dadurch in Bewegung erhalten, dass die Wände Rotationsschwingungen um ihre Axe ausführen. Es wird angenommen, dass die Flüssigkeit incompressibel ist, dass im ganzen von ihr erfüllten Raum die ihre Bewegung bestimmenden Grössen endlich und stetig bleiben, dass sie an den Wänden haftet, dass die Schwingungen der Wände nach dem Sinusgesetze geschehen und dass deren Amplituden in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit wächst um die einfache, zweifache, .. n-fache Schwingungsdauer. Ein specieller Fall, der ausführlicher behandelt werden soll, ist derjenige, in welchem die Amplituden constant bleiben.

Die Bewegung der Flüssigkeit ist eine ebene; in allen Ebenen senkrecht zur Axe der Cylinder sind die Bewegungen congruent. Man wähle eine solche Fläche als xy — Ebene mit dem Anfangspunkt in der Axe und nenne u, v die Geschwindigkeitscomponenten parallel den x, y. Die Continuitätsgleichung ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Man gehe nun zum Polarcoordinatensystem ρ, ϑ über, welches mit dem früheren verbunden ist durch die Relationen

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \vartheta = \text{arc tan}\frac{y}{x}$$

Die radiale und die transversale Geschwindigkeitscomponente seien bezeichnet ω, φ; so dass

$$u = \omega\frac{x}{\rho} - \varphi\frac{y}{\rho}, \qquad v = \omega\frac{y}{\rho} + \varphi\frac{x}{\rho}$$

Man bemerkt, dass gemäss unserer Annahme über die Art der Bewegung ω und φ von ϑ unabhängig sind; in einem axialen Kreise hat kein Punkt vor dem andern eine bevorzugte Lage.

Die Continuitätsgleichung geht über in:

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial\rho} = o, \qquad \text{woraus } \omega = \frac{\psi(t)}{\rho}$$

An der Wand oder an beiden Wänden muss $\omega = o$ sein, daher $\psi(t) = o$ und $\omega = o$ innerhalb der ganzen Flüssigkeit. Daraus folgt, dass sich jeder axiale Cylinder in der Flüssigkeit wie eine starre Fläche bewegt (von der sogenannten Wirbelbewegung abgesehen, vermöge deren sich die Theilchen in sich selbst drehen).

Man behält nur übrig

$$u = -\varphi\frac{y}{\rho}, \qquad v = \varphi\frac{x}{\rho}$$

Setzt man diese Werthe ein in die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \varkappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \varkappa\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

worin t die Zeit bezeichnet, ferner $\Pi = V - \frac{p}{\mu}$ gesetzt ist und $\varkappa = \frac{k}{\mu}$, V das Kräftepotential bedeutet, p den Druck mit Ausschluss des den Reibungscoëfficienten k enthaltenen Theiles, μ die Dichte; beachtet man auch, dass Π die Coordinate ϑ nicht enthalten darf, wenn, wie wir annehmen, das Kräftepotential eindeutig ist, so erhält man die Bewegungsgleichungen im System der Polarcoordinaten:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = -\frac{\varphi^2}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varkappa\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{\varphi}{\rho^2}\right)$$

Diese zwei Gleichungen sind miteinander vereinbar, wenn

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = 0$$

Wir haben uns nun zu beschäftigen mit der Integration der Gleichung

(1) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{\varphi}{\rho^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Nimmt man ein particuläres Integral an in der Form

(1a) $$\varphi = e^{-\alpha \varkappa t} \cdot A(\rho),$$

so ist zu integriren die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dA}{d\rho} + \left(\alpha - \frac{1}{\rho^2}\right) A = 0$$

oder die Gleichung

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA}{dr} + \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) A = 0$$

wenn man setzt $r = \sqrt{\alpha} \cdot \rho$. Dies ist die Bessel'sche Differentialgleichung von der Ordnungszahl 1 und ihr Integral ist

$$A = CJ^1(r) + D\,Y^1(r)$$

wo J^1 und Y^1 die wohlbekannten Cylinderfunctionen erster und zweiter Art von der Ordnung 1 sind.

Wir betrachten vorerst das particuläre Integral $CJ^1(r) = CJ^1(\sqrt{\alpha}\rho)$

Setzt man $(i = \sqrt{-1},\ \cos 2\lambda > 0)$

(2) $$\alpha = a + bi = m^2 e^{2\lambda i}, \quad \sqrt{\alpha} = m e^{\lambda i}$$

wobei das Vorzeichen auf der rechten Seite der letzten Gleichung nach Belieben gewählt werden kann, so ist nach der bekannten Reihenformel für J^1

$$CJ^1(m\rho e^{\lambda i}) = C\frac{m\rho e^{\lambda i}}{2}\left[1-\frac{m^2\rho^2}{2.4}e^{2\lambda i}+\frac{m^4\rho^4}{2.4.4.6}e^{4\lambda i}-\ldots\right]$$
$$= C(M+iN)$$

worin $$C = Cme^{\lambda i}$$

$$M = \frac{\rho}{2}\left[1-\frac{m^2\rho^2}{2.4}\cos 2\lambda+\frac{m^4\rho^4}{2.4.4.6}\cos 4\lambda-..\right]$$

$$N = \frac{\rho}{2}\left[-\frac{m^2\rho^2}{2.4}\sin 2\lambda+\frac{m^4\rho^4}{2.4.4.6}\sin 4\lambda-..\right]$$

Man erhält so aus (1 *a*) das particuläre Integral

$$\varphi = C(M+iN)\,e^{-axt}(\cos bxt - i\sin bxt)$$

Nimmt man die willkürliche Constante C reell, so folgen die zwei Lösungen, welche dem reellen und dem imaginären Theile des letzten Ausdrucks rechts entsprechen:

$$\varphi = C\,e^{-axt}(M\cos bxt + N\sin bxt)$$

oder $$\varphi = C\,e^{-axt}(N\cos bxt - M\sin bxt)$$

welche zusammengefasst werden können in dem particulären Integrale

$$(3)\qquad \varphi = e^{-axt}\left[(c_1M+c_2N)\cos bxt+(c_1N-c_2M)\sin bxt\right]$$

worin c_1, c_2 willkürliche Constanten sind.

Jedes der drei particulären Integrale ist geeignet, die Bewegung der Flüssigkeit innerhalb eines Cylinders darzustellen, welcher rotirend schwingt mit Amplituden von constantem logarithmischen Decrement. Denn man sieht, dass jeder axiale Cylinder in der Flüssigkeit, also auch die Grenzschicht Schwingungen von gleicher Dauer und gleichem Decrement ausführt; die verfügbare Constante kann man benützen, um die Amplitude der Wand für eine gegebene Zeit festzusetzen. Will man auch über die Phase verfügen, so muss man in den beiden ersten Formen den Zeitpunkt, von welchen an t gezählt wird, als unbestimmt ansehen, während die dritte Form auch die Phase unmittelbar festzustellen gestattet.

Sollen jedoch an zwei Wänden Bedingungen erfüllt werden, soll beispielshalber ein Cylinder mit gegebener constanter Am-

plitude in der Flüssigkeit schwingen, welche von einem zweiten ruhenden Cylinder begrenzt ist, so reicht auch die letzte Form für die Lösung der Aufgabe nicht aus. Denn die zweite Bedingung würde erfordern, dass

$$c_1 M + c_2 N = o \qquad c_1 N - c_2 M = o$$

für den Werth von ρ, welcher dem ruhenden Cylinder angehört; im Allgemeinen kann aber die Constante $\frac{c_1}{c_2}$ nicht so gewählt werden, um beiden Gleichungen zu genügen. Wir müssen also das zweite Paar particulärer Integrale heranziehen, welches sich aus der Bessel'schen Function zweiter Art Y^1 ergibt. Man hat

$$Y^1(r) = J^1(r) \lg r - \frac{1}{r} + a_3 r^3 - a_5 r^5 + \ldots + (-1)^{n+1} a_{2n+1} r^{2n+1} + \ldots$$

worin:

$$a_3 = \frac{\frac{3}{2.4}}{2.4}, \quad a_5 = \frac{\frac{3}{2.4} + \frac{5}{4.6}}{2.4.4.6}, \quad \ldots a_{2n+1} = \frac{\frac{3}{2.4} + \frac{5}{4.6} + \frac{7}{6.8} + \ldots + \frac{2n+1}{2n.2n+2}}{2.4 \ldots 2n.4.6 \ldots 2n+2}$$

Beachtet man, dass $r = m\rho e^{\lambda i}$, so folgt, wenn h eine ganze Zahl bedeutet.

$$DY^1(m\rho e^{\lambda i}) = D.me^{\lambda i}\left[(M + iN)\left\{\lg(m\rho) + i(\lambda + 2h\pi)\right\} - \frac{1}{m^2\rho} e^{-2\lambda} + a_3\rho^3 m^3 e^{3\lambda i} - a_5\rho^5 m^5 e^{5\lambda i} + \ldots\right]$$

$$= D'\rho\left[\frac{M}{\rho}\lg(m\rho) - \frac{N}{\rho}(\lambda + 2h\pi) - \frac{\cos 2\lambda}{m^2\rho^2} + a_3 m^2\rho^2 . \cos 2\lambda - a_5 m^4\rho^4 \cos 4\lambda \ldots\right]$$

$$+ iD'\rho\left[\frac{N}{\rho}\lg(m\rho) + \frac{M}{\rho}(\lambda + 2h\pi) + \frac{\sin 2\lambda}{m^2\rho^2} + a_3 m^2\rho^2 \sin 2\lambda - a_5 m^4\rho^4 \sin 4\lambda + \ldots\right]$$

Die Coëfficienten von D' und iD' im letzten Ausdruck kann man analog den früheren M, N mit M', N' bezeichnen. Man wird M', N' vereinfachen, wenn man bemerkt, dass die Summanden $-$ Const. N, $+$ Const. M zu einem schon bekannten particulären

Integrale führen, also weggelassen werden dürfen. Ferner darf man statt $M lg(m\rho)$ und $N lg(m\rho)$ schreiben $M lg\left(\frac{m\rho}{2}\right)$ und $N lg\left(\frac{m\rho}{2}\right)$, weil durch die Subtraction von $M lg\ 2$, $N lg\ 2$ wieder nur eine bekannte particuläre Lösung der Gleichung (1) abgezogen wird.

Wir geben also den M' N' folgende Form:

$$M' = \rho\left[\frac{M}{\rho}\lg\left(\frac{m\rho}{2}\right) - \frac{\cos 2\lambda}{(m\rho)^2} + a_3(m\rho)^2\cos 2\lambda - a_5(m\rho)^4\cos 4\lambda + .\right]$$

$$N' = \rho\left[\frac{N}{\rho}\lg\frac{m\rho}{2} + \frac{\sin 2\lambda}{(m\rho)_2} + a_3(m\rho)^2\sin 2\lambda - a_5(m\rho)^4\sin 4\lambda + .\right]$$

Das dem Ausdruck (3) entsprechende particuläre Integral, welches aus Y^1 abgeleitet wird, ist sonach:

$$(4)\quad \varphi = e^{-axt}\left[(c_3M' + c_4N')\cos bxt + (c_3N' - c_4M')\sin bxt\right].$$

Es sollen auch einige neue Bezeichnungen eingeführt werden. Statt der Geschwindigkeit φ wollen wir in Zukunft immer die Winkelgeschwindigkeit

$$(5)\qquad \chi = \frac{\varphi}{\rho}$$

in Betracht ziehen. Demgemäss wird bestimmt

$$2\frac{M}{\rho} = F,\ 2\frac{N}{\rho} = G,\ \frac{M'}{\rho} = f,\ \frac{N'}{\rho} = g.$$

Die Differentialgleichung für χ ist gemäss (1)

$$(6)\qquad \frac{\partial^2\chi}{\partial\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial\rho} - \frac{1}{x}\frac{\partial\chi}{\partial t} = o.$$

und ein Integral, welches einer speciellen Art der Bewegung entspricht, ist

$$(I)\quad \chi = e^{-axt}\left[(c_1F + c_2G + c_3f + c_4g)\cos bxt + (c_1G - c_2F + c_3g - c_4f)\sin bxt\right]$$

worin:

$$(7)\quad \begin{cases} F = 1 - \dfrac{x^2}{1!2!}\cos 2\lambda + \dfrac{x^4}{2!3!}\cos 4\lambda - \dfrac{x^6}{3!4!}\cos 6\lambda + \ldots \\ G = -\dfrac{x^2}{1!2!}\sin 2\lambda + \dfrac{x^4}{2!3!}\sin 4\lambda - \dfrac{x^6}{3!4!}\sin 6\lambda + \ldots \\ f = \dfrac{1}{2}F\lg x - \dfrac{\cos 2\lambda}{4x^2} + \dfrac{\frac{3}{2\cdot 4}}{1!2!}x^2\cos 2\lambda - \dfrac{\frac{3}{2.4}+\frac{5}{4.6}}{2!3!}x^4\cos 4\lambda + \ldots \\ g = \dfrac{1}{2}G\lg x + \dfrac{\sin 2\lambda}{4x^2} + \dfrac{\frac{3}{2.4}}{1!2!}x^2\sin 2\lambda - \dfrac{\frac{3}{2.4}+\frac{5}{4.6}}{2!3!}x^4\sin 4\lambda + \ldots \end{cases}$$

Hier, wie auch in den folgenden Abschnitten ist gesetzt

$$(8)\quad x = \frac{m\rho}{2} = \frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{4\pi^2+\Delta^2}}{\varkappa T}}$$

Bestimmt man von vornherein, dass χ die Form habe

$$e^{-\alpha x t}\,(\mathfrak{F}(\rho)\cos b\varkappa t + \mathfrak{G}(\rho)\sin b\varkappa t)$$

so hat man für $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ die simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\mathfrak{F}}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{d\mathfrak{F}}{d\rho} + a\mathfrak{F} - b\mathfrak{G} = 0$$
$$\frac{d^2\mathfrak{G}}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{d\mathfrak{G}}{d\rho} + a\mathfrak{G} + b\mathfrak{F} = 0$$

Eliminirt man $\mathfrak{G}$ aus der ersten Gleichung, so erhält man eine Differentialgleichung vierter Ordnung für $\mathfrak{F}$, daher die vier Constanten im allgemeinen Integral von $\mathfrak{F}$. Dass im Ausdrucke von $\mathfrak{G}$ dieselben Constanten erscheinen müssen, folgt aus dem Zusammenhange, welchen die simultanen Gleichungen zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ feststellen.

Nach dem Integral (6) schwingt jeder axiale Cylinder der Flüssigkeit mit gleicher Schwingungsdauer

$$(9)\quad T = \frac{2\pi}{b\varkappa} = \frac{2\pi}{m^2\sin 2\lambda\,.\,\varkappa}$$

und mit gleichem logarithmischen Decrement

$$(9a) \qquad \Delta = 2\pi\frac{a}{b} = \frac{2\pi}{\tan 2\lambda}$$

Jenes Integral kann also nur benützt werden zur Bestimmung der Flüssigkeitsbewegung, wenn die beiden cylindrischen Wände rotirend schwingen mit gleicher Schwingungsdauer und in gleichem Verhältnisse abnehmenden Amplituden. Aber auch die Aufgabe, die Bewegung zu bestimmen, wenn die Wände mit verschiedener Schwingungsdauer und verschiedenem Decremente oscilliren, lässt sich leicht lösen, weil die Differentialgleichung für χ linear ist, also die Summe particulärer Integrale wieder eine Lösung ist.

Man schreibe

$$\begin{aligned}\chi = {} & e^{-axt}[(c_1F + c_2G + c_3f + c_4g)\cos bxt \\ & + (c_1G - c_2F + c_3g - c_4f)\sin bxt] \\ + {} & e^{-a'xt}\ [(c_1'F + c_2'G + c'_3f + c_4'g)\cos b'xt \\ & + (c_1'G - c_2'F + c_3'g - c_4'f)\sin b'xt]\end{aligned}$$

Soll nun die Wand 1 die Schwingungsdauer T_1 und das Decrement Δ_1 haben, die Wand 2 T_2 und Δ_2, so wähle man

$$b = \frac{2\pi}{xT_1}\ ,\ b' = \frac{2\pi}{xT_2}\ ,\ a = \frac{\Delta_1}{xT_1}\ ,\ a' = \frac{\Delta_2}{xT_2}$$

Bezeichnen $F_1G_1f_1g_1$ die Werthe von $F..g$ an der Wand 1 und haben $F_2..g_2$ eine ähnliche Bedeutung für die Wand 2, dann sind die Integrationsconstanten so zu bestimmen, dass

$$\begin{array}{l|l} c_1'F_1 + c_2'G_1 + c_3'f_1 + c_4'g_1 = o & c_1F_2 + c_2G_2 + c_3f_2 + c_4g_2 = o \\ c_1'G_1 - c_2'F_1 + c_3'g_1 - c_4'f_1 = o & c_1G_2 - c_2F_2 + c_3g_2 - c_4f_2 = o \end{array}$$

Da man in jedem Paar von Gleichungen noch über zwei Constante verfügt, so kann man diese entsprechend wählen, damit den die Elongation und die Phase betreffenden Bedingungen für eine bestimmte Zeit genügt werde. Ist T_1 ein ganzes Vielfaches von T_2, so ist es zugleich die Periode der zusammengesetzten Schwingungen der Flüssigkeit; im Allgemeinen aber ist die Bewegung zwischen den Cylindern eine aperiodische, wenn T_1 und T_2 verschieden sind.

Man kann das Problem noch viel allgemeiner fassen: Die cylindrische Wand 1 rotire um ihre Axe mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche zu jeder Zeit gegeben ist, als die Summe von Winkelgeschwindigkeiten, die gehören zu harmonischen Schwingungen mit constantem logarithmischen Decrement oder Increment. Es sei also

$$\chi_1 = \sum_{1}^{\bar{\nu}} C_\nu \, e^{-\frac{\Delta_\nu}{T_\nu} t} \cos\left(\frac{2\pi}{T_\nu} t - \varepsilon_\nu\right)$$

und ähnlich die Winkelgeschwindigkeit der conaxialen Wand

$$\chi_2 = \sum_{1}^{\bar{\nu}'} C_{\nu'} \, e^{-\frac{\Delta_{\nu'}}{T_{\nu'}} t} \cos\left(\frac{2\pi}{T_{\nu'}} - \varepsilon_{\nu'}\right)$$

Die Bewegung der Flüssigkeit zwischen den Cylindern ist dann besimmt durch

(Ia)
$$\chi = \sum e^{-a_\nu x t} \left\{ (c_{1,\nu} F + \ldots + c_{4,\nu} g) \cos b_\nu x t + (c_{1,\nu} G - \ldots - c_{4,\nu} f) \sin b_\nu x t \right\}$$
$$+ \sum' e^{-a_{\nu'} x t} \left\{ (c_{1,\nu'} F + \ldots + c_{4,\nu'} g) \cos b_{\nu'} x t + (c_{1,\nu'} G - \ldots - c_{4,\nu'} f) \sin b_{\nu'} x t \right\}$$

$$b_\nu = \frac{2\pi}{x T_\nu}, \; b_{\nu'} = \frac{2\pi}{x T_{\nu'}}, \; a_\nu = \frac{\Delta_\nu}{x T_\nu}, \; a_{\nu'} = \frac{\Delta_{\nu'}}{x T_{\nu'}}$$

Die Constanten sind wieder so zu wählen, dass für jedes ν, beziehungsweise ν'

$$c_{1,\nu'} F_1 + c_{2,\nu'} G_1 + c_{3,\nu'} f_1 + c_{4,\nu'} g_1 = 0$$
$$c_{1,\nu'} G_1 - c_{2,\nu'} F_1 + c_{3,\nu'} g_1 - c_{4,\nu'} f_1 = 0$$
$$c_{1,\nu} F_2 + c_{2,\nu} G_2 + c_{3,\nu} f_2 + c_{4,\nu} g_2 = 0$$
$$c_{1,\nu} G_2 - c_{2,\nu} F_2 + c_{3,\nu} g_2 - c_{4,\nu} f_2 = 0$$

Die noch verfügbaren $2\bar{\nu} + 2\bar{\nu}'$ Constanten sind bestimmt durch die gleiche Anzahl der Grössen $C_\nu, \varepsilon_\nu, C_{\nu'}, \varepsilon_{\nu'}$.*)

Wir wenden uns nun zur Discussion einfacher specieller Fälle.

2.

a) Bewegung der Flüssigkeit in einem Cylinder, welcher mit constanter Amplitude rotirend schwingt. — Zur Darstellung dieser Bewegung genügt der particuläre Integral

$$\chi = C(F\cos bxt + G\sin bxt)$$

wobei in F und G zu setzen ist, gemäss $(9\,a) : 2\,\lambda = \frac{\pi}{2}$. Man hat sonach

$$F\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{x^4}{2!3!} + \frac{x^8}{4!5!} - \frac{x^{12}}{6!7!} + \cdots$$

$$G\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^6}{3!4!} - \frac{x^{10}}{5!6!} + \cdots$$

*) Wenn zwischen $t = -\tau$ und $t = +\tau$ χ_1 und χ_2 gegeben sind als Functionen von t, so kann man χ für die Flüssigkeit nach der oben angewandten Methode finden. Man kann sonach die Bewegung der Flüssigkeit angeben für jede rotirende Bewegung der Wände. Man entwickle χ_1, χ_2 in periodische Reihen, welche nach ganzen Vielfachen von $\frac{\pi t}{\tau}$ fortschreiten

$$\chi_1 = A_1^{\circ} + \sum_1^{\infty}{}_{\nu}\left(A_1^{(\nu)}\cos\frac{\nu\pi t}{\tau} + B_1^{(\nu)}\sin\frac{\nu\pi t}{\tau}\right)$$

$$\chi_2 = A_2^{\circ} + \sum_1^{\infty}{}_{\nu}\left(A_2^{(\nu)}\cos\frac{\nu\pi t}{\tau} + B_2^{(\nu)}\sin\frac{\nu\pi t}{\tau}\right).$$

Man findet

$$(1b)\qquad \chi = \frac{c}{\rho^2} + C + \sum_1^{\infty}{}_{\nu}\left\{\mathfrak{F}_{(\rho)}^{(\nu)}\cos\frac{\nu\pi t}{\tau} + \mathfrak{G}_{(\rho)}^{(\nu)}\sin\frac{\nu\pi t}{\tau}\right\}$$

worin

$$c = (A_1^{\circ} - A_2^{\circ})\frac{\rho_1^2\rho_2^2}{\rho_2^2 - \rho_1^2}, \quad C = \frac{A_2^{\circ}\rho_2^2 - A_1^{\circ}\rho_1}{\rho_2^2 - \rho_1^2}$$

und für jedes Glied die Constanten $c_1 \ldots c_4$ so zu bestimmen sind, dass

$$\mathfrak{F}_{(\rho_1)}^{(\nu)} = c_1^{(\nu)}F_1 + c_2^{(\nu)}G_1 + c_3^{(\nu)}f_1 + c_4^{(\nu)}g_1 = A_1^{(\nu)},$$
$$\mathfrak{G}_{(\rho_1)}^{(\nu)} = c_1^{(\nu)}G_1 - c_2^{(\nu)}F_1 + c_3^{(\nu)}g_1 - c_4^{(\nu)}f_1 = B_1^{(\nu)},$$
$$\mathfrak{F}_{(\rho_2)}^{(\nu)} = c_1^{(\nu)}F_2 + c_2^{(\nu)}G_2 + c_3^{(\nu)}f_2 + c_4^{(\nu)}g_2 = A_2^{(\nu)}$$
$$\mathfrak{G}_{(\rho_2)}^{(\nu)} = c_1^{(\nu)}G_2 - c_2^{(\nu)}F_2 + c_3^{(\nu)}g_2 - c_4^{(\nu)}f_2 = B_2^{(\nu)}$$

Um von der Flüssigkeitsbewegung eine Vorstellung zu erlangen, muss man zunächst die Functionen F, G untersuchen. In der folgenden Tabelle geschieht dies für das Intervall 0 bis 10.

x	$F\left(x_1 \frac{\pi}{2}\right)$	$G\left(x_1 \frac{\pi}{2}\right)$	Wurzeln von F	Wurzeln von G	Abstände der nächsten Wurzeln der Functionen F und G
0	+1·00	0·00		$x=0·000$	
1	+0·92	−0·49			1·886
2	−0·25	−1·56	$x=1·886$		
3	−3·62	−0·10		3·019	1·133
4	−1·91	+9·58			1·122
5	+27·06	+10·24	4·141		1.116
6	+45·44	−78·76		5·257	1·114
7	−230·87	−187·93	6·371		1·113
8	−749·85	+669·36		7·484	1·113
9	+1871·4	+2922·3	8·597		1·112
10	+11185·5	−4880·3		9.709	1·111
			10·820		

An denjenigen Stellen, wo F verschwindet, befolgt χ das Sinusgesetz, die Cylinder für welche G verschwindet, schwingen nach dem Cosinusgesetz. Es entspricht also der Abstand zweier nächst einander folgenden Wurzeln von F und G einer Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ im Schwingungszustand der den Wurzelwerthen zugehörigen Cylinder; der eine erreicht das Maximum seiner Geschwindigkeit, während der andere das Maximum seiner Elongation hat. Man sieht, dass der Abstand zweier solcher Wurzeln variabel ist, dass er vom Centrum aus abnimmt, sich jedoch sehr rasch einer festen Grenze nähert. Diesen Schluss, welcher bezweifelt werden könnte, da er hier nur gezogen wurde aus einer numerischen Bestimmung von F und G in einem kleinen Intervalle, werden wir im letzten Theile der Abhandlung auf anderem Wege bestätigt finden. Aus der zweiten und dritten Spalte der Tabelle folgt auch, dass, den centralen Theil des Cylinders ausgenommen, gleichen Abständen der Werthe von x (also auch von ρ) gleiche Phasendifferenzen entsprechen. Wächst x um 1, so ändert sich die Phase beiläufig um 81°

Man hat, den Gleichungen (8, 9) zufolge

$$\rho = \frac{2}{m} x = \sqrt{\frac{2\varkappa T}{\pi}} . x$$

Setzt man $T = 1$ Secunde, $\varkappa = 1 \cdot 3 \frac{(\text{mm})^2}{\text{sec}}$ [der Werth für Wasser von 10° C.], so folgt

$$\rho = 0 \cdot 910^{\text{mm}} . x$$

Daher erhält man für die aufeinanderfolgenden Differenzen der ρ, welche den Phasenunterschieden $\frac{\pi}{2}$ entsprechen, vom Centrum aus gezählt, in Mm :

1·716, 1·031, 1·021, 1·015, 1·014, 1·013, 1·013. 1·012, 1·011,...

Wird Wasser in einem Cylinder in einer rotirend schwingenden Bewegung erhalten, mit constanter Amplitude, so haben je zwei conaxiale Cylinder in der Flüssigkeit gegen einander eine Phasendifferenz, welche, wenn die Schwingungsdauer 1 Secunde beträgt, in einer Entfernung von mehr als 8 Mm. vom Centrum ihrem Abstande proportional ist. Dies gilt, sobald die Phasendifferenz nicht mehr als 2π beträgt, und ρ bis auf ein Hundertel Mm. genau bestimmt wird. Je zwei Cylinder, welche um 2·02 Mm. von einander abstehen, haben entgegengesetzte Phasen, erreichen also gleichzeitig ihre grössten Elongationen nach entgegengesetzten Richtungen und gehen gleichzeitig mit entgegengerichteten Geschwindigkeiten durch ihre Mittellage.

Für eine andere Flüssigkeit als Wasser findet man bei der gleichen Schwingungsdauer von 1 Secunde den Abstand zweier Schichten von entgegengesetzter Phase, indem man 2·02 Mm. multiplicirt mit $\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}$, wenn $\varkappa'$ das Verhältniss der Maasszahlen des Reibungscoëfficienten und der Dichte in der neuen Flüssigkeit bezeichnet. Der erwähnte Abstand wächst demnach mit der Zähigkeit; er könnte für Glycerin etwa 15 Mal so viel betragen, wie für Wasser.

Ist die Schwingungsdauer eine andere als 1 Secunde, so hat man, um den Abstand zweier nächsten entgegenschwingenden Cylinder zu finden, mit der Quadratwurzel der Maasszahl der Schwingungsdauer zu multipliciren. Jener Abstand ändert sich also mit der Schwingungsperiode ähnlich wie die Pendellänge mit der ihrigen.

b) **Bewegung der Flüssigkeit in einem Cylinder, welcher Rotationsschwingungen mit abnehmender Amplitude ausführt.** — Als Beispiel, welches die numerischen Bestimmungen am kürzesten zu machen gestattet, wählen wir die Schwingungen mit dem logarithmischen Decrement $\Delta = 2\pi$. Dann ist nach $(9a)$

$$2\lambda = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad a = b$$

Von zwei aufeinanderfolgenden Elongationen nach derselben Seite ist die erste $e^{2\pi} = 535 \cdot 5$ Mal grösser als die folgende.

Man hat zur Bestimmung der Flüssigkeitsbewegung

$$\chi = Ce^{-bxt}\,(F \cos bxt + G \sin bxt)$$

worin

$$F\left(x, \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{x^8}{4!5!} + \frac{x^{16}}{8!9!} - \frac{x^{24}}{12!13!} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^6}{3!4!} + \frac{x^{10}}{5!6!} - \frac{x^{14}}{7!8!} - \cdots\right\}$$

$$G\left(x, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{x^4}{2!3!} - \frac{x^{12}}{6!7!} + \frac{x^{20}}{10!11!} - \cdots + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{x^2}{1!2!} - \frac{x^6}{3!4!} + \frac{x^{10}}{5!6!} + \frac{x^{14}}{7!8!} - \cdots\right\}$$

Die folgende Tabelle gibt Einsicht in den Verlauf der Functionen F und G zwischen $x = 0$ und $x = 10$.

x	$F\left(x, \frac{\pi}{4}\right)$	$G\left(x, \frac{\pi}{4}\right)$	Wurzeln von F	Wurzeln von G	Abstände der nächsten Wurzeln der Functionen F und G
0	+1·00	0·00		$x = 0 \cdot 000$	
1	+0·65	−0·28			1·784
2	−0·18	−0.39	$x = 1.784$		0·825
3	−0·41	+0 34		2·609	0·872
4	+0·61	+0·53	3·481		0·853
5	+0·39	−1·08		4·334	0·854
6	−1·87	−0·14	5·188		0·853
7	+0.44	+3.23		6·041	0·853
8	+4.98	−2·52	6·894	7·748	0·854
9	−6·9	−7·3	8·603		0·855
10	−9·8	+15·7		9.456	0·853

Man ersieht aus dieser Tabelle, dass die Amplituden $[\sqrt{F^2+G^2}]$ vom Centrum gegen den Rand hin viel weniger rasch mit wachsendem $x[\rho]$ zunehmen, als im Falle constanter Schwingungen, was auch leicht vorauszusehen war. Minder offenbar jedoch sind die Umstände, welche mit den Distanzen der Wurzeln von F und G zusammenhängen. Man bemerkt, dass während im vorigen Falle die Abstände, welche einer Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ entsprechen, vom Centrum aus stetig abnahmen, dieselben hier im Anfang bald ab- bald zunehmen; dass sie sich jedoch auch hier einer festen Grenze nähern (eine Folgerung durch unvollständige Induction, welche noch der Bestätigung bedarf, die sie im vierten Abschnitt finden wird). Die Grenze ist beträchtlich kleiner als bei constanten Schwingungen. Ist dies schon in Beziehung auf x der Fall, so tritt es noch mehr hervor, wenn man ρ einführt.

$$\rho = \frac{2}{m}x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\varkappa T}{\pi}}\,x$$

Der Coëfficient von x ist im Verhältniss von $1 : \sqrt[4]{2}$ kleiner als vorhin; wenn man wieder setzt $T = 1$ Secunde, $k = 1 \cdot 3 \frac{(\text{mm})^2}{\text{sec}}$, so ist

$$\rho = 0 \cdot 765\ x$$

Es sind also die Abstände der Cylinder, welche Phasendifferenzen $\frac{\pi}{2}$ entsprechen, vom centralen Faden an gerechnet, in Mm.:

$1 \cdot 365, 0 \cdot 631, 0 \cdot 666, 0 \cdot 652, 0 \cdot 653, 0 \cdot 652, 0 \cdot 652, 0 \cdot 653, 0 \cdot 654,$
$0 \cdot 652.$

Bei Rotationsschwingungen eines Wassercylinders, deren Periode 1 Secunde und deren logarithmisches Decrement 2π ist, beträgt der Abstand zweier nächsten Schichten, welche mit entgegengesetzten Phasen schwingen schon in geringer Entfernung vom Centrum $1 \cdot 30$ Mm., was nahezu zwei Dritteln der entsprechenden Distanz bei constanten Schwingungen und sonst ähnlichen Umständen gleichkommt. In Betreff der Abhängigkeit des genannten Abstandes von der Zähigkeit und von der Schwingungs-

dauer gelten die gleichen Bemerkungen, wie im vorher betrachteten Falle.

3.

a) Constante Schwingungen eines Cylinders in einem ruhenden conaxialen cylindrischen Gefässe. — Für die Behandlung der Fälle, in welchen Bedingungen an zwei Wänden zu erfüllen sind, müssen beide Paare particulärer Integrale herangezogen werden. Wir haben uns also zunächst mit den Werthen von f, g für Schwingungen mit constanter Amplitude, d. i. für $2\lambda = \frac{\pi}{2}$ zu beschäftigen.

x	$f\left(x, \frac{\pi}{2}\right)$	$g\left(x, \frac{\pi}{2}\right)$
0	$-\infty$	$+\infty$
1	$+0\cdot05$	$+0.43$
2	$+0\cdot62$	-0.04
3	$+0\cdot18$	$-1\cdot41$
4	$-3\cdot69$	-1.12
5	$-5\cdot07$	$+10\cdot23$
6	$+29\cdot37$	$+20\cdot89$
7	$+82\cdot75$	$-83\cdot44$
8	$-233\cdot62$	$-319\cdot65$
9	$-1219\cdot6$	$+622\cdot5$
10	$+1483\cdot4$	$+4577\cdot2$

Es ist unnütz, die Wurzeln von f, g aufzusuchen, da man bemerkt, dass für grössere Werthe von x der Differenz 1 die Phasendifferenz von beiläufig 81° entspricht, die Wurzelabstände sich also der gleichen Grenze nähern, wie bei F, G; bezüglich eines strengern Beweises dieser Behauptung muss wieder auf den folgenden Abschnitt verwiesen werden.

Die Abstände der Werthe von x in den bisher gegebenen Tabellen sind viel zu gross für die meisten Anwendungen. Ich habe desshalb noch eine Tafel berechnet für das Intervall $x = 1$ bis $x = 5$, welche der kürzeren Rechnung wegen für gleiche Abstände (0·05) der gemeinen Logarithmen von x angeordnet ist.

Log x	x	$F\left(x, \frac{\pi}{2}\right)$	$G\left(x, \frac{\pi}{2}\right)$	$f\left(x, \frac{\pi}{2}\right)$	$g\left(x, \frac{\pi}{2}\right)$
0·00	1·00000	+0·91701	—0·49307	+0·04832	+0.43245
0·05	1·12202	+0·86880	—0·61564	+0·12632	+0·38913
0·10	1·25893	+0·79286	—0·76492	+0·21145	+0·34610
0·15	1·41253	+0·67373	—0·94283	+0·30526	+0·29671
0·20	1·58489	+0·48786	—1·14704	+0·40748	+0·22722
0·25	1·77828	+0·20111	—1·36518	+0·51505	+0·12233
0·30	1·99526	—0·23462	—1·56387	+0·61710	—0·04067
0·35	2·23872	—0·87850	—1·66789	+0.68705	—0·28621
0·40	2·51189	—1·78447	—1·52422	+0·66767	—0·64527
0.45	2.81838	—2·94381	—0·84746	+0·44731	—1·12492
0·50	3·16228	—4·12992	+0·83549	—0·16787	—1·65460
0·55	3·54813	—4·54025	+4·14198	—1·45081	—1·94289
0·60	3·98107	—2·12642	+9·33679	—3·58429	—1·19451
0·65	4·46687	+7·11699	+14·40974	—5·93345	+2.23859

Wir wollen nun die Flüssigkeitsbewegung untersuchen für den Fall, dass der Cylinder $x=1$ mit constanter Amplitude schwingt im ruhenden cylindrischen Wasserbehälter $x=5$. Man setze

$$\chi=(c_1F+c_2G+c_3f+c_4g)\cos bxt+(c_1G-c_2F+c_3g-c_4f)\sin bxt$$

Wenn für die Phase keine Bedingung gestellt wird, so kann man eine Constante weglassen,

$$c_4=o$$

und die übrigen so bestimmen, dass

$$c_1F\left(5, \frac{\pi}{2}\right)+c_2G\left(5, \frac{\pi}{2}\right)+c_3f\left(5, \frac{\pi}{2}\right)=o$$

$$c_1G\left(5, \frac{\pi}{2}\right)-c_2F\left(5, \frac{\pi}{2}\right)+c_3g\left(5, \frac{\pi}{2}\right)=o$$

Diesen Gleichungen wird genügt durch

$$c_1=3\cdot23 \qquad c_2=32\cdot88 \qquad c_3=83\cdot72$$

Was bei der vorliegenden Aufgabe zumeist in Betracht kommt, ist das Abnehmen der Amplituden $A=\sqrt{\mathfrak{F}^2+\mathfrak{G}^2}$, — wo $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ die Coëfficienten von cos bxt und sin bxt bezeichnen —

von dem schwingenden gegen den ruhenden Cylinder hin. Bei Benützung der letzten Tabelle findet man:

x: 1·00, 1·12, 1·26, 1·41, 1·58, 1·78, 2·00, 2·51, 2·82, 3·16, 3·55, 3·98, 4.45, 5·00

A: 10·2, 7·1, 4·9, 3·3, 2·1, 1·4, 0·9, 0·5, 0·3, 0·1, 0·0, 0·0, 0·0, 0·0.

b) **Bewegung der Flüssigkeit zwischen zwei starr verbundenen Cylindern, welche um ihre gemeinsame Axe mit constanter Amplitude oscilliren.** — Setzt man wieder

$$\chi = (c_1 F + c_2 G + c_3 f) \cos bxt + (c_1 G - c_2 F + c_3 g) \sin bxt,$$

so wird die Bedingung, dass die Phasen sowohl, wie die Winkelamplituden beider Wände übereinstimmen, genügt, wenn c_1, c_2, c_3 so gewählt werden, dass

$$c_1 F(x_1) + c_2 G(x_1) + c_3 f(x_1) = c_1 F(x_2) + c_2 G(x_2) + c_3 f(x_2)$$
$$c_1 G(x_1) - c_2 F(x_1) + c_3 g(x_1) = c_1 G(x_2) - c_2 F(x_2) + c_3 g(x_2).$$

Die Constante, welche sich in diesen Gleichungen unbestimmt bleibt, dient dazu, den verlangten Werth der Wandamplitude herzustellen.

Man setze $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, so wird den Gleichungen genügt durch

$$c_1 = 2 \cdot 86, \qquad c_2 = 31 \cdot 11, \qquad c_3 = 79 \cdot 88.$$

Die Amplituden haben für die Grenzen und für die Zwischenwerthe von x, nach den Argumenten der letzten Tabelle geordnet, folgende Werthe

x: 1·00, 1·12, 1·26, 1·41, 1·58, 1·78, 2·00, 2·24, 2·51, 2·82, 3·16, 3·55, 3·98, 4·45, 5·00

A: 10·0, 7·8, 4·7, 3·0, 1·8, 0·8, 0·4, 0·6, 0·9, 1·3, 1·5, 2·1, 3·1, 4·5, 10·0.

Die Amplitudencurven haben eine ganz verschiedene Gestalt, je nach den Grenzwerthen von x. Man sieht dies leicht, wenn man die letzte Zahlenreihe vergleicht mit der folgenden, welche gilt für $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ [$c_1 = 1 \cdot 48$, $c_2 = 11 \cdot 54$, $c_3 = 24 \cdot 73$]

A: 3·2, 3·0, 3·0, 2·9, 3·0, 3·0, 3·2

Während es im vorigen Falle Cylinder gab, welche mit 25mal geringerer Amplitude oscilliren, als die Wände, ist dieses Mal das Verhältniss der Wandamplitude zur kleinsten Amplitude eines Flüssigkeitscylinders wenig grösser als 1.

4.

Die Integrale der Gleichung (6), welche wir bisher zur Behandlung schwingender und verwandter Bewegungen flüssiger Cylinder angegeben haben, werden für die numerische Berechnung desto unbequemer, je mehr man x wachsen lässt. Man kann den Integralen jedoch eine andere Form geben, welche gerade für grosse Werthe von x die Rechnung sehr leicht macht. Statt der nur convergente Reihen enthaltenden Functionen F, G, f, g führt man vier andere ein, in denen je ein Factor als eine nach negativen Potenzen von x fortschreitende Reihe erscheint. Diese Reihen sind zwar halbconvergent, ihre Brauchbarkeit ist jedoch erwiesen. Eine solche Entwickelung ist für die (damals noch nicht so genannte) Bessel'sche Function J^0 von Poisson [1]) gegeben worden; später von Jacobi [2]) für die Cylinderfunction erster Art von irgend einer ganzen Ordnungszahl. Das Restglied dieser Reihen hat Herr Lipschitz [3]) untersucht.

Nimmt man das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\rho^2}+\frac{3}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial\rho}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\chi}{\partial t}=0 \tag{6}$$

an in der Form

$$\chi=e^{-\alpha\varkappa t}\,p\,(\rho)$$

und setzt man wieder $\sqrt{\alpha}\rho=r$, so erhält man zur Bestimmung von p die Differentialgleichung

$$\frac{d^2p}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{dp}{dr}+p=0.$$

Wir wollen die allgemeine Gleichung

$$\frac{d^2p}{dr^2}+\frac{\gamma}{r}\frac{dp}{dr}+p=0 \tag{11}$$

---

[1] Journal de l'école polytechnique, Cahier 19. (Tome 12 p. 350) 1823.

[2] Schumacher's astronomische Nachrichten. B. 28. 1849.

[3] Borchardt's Journal f. d. r. u. a. Mathematik. B. 56. 1859.

untersuchen. Hier hat das Integral eine sehr verschiedene Gestalt, je nachdem γ eine positive ganze gerade Zahl ist, oder eine andere positive Zahl. Im ersten Falle ist das Integral in einer geschlossenen Form darstellbar, welche eine algebraische Function und eine bekannte Transcendente, die Exponentielle enthält. Im zweiten Falle kommt, wenn man eine ähnliche Entwickelung versucht, statt der algebraischen Function eine neue Transcendente in Form einer halbconvergenten Reihe hinzu.

Sei $\gamma = 2n$, n eine positive ganze Zahl und man versuche das Integral der Gleichung (11) darzustellen, wie folgt:

$$p = e^{\beta\rho}\left[a_0 + \frac{a_1}{\rho} + \frac{a_2}{\rho^2} + \frac{a_3}{\rho^3} + \ldots\right]$$

Für die Bestimmung der Constanten hat man dann die Relationen:

$$(\beta^2+1)\, a_0 = o$$
$$(\beta^2+1)\, a_1 + 2n\beta a_0 = o$$
$$(\beta^2+1)\, a_2 + (2n-2)\beta a_1 = o$$
$$(\beta^2+1)\, a_3 + (2n-4)\beta a^2 - 1(2n-2)a_1 = o$$
$$(\beta^2+1)\, a_4 + (2n-6)\beta a_3 - 2(2n-3)a_2 = o$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\beta^2+1)\alpha_{\mu+1} + (2n-2\mu)\beta\alpha_\mu - (\mu-1)(2n-\mu)a_{\mu-1} = o$$
$$(\beta^2+1)\alpha_{\mu+1} + (2n-2\overline{\mu+1})\beta\alpha_{\mu+1} - \mu(2n-\overline{\mu+1})a_\mu = o$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sollen nicht alle Coëfficienten verschwinden, so muss

$$\beta^2 + 1 = o$$

sein. Ist $2n$ eine grössere Zahl, so hat man der Reihe nach $a_0 = o$, $a_1 = o$. Der erste Coëfficient, welcher nicht verschwindet, sei α_μ. Dann ist $n = \mu$. Man sieht leicht, dass die Anzahl der von Null verschiedenen a nur eine beschränkte ist. Sei $a_{\mu+\nu}$ der letzte Coëfficient, so folgt der Werth von ν aus der Gleichung

$$(\mu+\nu)(2n-\overline{\mu+\nu-1}) = o$$

und da $\mu+\nu$ nicht Null sein soll, so hat man

$$\nu + 1 = 2n - \mu = n$$

$\nu + 1$ ist aber die Anzahl der übrig bleibenden Glieder der Reihe. Diese Zahl ist danach gleich $\frac{\gamma}{2}$ wenn γ gerade ist und von Null verschieden.

Man erhält dann:

$$a_0 = a_1 = \ldots a_{n-1} = 0,\ a_n = 1$$

$$a_{n+1} = -\frac{(n-1)n}{2} \cdot \frac{1}{\beta}$$

$$a_{n+2} = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{2.4} \cdot \frac{1}{\beta^2}$$

. . . . . .

$$a_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{1.2\ldots(2n-3)(2n-2)}{2,4.6\ldots(2n-2)} \frac{1}{\beta^{n-1}}$$

$$a_{2n} = a_{2n+1} = \ldots = 0$$

Berücksichtigt man, dass $\beta = +i$ oder $-i$ gesetzt werden kann, so findet man zwei particuläre Integrale, also das allgemeine Integrale

$$p = \frac{Ce^{ir}}{r^n}\left(1 + \frac{n-1.n}{2}\frac{i}{r} - \frac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}\frac{1}{r^2} - \ldots + i^{n-1} \cdot \frac{1.2\ldots 2n-3.2n-2}{2.4\ldots 2n-4.2n-2}\frac{1}{r^{n-1}}\right)$$

$$+ \frac{De^{-ir}}{r^n}\left(1 - \frac{n-1.n}{2}\frac{i}{r} - \frac{n-2.n-1.n+1}{2.4}\frac{1}{r^2} + \ldots + (-i)^{n-1}\frac{1.2\ldots 2n-3.2n-2}{2.4\ldots 2n-4.2n-2} \cdot \frac{1}{r^{n-1}}\right)$$

Ist nun, wie in unserem Falle (6), γ eine positive ganze jedoch ungerade Zahl, so lässt sich, wie man aus den Formeln zur Berechnung der Coëfficienten ersieht, die Reihe in p überhaupt nicht nach ganzen negativen Potenzen von r ordnen. Aber man kann von der Annahme, dass die Exponenten ganze Zahlen sind, abgehen, und nur an der Bedingung festhalten, dass die Differenzen der Exponenten je zweier Glieder ganze Zahlen seien. Dann ist der erste von Null verschiedene Coëfficient wieder a_μ, wenn

$$\mu = \frac{\gamma}{2}$$

ist. Die folgenden Coëfficienten erhält man nach ganz ähnlichen Formeln wie vorhin; statt n ist überall $\frac{\gamma}{2}$ zu setzen. Die Reihe bricht nicht ab, sondern setzt sich in's Unendliche fort.

Das allgemeine Integral der Gleichung (11) ist sonach für ungerade γ [1]

$$(12)\quad p = \frac{Ce^{ir}}{r^{\frac{\gamma}{2}}}\left[1 + \frac{\frac{\gamma}{2}-1\cdot\frac{\gamma}{2}}{2}\frac{i}{r} - \frac{\frac{\gamma}{2}-2\cdot\frac{\gamma}{2}-1\cdot\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\gamma}{2}+1}{2.4}\frac{1}{r^2} - \cdots\right]$$
$$+ \frac{De^{-ir}}{r^{\frac{\gamma}{2}}}\left[1 - \frac{\frac{\gamma}{2}-1\cdot\frac{\gamma}{2}}{2}\frac{i}{r} - \frac{\frac{\gamma}{2}-2\cdot\frac{\gamma}{2}-1\cdot\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\gamma}{2}+1}{2.4}\frac{1}{r^2} + \cdots\right]$$

In der Differentialgleichung unseres hydrodynamischen Problems ist $\gamma = 3$, also

$$p = \frac{Ce^{ir}}{r^{3/2}}\left[1 - \frac{-1.3}{1}\frac{i}{8r} - \frac{-1.3.1.5}{1.2}\frac{1}{(8r)^2} + \frac{-1.3.1.5.3\ 7}{1.2.3}\frac{i}{(8r)^3} + \cdots\right]$$
$$+ \frac{De^{-ir}}{r^{3/2}}\left[1 + \frac{-1.3}{1}\frac{i}{8r} - \frac{-1.3.1.5}{1.2}\frac{1}{(8r)^2} - \frac{-1.3.1.5.3.7}{1.2.3}\frac{i}{(8r)^3} + \cdots\right]$$

---

[1] Das particuläre Integral, welches Jacobi (l.c) für p angegeben hat, entspricht dem Werthe $r^{-\frac{\gamma-1}{2}} J^{\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}$; man erhält es aus dem allgemeinen Integrale (12) folgenderweise: p wird (wie wenn r, C, D reell wären) in den von i freien und in den mit i behafteten Theil zerlegt, es folgt

$$p = C[A^{(r)} + iB^{(r)}] + D[A^{(r)} - iB^{(r)}] = (C+D)A^{(r)} + i(C-D)B^{(r)}.$$

Es sind also auch A und B Lösungen der Differentialgleichung (11) und das Jacobi'sche Integral ist (bis auf einen constanten Factor) $A - B$ oder $A + B$, je nachdem $\frac{\gamma-1}{2}$ gerade oder ungerade ist.

Für A und B bei beliebigem ungeraden γ hat Herr Lipschitz Ausdrücke gefunden, in denen die halbconvergenten Reihen ersetzt sind durch bestimmte Integrale; diese erlauben, das Maximum des Zahlenwerthes anzugeben, den die Summe der Glieder, von irgend einem derselben angefangen, erreichen kann.

Da nun nach (8) $r = m\rho e^{\lambda i} = 2xe^{\lambda i}$, so hat man zu setzen

$$e^{ir} = e^{-2x\sin\lambda}\ \{\cos(2x\cos\lambda) + i\sin(2x\cos\lambda)\}$$
$$e^{-ir} = e^{2x\sin\lambda}\ \{\cos(2x\cos\lambda) + i\sin(2x\cos\lambda)\}$$

Zerlegt man nun p in den reellen und imaginären Theil, indem man die willkürlichen Constanten C, D ersetzt durch andere, als reell angenommene Constante $C_1 = C(2e^{\lambda i})^{-1/2}$, $C_2 = D(2e^{\lambda i})^{-1/2}$, so hat man

$$(13)\quad \begin{cases} p = U + iV \\ U = C_1 x^{-1/2} e^{-2x\sin\lambda}(\cos(2x\cos\lambda) f_1 + \sin(2x\cos\lambda) f_2) \\ \quad + C_2 x^{-1/2} e^{2x\sin\lambda}(\cos(2x\cos\lambda) f_3 + \sin(2x\cos\lambda) f_4) \\ V = C_1 x^{-1/2} e^{-2x\sin\lambda}(-\cos(2x\cos\lambda) f_2 + \sin(2x\cos\lambda) f_1) \\ \quad + C_2 x^{-1/2} e^{2x\sin\lambda}(\cos(2x\cos\lambda) f_4 - \sin(2x\cos\lambda) f_3). \end{cases}$$

An Stelle der f mit den vier Indices sind folgende Reihen zu setzen:

$$(13a)\quad \begin{cases} 1 - \dfrac{-1.3\sin\lambda}{1.16^1}\dfrac{}{x} - \dfrac{-1.3.1.5\cos 2\lambda}{1.2.16^2}\dfrac{}{x^2} \\ \qquad + \dfrac{-1.3.1.5.3.7\sin 3\lambda}{1.2.3.16^3}\dfrac{}{x^3} + \ldots = f_1 \\ \dfrac{-1.3\cos\lambda}{1.16^1}\dfrac{}{x} - \dfrac{-1.3.1.5\sin 2\lambda}{1.2.16^2}\dfrac{}{x^2} \\ \qquad - \dfrac{-1.3.1.5.3.7\cos 3\lambda}{1.2.3.16^3}\dfrac{}{x^3} + \ldots = f_2 \\ 1 + \dfrac{-1.3\sin\lambda}{1.16^1}\dfrac{}{x} - \dfrac{-1.3.1.5\cos 2\lambda}{1.2.16^2}\dfrac{}{x^2} \\ \qquad - \dfrac{-1.3.1.5.3.7\sin 3\lambda}{1.2.3.16^3}\dfrac{}{x^3} + \ldots = f_3 \\ \dfrac{-1.3\cos\lambda}{1.16^1}\dfrac{}{x} + \dfrac{-1.3.1.5\sin 2\lambda}{1.2.16^2}\dfrac{}{x^2} \\ \qquad - \dfrac{-1.3.1.5.3.7\cos 3\lambda}{1.2.3.16^3}\dfrac{}{x^3} - \ldots = f_4. \end{cases}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit χ erhält man aus dem complexen Ausdruck

$$e^{-\chi xt} p = e^{-axt}(\cos bxt - i\sin bxt)(U + iV)$$

die particulären Integrale

$$e^{-axt}(U\cos bkt + V\sin bxt)$$
$$e^{-axt}(V\cos bkt - U\sin bxt)$$

(U, V sind zu vergleichen mit unseren vorher gebrauchten Werthen c_1F+c_2f, c_1G+c_2g). Im zweiten Integrale können wir die Constanten $C_1 C_2$ ersetzen durch andere C_3, C_4. Der Deutlichkeit wegen sollen jedem U, V die darin vorkommenden Constanten hinzugeschrieben werden. Man hat sonach

$$\chi = e^{-axt}\{[U(C_1C_2) + V(C_3C_4)]\cos bxt + [V(C_1C_2) - U(C_3C_4)]\sin bxt\} \tag{II}$$

also wieder einen Ausdruck, welcher vier willkürliche Constante enthält, und dessen man sich mit Vortheil bei grossen Werthen von x zu ähnlichen Zwecken bedienen kann, zu denen wir bei kleineren Werthen von x das Integral (I) verwendet haben. Man kann selbstverständlich auch aus (II) einen allgemeinen Ausdruck herleiten, nach dem Muster von (Ia) oder (Ib).

Es soll noch vom Integral (II) eine schon mehrfach angekündigte Anwendung gemacht werden. In den vorhergehenden Abschnitten haben wir in einigen Fällen die Abstände von x berechnet, welche der Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ entsprechen; es wurde nach dem Eindrucke, den die Zahlenreihen machen, geschlossen, dass es einen Grenzwerth jener Abstände gibt, ferner dass die in der Nähe von $x = 10$ gefundenen Werthe diese Grenze schon sehr nahe angeben. Es lässt sich nunmehr zeigen, dass diese aus unvollständigen Daten gezogenen Folgerungen (die letzte bis zum angestrebten Grade der Genauigkeit) richtig waren. Für überaus grosse Werthe von x hängen die Vorzeichen von U und V nur ab, gemäss (13) von

$$\cos(2x\cos\lambda),\quad \sin(2x\cos\lambda).$$

Diese Functionen behalten ihren Zahlenwerth, ändern jedoch das Zeichen, d. i. die Phase von χ ändert sich um π — wenn $2x\cos\lambda$ um π, oder

$$x \text{ um } \xi_\pi = \frac{\pi}{2\cos\lambda} \tag{14}$$

wächst. Für constante Schwingungen, $2\lambda = \frac{\pi}{2}$, ist $\xi_\pi = 2.2214$, sonach für die Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ $\xi_{\frac{\pi}{2}} = 1.1107$, während wir vorher angegeben haben 1.111. Ebenso bestätigt sich bis zur zweiten Decimalstelle der Werth von $\xi_{\frac{\pi}{2}}$ für $2\lambda = \frac{\pi}{4}$, man erhält nämlich nach (14) 0·8501.

Handelt es sich um Schwingungen eines Cylinders in einer unbegrenzten Flüssigkeit, welche in unendlicher Entfernung von der Axe ruht, so nähert sich die Winkelgeschwindigkeit bei wachsenden x immer mehr dem Werthe

$$\chi = Cx^{-1/2} e^{-\alpha x t - 2x \sin\lambda} \cos(bxt - 2x \cos\lambda) \tag{15}$$

$$= A\rho^{-1/2} e^{-\frac{\Delta}{T}t - \frac{R}{L}\rho} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{L}\right)$$

worin

$$L = 2\pi \sqrt{\frac{2\varkappa T}{\sqrt{4\pi^2 + \Delta^2} + \Delta}}, \quad R = \sqrt{4\pi^2 + \Delta^2} - \Delta$$

Die Wellenlänge und die Abnahme der Amplitude im Strahl hängen auf dieselbe Art ab von Schwingungsdauer und Decrement, wie bei ebenen Transversalschwingungen. Für die letzteren ist nämlich, wenn v die Geschwindigkeit (parallel der y), z die Fortpflanzungsrichtung bezeichnet

$$v = A e^{-\frac{\Delta}{T}t - \frac{R}{L}z} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{L}\right)$$

Man kann in jeder Flüssigkeit Transversalschwingungen von beliebig grosser oder beliebig kleiner Wellenlänge einleiten; aber wie zäh oder wie beweglich auch die Flüssigkeit sei (und die Betrachtung gilt gleicherweise für Gase, auf welche keine äussere Kraft wirkt, da bei Transversalschwingungen keine Dichteänderung vorkommt), stets wird die Bewegung unmerklich gering schon in der Entferung weniger Wellenlängen von der erregenden Fläche. Für je eine Wellenlänge nimmt die Amplitude ab im Verhältniss

$$e^{\sqrt{4\pi^2 + \Delta^2} - \Delta} : 1$$

d. i. für constante Schwingungen im Verhältniss 535 : 1, bei jedem Werthe der Wellenlänge und in allen Flüssigkeiten auf gleiche Art.

Über Strictionslinien der Regelflächen zweiten und dritten Grades.

Von **Aug. Adler**, stud. techn.

(Mit 1 Holzschnitt.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Jänner 1882.)

Bekanntlich bilden die Punkte der kürzesten Entfernungen je zweier aufeinanderfolgender Erzeugenden einer Regelfläche eine Curve, welche man die Strictionslinie der Regelfläche nennt. Da die Linie der kürzesten Entfernung zweier Geraden G_1 und G_2 jene Transversale von G_1 und G_2 ist, deren unendlich ferner Punkt den Richtungen von G_1 und G_2 hinsichtlich des unendlich fernen imaginären Kugelkreises i_∞ conjugirt ist, so ergibt sich folgende Construction der einzelnen Punkte der Strictionslinie einer Regelfläche R: Um den Punkt der Strictionslinie der Erzeugenden E von R zu finden, die die Richtungscurve (k_∞) von R in dem Punkte p schneidet, zeichnet man die Polarcurve (k'_∞) von k_∞ hinsichtlich i_∞ und bestimmt den Tangentialpunkt (p') der Polaren von p mit k'_∞. — $\overline{p'E}$ ist dann die Ebene, deren Tangentialpunkt mit R den Strictionspunkt der Erzeugenden E gibt. Daraus folgt sofort, dass $2k$ die Ordnungszahl der Strictionslinie von R ist, wenn k die Classe von k_∞ angibt; denn $2k$ ist die Anzahl der unendlich fernen Punkte der Strictionslinie.

Noch auf eine andere Weise kann man die Strictionslinie definiren. Die Involution zweiten Grades der in Bezug auf i_∞ conjugirten Strahlen aus p wird aus E durch ein involutorisches Ebenenbüschel projicirt, deren Tangentialpunkte eine Involution zweiten Grades auf E bilden mit den Doppelpunkten d_1 und d_2; und da dem Strahle $\overline{p\,p'}$ die Tangente von k_∞ in p in dem involutorischen Strahenbüschel aus p entspricht, so ist der Centralpunkt der Involution auf E der Strictionspunkt dieser Erzeugenden. Man kann also auch die Strictionslinie als die Gesammtheit sämmtlicher Centralpunkte der eben erwähnten Involution auf den Erzeugenden definiren.

Die Untersuchung der Strictionslinie und die Bestimmung der Gesammtheit der Doppelpunkte der Involution auf den Erzeugenden einer Regelfläche zweiten Grades soll der Gegenstand des Folgenden sein. Die erste dieser Curven wurde ausführlich zuerst von Herrn Migotti[1] auf analytischen Wegen untersucht.

I.

Strictionslinien eines einschaligen Hyperboloids.

1. Wir setzen zunächst voraus, dass das Hyperboloid R^2 keine Rotationsfläche sei.

Um also die Centralpunkte (s_1 und s_2) der beiden sich in p von k_∞ [siehe Figur] schneidenden Erzeugenden E_1 und E_2 von R^2 zu bestimmen, sucht man nach Obigem die Tangentialpunkte der Ebenen $\overline{p'E_1}$ und $\overline{p'E_2}$. Diese erhält man dadurch, dass man die weiteren Schnittlinien F_1 und F_2 der Ebenen $\overline{p'E_1}$ und $\overline{p'E_2}$ mit R^2 construirt; (E_1F_1) ist dann s_1, (E_2F_2) ist s_2 [siehe die beigesetzte Figur].

E_1 und E_2, F_1 und F_2 werden nun aus dem Mittelpunkte o von R^2 als Tangenten T' und T'' von k_∞ in p respective p'' auf die unendlich ferne Ebene u_∞ projicirt, wobei p'' der zweite Schnittpunkt $\overline{pp'}$ mit k_∞ ist.

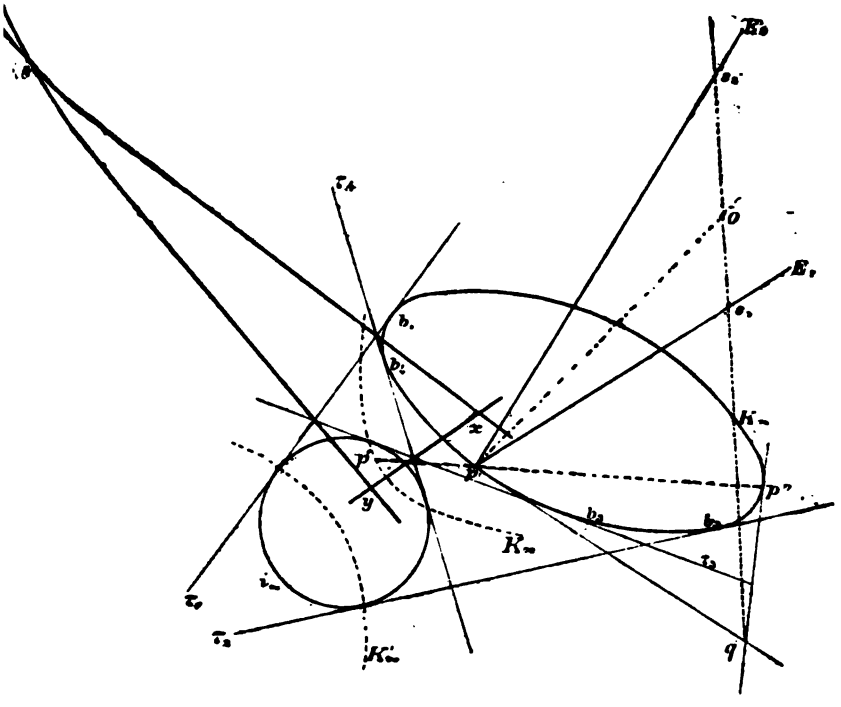
Schneiden sich T' und T'' in q, so liegen $s_1 q s_2 o$ in einer Geraden und bilden eine harmonische Punktreihe. Daraus ergibt sich eine einfache Construction der Strictionslinie, indem man aus p die Punkte p'' und q bestimmt und ausserdem sieht man, dass zu jedem Centralpunkte einer Erzeugenden der einen Schaar es einen Centralpunkt einer Erzeugenden des anderen Systems gibt, der mit ihm symmetrisch hinsichtlich o liegt.

2. Wenn p sich ändert, so ändern sich auch p' und p'', so dass jedem Punkte p' Punkt p'' entspricht, der mit ihm nur in den Tangentialpunkten $b_1 b_2 b_3 b_4$ von $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$ [den gemeinschaftlichen Tangenten von k_∞ und i_∞] zusammenfällt.

Jedem p'' entsprechen aber drei Punkte p, nämlich, wie man sofort sieht, jene drei Punkte $p_1 p_2 p_3$, in welchen k'' ausser p noch k_∞ scheidet; dabei bedeutet k'' jenen Kegelschnitt, dessen Punkte dem Punkte der Tangente von k'_∞ in p' hinsichtlich k_∞ und i_∞

[1] I. Akad. d. W. B. 79, 1879.

conjugirt sind. Daraus folgt, dass die Strictionslinien beider Systeme von Erzeugenden getrennte Curven sind, jede eine rationale Raumcurve vierter Ordnung, welche symmetrisch gegen o liegen. Bezeichnet xyz das Polardreieck von k_∞ und i_∞, so



müssen nach eben Erwähntem p, p_1, p_2, p_3 mit x, y, z auf dem Kegelschnitte k'' liegen. Dieser Kegelschnitt k'' zerfällt im Allgemeinen nur für die den Schnittpunkten des Dreiecks x, y, z entsprechenden Tripel der kubischen Involution auf h_∞, dann aber zerfällt k'' in eine Seite von x, y, z und eine Tangente von J^2 [dem Involutionskegelschnitte der kubischen Involution]. Daraus folgt, dass der Involutionskegelschnitt J^2 mit k_∞ und i_∞ dasselbe Polardreieck hat.

Stationäre Tangenten können also bei der Strictionslinie des Hyperboloides nur in den Endpunkten einer Hauptaxe von R^2 vorkommen, wenn sie überhaupt existiren.

3. Der Punkt q, in welchen aus o die Strictionspunkte s_1 und s_2 von E_1 und E_2 projicirt werden, kann dadurch erhalten werden, dass man die Polaren von p' in Bezug auf i_∞ und k_∞

zum Schnitte bringt. Wenn p also auch p' sich ändert, so beschreibt also q eine Curve C_4^6, deren Punkte denen von k'_∞ hinsichtlich k_∞ und i_∞ conjugirt sind. C_4^6 hat bekanntlich die drei Punkte x,y,z zu Doppelpunkten mit Inflexionstangenten, sie wird von jeder Geraden in wenigstens zwei reellen Punkten geschnitten, denn jeder Kegelschnitt aus x,y,z hat mit k'_∞ wenigstens zwei reelle Punkte gemein; sie hat vier imaginäre Doppeltangenten, denn die vier Kegelschnitte aus x,y,z, die k'_∞ doppelt berühren, sind imaginär; sie berührt k_∞ in den vier imaginären Punkten $b_1 b_2 b_3 b_4$. Die Curve C_4^6 betreffende Aufgabe löst man constructiv einfach mit Hilfe der quadratischen Verwandtschaft mit x,y,z als Hauptpunkte, und in welcher C_4^6 dem Kegelschnitte k'_∞ entspricht.

Aus allem dem folgt:

Die Strictionslinien der beiden Regelschaaren eines einfachen Hyperboloides werden aus dem Mittelpunkte der Fläche durch eine Kegelfläche[1] 4. Ordnung, 6. Classe mit den drei Hauptaxen der Fläche als Doppelkanten projicirt. Die Tangentialebenen in den Doppelkanten sind Inflexionebenen der Kegelfläche.

Im Folgenden wird nur eine dieser Curven behandelt.

Die Strictionslinie ist also in unserem Falle eine rationale Curve 4. Ordnung, 6. Classe, 6. Rang, welche ganz in endlichen verläuft und die drei Hauptaxen der Fläche als Sehnen hat, die Schnitte von Schmiegungsebenen der Strictionslinie sind.

Bekanntlich schneidet jede Garade aus x z. B. C_4^6 in zwei Punkte a,a' so zwar, dass $(xa(yz)a') = -1$.

4. Die eben erwähnte Kegelfläche ist übrigens nicht die einzige, welche beide Strictionslinien aus der Fläche schneidet. Es gibt noch drei andere Kegelflächen 4. Ordnung, 6. Classe, deren vollständiger Durchschnitt mit R^2 die beiden Strictionslinien von R^2 sind. Die Spitzen dieser Kegelflächen sind die unendlich fernen Punkte x,y,z. Denn sei s_1 ein Punkt der einen Strictionslinie, so wird xs_1 z. B. die Fläche in noch einem Punkte s'_1 und die conjugirte Hauptebene in s''_1 schneiden; x,s_1,s_1'',s_1' werden nun aus o auf u_∞ als harmonische Punktreihe projicirt; dabei liegt

[1] Chasles „Corr. math. XI“ stellt die Gleichung dieser Kegelfläche auf, ohne sie näher zu discutiren und obige geometrische Deutung zu erwähnen.

die Projection von s_1 auf C_4^6, die von s_1'' auf $\overline{yz}$, also [vermöge der oben erwähnten Eigenschaft von C_4^3] die Projection von s_1' auch auf C_4^3.

Auf jede Hauptebene also werden die beiden Strictionslinien in ein und dieselbe Curve C_4' projicirt, welche einen Doppelpunkt mit reellen oder imaginären Inflexionstangenten im Mittelpunkte, zwei ebensolche im Unendlichen hat. C_4' berührt den Umrisskegelschnitt x der Regelfläche in den Endpunkten der Axen desselben und liegt orthogonal-symmetrisch zu jeder derselben. Durch Projection längs der imaginären Hauptaxe der Fläche entstanden, sieht C_4' wie eine Canninische Curve aus; längs der andern orthogonal projicirt wie eine Lemnincate.

5. Bekanntlich ist jede Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, welche gleichzeitig Inflexionspunkte sind, sich selbst involutorisch in Bezug auf jeden Doppelpunkt als Centrum und die Verbindungslinie der beiden anderen Doppelpunkte als Axe der Involution. Unsere Curve C_4^6, in welche die Strictionslinie von R^2 aus o projicirt wird, ist also auch involutorisch in Bezug auf jede Ecke des Polardreiecks x, y, z als Centrum und gegenüberliegende Seite als Axe der Involution. Daraus folgt z. B., dass die Inflexionstangenten von C_4^6, aus x etwa, durch die Seiten $\overline{xy}$ und $\overline{xz}$ harmonisch getrennt sind etc. C_4^3 ist am einfachsten als Erzeugniss einer quadratischen Involution auf k_∞ und einem ihr projectivischen Strahlenbüschel aus x, y oder z zu construiren, wie man unmittelbar einsieht.

Aus der erwähnten Eigenschaft von C_4^3 ergibt sich auch, dass die Strictionslinie in Bezug auf jede Hauptaxe der Fläche symmetrisch liegt; folglich auch ihre Devellopable und die Knotencurve derselben. Je zwei stationäre Schmiegungsebenen der Strictionslinie also müssen sich in einer Geraden schneiden, welche eine Hauptaxe rechtwinklig trifft; die vier Punkte der Strictionslinie, deren Tangenten die Curve noch einmal schneiden, liegen so, dass ihre Verbindungslinien die Hauptaxen senkrecht schneiden etc.

6. Die Tangente in einem Punkte s der Strictionslinie construirt man als Schnittlinie der Tangentialebene der Regelfläche in diesem Punkte und der Kegelfläche C_4^6 längs der Erzeugenden $\overline{os_1}$. Der unendlich ferne Punkt der Tangente von s_1 ist also der

Schnittpunkt der Geraden $\overline{pp''}$ mit der Tangente von C_4^3 in q. Die Tangenten der Strictionslinie in den Durchschnittspunkten der Hauptaxen mit R^2 schneiden die unendlich ferne Ebene in den Schnittpunkten der Inflexionstangenten von C_4^6 mit den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks x,y,z.

7. Die devellopable Fläche der Strictionslinie ist eine Fläche sechster Ordnung und Classe, welche von der unendlich fernen Ebene in einer Curve C_6^3, sechster Ordnung und Classe, mit vier Rückkehrpunkten in b_1,b_2,b_3,b_4 geschnitten wird. C_6^6 ist das Erzeugniss der Tangenten von C_4^6 mit den Polaren der Punkte von C_4^3 hinsichtlich $k_\infty - C_6^6$, ist daher auch involutorisch in Bezug auf jede Ecke von x,y,z als Centrum und gegenüberliegende Seite als Axe der Involution; sie hat 4 Inflexionstangenten, 6 Doppelpunkte und 6 Doppeltangenten.

Die sechs Doppelpunkte müssen zu je zwei auf einer Seite des Polardreiecks x,y,z liegen, die sechs Doppeltangenten paarweise durch die drei Ecken desselben Dreiecks gehen; und jedes dieser Paare ist durch die entsprechenden Elemente von x,y,z harmonisch getrennt. Denn wenn ein Punkt von C_6^6 auf einer Seite von x,y,z liegt, so muss er ein Doppelpunkt sein, oder seine Tangente durch den gegenüberliegenden Eckpunkt von x,y,z gehen; andererseits folgen aus jedem Doppelpunkte von C_6^6, welcher nicht auf einer Seite des Dreiecks x,y,z liegt, drei weitere.

8. Durch jeden Punkt (μ) unserer Raumcurve gehen zwei Erzeugende der Regelfläche, von denen eine E noch zwei, die andere E' aber keinen Punkt mehr mit der Strictionslinie gemein hat. Weist man jedem Punkte (μ) den Schnittpunkt u von E' mit irgend einem Kegelschnitte k auf R^2 zu, so ist die Strictionslinie auf k eindeutig abgebildet. Die Bilder der drei Punkte, welche irgend eine Erzeugende E mit der Strictionslinie gemein hat, bilden die Tripel einer cubischen Involution auf k, deren Involutionskegelschnitt J sein möge. Mit Hilfe dieser Abbildung kann man leicht die vier Tangenten der Strictionslinie bestimmen, welche ganz auf R^2 liegen, die vier stationären Schmiegungsebenen und Tangenten- und Schmiegungsebenen in gegebenen Punkten dieser Curve einfach bestimmen.[1]

[1] Prof. Dr. Weyr. K. Akad. d. W. B. 72, 1875.

Durch eine Gerade, welche Sehne der Strictionslinie ist, sind die Punkte derselben involutorisch gepaart, also auch die von k; die Punktquadrupel, welche mit einer beliebigen Geraden des Raumes in je einer Ebene liegen, bilden eine Involution vierten Grades; die biquadratische Involution ihrer Bilder auf k erzeugt bekanntlich eine allgemeine Curve dritter Classe. Daher bilden sämmtliche Sehnen der Strictionslinie, die eine der Curve schneiden, eine Regelfläche dritten Grades, von welcher die gegebene Sehne Doppellinie ist.

Die sämmtlichen Sehnen, welche eine Hauptaxe z. B. $\overline{ox}$ schneiden, bilden also, wie man aus der Figur sofort einsieht, ein senkrechtes Convid dritten Grades, deren zweite Leitlinie die unendlich ferne Gerade $\overline{yz}$ ist.

Dieses Convid ist sehr einfach zu zeichnen, da die 1, 2deutige Verwandtschaft zwischen $\overline{ox}$ und $\overline{yz}$ leicht herzustellen ist.

Jeder Sehne $[(\mu)(\mu')]=(S)$ entspricht vermöge der Abbildung eine Gerade $S=(\mu\mu')$ der Ebene des Kegelschnittes k. Heissen μ_1, μ_2 und μ_1', μ_2' die begleitenden Punkte zu μ und μ' in der oben erwähnten cubischen Involution auf k, und ist σ der Schnittpunkt von $\overline{\mu_1\mu_2}$ und $\overline{\mu_1\mu_2'}$, dann ist jedem S ein σ beigeordnet, die Verwandtschaft zwischen S und σ ist eine reciproke und die Bilder sämmtlicher Sehnen, welche (S) schneiden, müssen durch σ gehen. Wir können nun auch sagen, dass drei Geraden S, S_1, S_2 in der Ebene von k, dann Bilder von drei sich in einem Punkte des Raumes schneidenden Sehnen der Raumcurve sein werden, wenn S, S_1, S_2 ein Dreieck bilden, dessen Ecken den gegenüberliegenden Seiten beigeordnet sind.

9. Es dürfte vielleicht an dieser Stelle nicht unstatthaft sein, zu zeigen, wie sich auch ein Hauptsatz der Theorie der rationalen Raumcurven 4. Ordnung mittelst der so fruchtbaren Abbildung auf einen Kegelschnitt sehr einfach beweisen lässt.

Jede Sehne (S) der Raumcurve wird (ausser in den Curvenpunkten) von zwei Tangenten der Raumcurve geschnitten, wie man aus der Abbildung sieht. Ist $(S)=[(\mu)(\mu')]$ aber eine Sehne, die als Schnitt zweier Schmiegungsebenen erscheint, dann müssen diese beiden Tangenten durch (μ) respective (μ') gehen; daher muss also (frühere Bezeichnung beibehalten) σ nicht nur im Schnitt

$\overline{\mu_1\mu_2}$ und $\overline{\mu_1'\mu_2'}$ sein, sondern auch der der Tangenten von k in μ und μ'.

Andererseits muss auch (Weyr a. a. O.) für diese ausgezeichnete Sehne, S durch die Berührungspunkte von $\overline{\mu_1\mu_2}$ und $\overline{\mu_1'\mu_2'}$ mit J^2 gehen. σ muss also ein gemeinschaftlicher Pol, S eine gemeinschaftliche Polare von K und J sein, und umgekehrt. Daher sieht man, dass es drei Sehnen, durch einen Punkt des Raumes gibt, welche Schnitte von Schmiegungsebenen sind; diese drei Sehnen werden in jedem Falle als gemeinschaftliches Polardreieck von K und J abgebildet. Der erste Theil dieses Satzes wurde von Bertini[1] bewiesen, der zweite lehrt diese ausgezeichneten Sehnen leicht construiren und zeigt auch, dass ihr Schnittpunkt o nur von der Schaar 3punktiger Sekanten abhängt.

Nehmen wir jenen Kegelschnitt zum Abbildungskegelschnitt, der auf der einzigen durch die Raumcurve gehenden Fläche zweiten Grades und in der Polarebene A von o hinsichtlich eben dieser Fläche liegt, dann müssen offenbar die Schnittpunkte dieses Dreiecks aus o mit A zusammenfallen mit den Ecken jenes Dreiecks, in welches sie nach obiger Methode abgebildet werden. Damit ist der Satz von Migotti[2] nachgewiesen, zugleich aber auch ein früher bewiesener Satz der Strictionslinie der Fläche zweiten Grades auf allgemeine rationale Raumcurven vierter Ordnung C_4 übertragen. Es lassen sich natürlich noch alle anderen übertragen. z. B. Nennen wir o,x,y,z jenes Polartetraeder der Quadrifläche durch C_4, wovon $\overline{ox}$, $\overline{oy}$, $\overline{oz}$ die drei Sehnen von C_4 sind, die als Schnitte von Schmiegungsebenen von C_4 auftreten, dann gilt der Satz: Jene vier Kegelflächen, welche C_4 aus respective o,x,y,z projiciren, schneiden sich noch (ausser in $\overline{ox}$, $\overline{oy}$, $\overline{oz}$) in einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung, welche mit C_4 auf derselben Fläche zweiten Grades liegt.

Eine rationale Raumcurve vierter Ordnung mit zwei stationären Tangenten hat unendlich viele Tripel von Sehnen, welche Schnitte von Schmiegungsebenen sind; sie liegen sämmtlich auf einer Regelfläche dritten Grades, von welcher die Verbindungslinie der Berührungspunkte der stationären Tangenten-Doppellinie und ihre Polare hinsichtlich R^2 zweite Leitlinie ist.

---

[1] Rendicondi del reale instituto 1872.

[2] K. Akad. d. W. 79. Bd., 1879.

10. Es zeigte sich auf Seite 369, dass man den Strictionspunkt einer Erzeugenden auch als den Centralpunkt einer gewissen quadratischen Involution auf jener Erzeugenden ansehen kann. Die Doppelpunkte dieser Involution nannten wir d_1 und d_2 und es frägt sich, welche Curve die Gesammtheit dieser Doppelpunkte d_1 und d_2 für alle Erzeugenden der beiden Systeme bilden.

Man bestimmt die Doppelpunkte d_1 und d_2 der zwei sich in p und k_∞ schneidenden Erzeugenden E_1 und E_2 als Tangentialpunkte der Ebenen $\overline{E_1 T_1}$, $\overline{E_1 T_2}$ und $\overline{E_2 T_1}$, $\overline{E_2 T_2}$, wobei T_1 und T_2 die Tangenten von i_∞ aus p sind. Schneiden T_1 und T_2 ausser in p den Kegelschnitt k_∞ noch in π_1 und π_2, so geben also die Schnittpunkte der Tangenten von k_∞ in p mit denen in π_1 und π_2 aus o projicirt die Doppelpunkte d_1 und d_2 von E_1 und E_2. Da die Verwandtschaft zwischen p und π_1, π_2 auf k_∞ eine symmetrisch zweiten Grades, also ihr Erzeugniss ein Kegelschnitt ist, so ergibt sich sofort: Die Doppelpunkte der Involution auf jeder Erzeugenden beider Schaaren eines Hyperboloids, als deren Centralpunkt der Strictionspunkt der Erzeugenden auftritt, bilden eine Raumcurve vierter Ordnung, erster Art, welche aus dem Mittelpunkte der Fläche durch eine Kegelfläche zweiten Grades projicirt wird.

11. Für das Rotationshyperboloid mit reellem Erzeugenden berührt k_∞ und daher auch k'_∞ den unendlich fernen imaginären Kugelkreis i_∞ in den Punkten i_1 und i_2. Die Construction bleibt dieselbe. C_4^6 zerfällt in $\overline{i_1 i_2}$ und die beiden Tangenten in i_1 und i_2 von i_∞.

Daher: Die Strictionslinie eines einschaligen Rotationshyperboloides besteht aus dem Kehlkreise (doppelt gezählt) desselben und aus den zwei imaginären Erzeugendenpaaren, welche in den Tangentialebenen aus der Rotationsaxe liegen.

II.

Strictionslinien am Paraboloid.

1. Für das Paraboloid bleibt die Construction der Strictionslinie im Wesen dieselbe; k_∞' reducirt sich aber auf zwei Punkte u_1 und u_2, die Pole der unendlich fernen Erzeugenden U_1 und U_2 des Paraboloides. Sämmtliche Linien, welche Linien kürzester Entfernung für je zwei aufeinanderfolgende Erzeugende sind,

bilden also zwei dem Paraboloid aus u_1 respective u_2 umschriebene Kegelflächen, deren Berührungskegelschnitte (doppelt gezählt) die Strictionslinien der Fläche repräsentiren.

Also: Die Strictionslinie am hyperbolischen Paraboloid bilden zwei Parabeln, die sich in der Hauptaxe schneiden und durch die Scheiteltangenten der Fläche harmonisch getrennt sind. Jede derselben ist von den Richtebenen des Paraboloides durch die senkrechte auf einer derselben harmonisch getrennt.

2. Ist das hyperbolische Paraboloid ein gleichseitiges, so fällt u_1 auf U_2 und u_2 auf U_1. Die oben erwähnten Kegelflächen zweiten Grades werden zu Strahlenbüscheln, die Strictionslinie zu Geraden.

Es folgt daraus:

Die Strictionslinien am gleichzeitgen hyperbolischen Paraboloid sind die beiden sich im Scheitel desselben schneidenden Erzeugenden der Fläche und die beiden unendlich fernen Geraden des Paraboloids. Jede der ersteren schneidet jeden Strahl des anderen Systems rechtwinklig.

III.

Von ganz besonderem Interesse ist die Abbildung der Strictionslinie auf den Kehlkreis x des Hyperboloids, dessen reellen Axen a und b und dessen imaginäre c sein möge. Die Schaar dreipunktiger Sehnen der Strictionslinie bestimmen wieder eine Involution dritten Grades auf x; der Involutionskegelschnitt habe die Axen A und B, wobei nach Früherem A auf a und B auf b fällt. A und B lassen sich leicht berechnen, wenn man das Resultat von Chasles benützt, der die Strictionslinie am Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

als Durchschnitt desselben mit der oben näher untersuchten Kegelfläche:

$$a^6(b^2+c^2)^2y^2z^2 + b^6(c^2+a^2)z^2x^2 - c^6(a^2-b^2)x^2y^2 = o$$

fand.

Man findet, wenn man oben entwickelte Sätze benützt

$$A = a \cdot \frac{a^4(b^2+c^2)^2 + b^4(c^2+a^2)^2 - c^4(a^2-b^2)^2}{a^4(b^2+c^2)^2 - b^4(c^2+a^2)^2 + c^4(a^2-b^2)^2}$$

$$B = b\cdot\frac{a^4(b^2+c^2)^2+b^4(c^2+a^2)^2-c^4(a^2-b^2)^2}{a^4(b^2+c^2)^2+b^4(c^2+a^2)^2+c^2(a^2-b^2)^2}.$$

Wenn $A=a$, dann hat die Strictionslinie in den Endpunkten der Axe a stationäre Tangenten. Man findet also:

Die Strictionslinie auf einem einschaligen Hyperboloide hat in den Endpunkten der reellen Axe a stationäre Tangenten, wenn:

$$(c^2-b^2)a^2=2c^2b^2.$$

Die eine Axe des Involutionskegelschnittes ist dann a, die zweite $2b$.

Analog für die beiden anderen Axen des Hyperboloides.

Mit Hilfe des Involutionskegelschnittes kann man bekanntlich die Bilder der vier stationären Schwingungsebenen und die der vier Punkte der Strictionslinie construiren, deren Tangente dieselben noch einmal schneiden. Haben die letzteren in Bezug auf a, b die rechtwinkligen Coordinaten α, β, so ist:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\pm\frac{a}{b}\sqrt{\frac{B^2-b^2}{a^2-A^2}}.$$

Sie sind also ebenso wie die Axen A, B des Involutionskegelschnittes einfach zu construiren und zwar nur mit Hilfe des Zirkels und des Lineals.

Durch die Strictionslinie ist auf dem Kehlkreise eine ein-, dreideutige Verwandtschaft hergestellt. Je vier Punkte, welche einander in dieser Verwandtschaft entsprechen, müssen, wie aus dem Vorhergehenden (p. 371) folgt, auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen, die durch den Mittelpunkt des Kehlkreises geht, und deren unendlich ferne Punkte in die Richtungen von a und b fallen.

Von diesem Satze lässt sich auch Anwendung zur einfachen Construction der Strictionslinie machen.

IV.

Die Strictionslinie auf einer Regelfläche dritten Grades.

Die Strictionslinie auf einer Regelfläche dritten Grades ist von der achten Ordnung; daher liegen sieben ihrer Punkte auf der Doppellinie der Regelfläche, sechs auf der einfachen Leitlinie Jede Erzeugende der Fläche, welche durch einen der sieben

Punkte der Strictionslinie auf der Doppellinie geht, ist Tangente der Strictionslinie in diesem Punkte; die Strictionslinie ist daher vom 14. Range; da sie ausserdem rational ist, und keine stationären Punkte bei ihr vorkommen können, so kann man leicht mit Hilfe der Cayley'schen Formeln ihre übrigen Charaktere ableiten: sie ist von der 18. Classe, mit 21 scheinbaren Doppelpunkten und 20 stationären Schmiegungsebenen; die Classenzahl ihrer doppelt umschriebenen Devellopablen ist 60, die Ordnungszahl ihrer Knotencurve 90; in jeder Ebene liegen 116 Geraden, die Schnitte von Schmiegungsebenen der Strictionslinie sind. Doppelpunkte und höhere Singularitäten können bei der Strictionslinie auf einer Regelfläche dritten Grades nicht vorkommen. Im Allgemeinen ist die Strictionslinie von demselben Geschlechte wie die Regelfläche, der sie angehört.

Neue Eigenschaften der Normalenflächen für Flächen zweiten Grades längs ebener Schnitte.

Vom k. k. Regierungsrath Dr. **Gustav Ad. V. Peschka,**
ord. öffentl. Hochschul-Professor in Brünn.

(Mit 8 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Jänner 1882.)

Als Anschluss an die in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften, Band LXXXI, Abth. Mai-Heft, Jahrg. 1880, enthaltene Abhandlung über „Normalenflächen längs ebener Flächenschnitte" beehrt sich der Verfasser eine Reihe neuer interessanter Eigenschaften folgen zu lassen, zu deren Kenntniss er durch fortgesetzte Forschung gelangte. Die hier niedergelegten Sätze beziehen sich grossentheils auf die Doppeltangentialebene der Kegelfläche und die in derselben liegenden, der Normalenfläche angehörenden Kegelschnitte, auf die Doppelcurve etc. und dürften die angestellten Untersuchungen, so wie die erzielten Resultate von umso grösserem Interesse sein, als das wichtige Capitel der Normalenflächen in der Literatur der darstellenden und synthetischen Geometrie ganz ungerechtfertigt vernachlässigt erscheint.

Wir nehmen die Ebene des Schnittes wieder als horizontale Projectionsebene an und führen die zugehörige verticale Projectionsebene durch eine der beiden Hauptaxen, etwa durch die Axe AB, Fig. 1, des Leitkegelschnittes K. Ferner seien (SS') die Scheitelprojectionen des der Leitfläche zweiten Grades, längs des Kegelschnittes K, umschriebenen Kegels.

Die fragliche Normalenfläche ist sodann, wie bereits nachgewiesen wurde, identisch mit der Normalenfläche des Kegels (S, K) längs der Curve K. Ebenso wurde gezeigt[1], dass diese

[1] Peschka, Beitrag zur Theorie der Normalenflächen. Sitzgsber. d. Kais. Akad. d. Wissensch. Wien 1880.

Normalenfläche eine Doppelcurve dritter Ordnung besitze und dass daher auch die doppeltberührende Developpable, das ist jene, welche von den Ebenen je zweier sich schneidenden Erzeugenden umhüllt wird, von der dritten Classe sei.

Ferner fanden wir, dass die vorliegende Normalenfläche das Erzeugniss zweier projectivischen Punktreihen sei, wovon die eine auf dem Leitkegelschnitte K, die andere dagegen auf jenem unendlich fernen Kegelschnitte K_u liegt, welcher sich als polarreciproke Figur des unendlich fernen Kegelschnittes des Kegels (S, K) in Bezug auf den imaginären Kugelkreis ergibt.

Die unendlich ferne Ebene schneidet mithin die Normalenfläche ausser in dem Kegelschnitte K_u noch in zwei Erzeugenden und zwar in jenen, welche die unendlich fernen (reellen oder imaginären) Punkte von K mit den ihnen entsprechenden Punkten von K_u verbinden.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass sich unter den Ebenen, welche die doppeltberührende Developpable der Normalenfläche umhüllen, auch die unendlich ferne Ebene befindet.

Nachdem die Cuspidalcurve einer Developpablen dritter Classe immer eine Raumcurve dritter Ordnung ist und dieselbe im vorliegenden Falle von der unendlich fernen Ebene osculirt wird, so ist dieselbe eine cubische Parabel.

Hieraus folgt der Satz: 1. „Die Cuspidalcurve der doppeltberührenden Developpablen der vorliegenden Normalenfläche ist eine cubische Parabel.“

Eine eingehendere Betrachtung der doppeltberührenden Developpablen führt anstandslos zu weiteren Eigenschaften der Normalenfläche.

Es wird, wie wir wissen, eine Developpable dritter Classe von jeder ihrer Berührungsebenen ausser in der Berührungserzeugenden noch in einem Kegelschnitte getroffen, oder mit anderen Worten: die Schnittlinien einer von den Berührungsebenen mit allen anderen umhüllen einen Kegelschnitt.

Im vorliegenden Falle ist auch die unendlich ferne Ebene eine Berührungsebene der Developpablen; dieselbe schneidet jede andere Berührungsebene in einer unendlich fernen Geraden, das heisst: der Schnitt, einer jeden Berührungsebene mit der Developpablen ist unter den obwaltenden Verhältnissen immer eine

Parabel, und folglich gilt, mit Beziehung auf die doppeltberührende Developpable der Normalenfläche, der Satz:

2. „Eine jede doppeltberührende Ebene der Normalenfläche wird von sämmtlichen anderen doppeltberührenden Ebenen in Geraden geschnitten, welche eine Parabel umhüllen."

In der erstangeführten Abhandlung wurde speciell nachgewiesen, dass die Ebene des Leitkegelschnittes gleichfalls eine doppeltberührende Ebene der Normalenfläche sei, indem diese jene beiden Normalen des Kegels (S, K) enthält, deren Fusspunkte die Berührungspunkte der von S' aus an K' gezogenen Tangenten sind; ferner wurde gezeigt, dass die horizontalen Traçen aller doppeltberührenden Ebenen eine Parabel umhüllen, welche auch von der Polare des Punktes S' in Bezug auf K', von den Normalen des Kegelschnittes K' in den Schnittpunkten mit dieser Polare und von den Axen des Leitkegelschnittes berührt wird, wie dies nun auch aus dem eben bewiesenen Satze hervorgeht.

In dem Vorliegenden wollen wir noch andere besondere Lagen doppeltberührender Ebenen und die in denselben sich vorfindenden Parabeln einer eingehenderen Betrachtung unterziehen.

Zunächst ist einleuchtend, dass die vertikale Projectionsebene, welche wir durch die eine Axe AB, Fig. 1, des Leitkegelschnittes gehend voraussetzten, eine doppeltberührende Ebene der Normalenfläche sei; denn dieselbe enthält die Normalen M_0 und N_0 des Leitkegelschnittes (S, K) in den Endpunkten A und B der einen Kegelschnittsaxe.

Es werden sonach die Verticaltraçen der sämmtlichen doppeltberührenden Ebenen der Normalenfläche ebenfalls eine Parabel umhüllen. Von den Tangenten dieser Parabel sind folgende hervorzuheben:

a) Die Axe AB selbst, als Schnitt der verticalen Projectionsebene mit der den Leitkegelschnitt K enthaltenden doppeltberührenden Ebene.

b) Die durch den Mittelpunkt O des Leitkegelschnittes senkrecht zur horizontalen Projectionsebene gezogene Gerade OZ. Letztere ist bekanntlich die Verticaltraçe der durch die zweite Kegelschnittsaxe (CD, CD') gehenden Ebene, welche, indem sie

die durch die Axenendpunkte (CC' und DD') gehenden Erzeugenden enthält, gleichfalls eine doppeltberührende Ebene der Normalenfläche darstellt.

c) Die Erzeugenden M_v und N_v der Normalenfläche. Da nämlich jede Erzeugende der Normalenfläche von zwei anderen Erzeugenden geschnitten wird, also durch eine jede Erzeugende der Normalenfläche zwei doppeltberührende Ebenen gehen, so stellt sowohl M_v als auch N_v die Verticaltraçe je einer doppeltberührenden Ebene, also eine Tangente der Parabel vor.

Durch die vier Tangenten AB, OZ, M_v und N_v ist die Parabel vollkommen bestimmt.

Setzen wir voraus, es sei E_vE_h (Fig. 1) eine beliebige doppeltberührende Ebene. Die Verticaltraçe E_v ist eine Tangente der Parabel.

Es ist bekannt, dass eine veränderliche Tangente einer Parabel von drei festen Tangenten derselben in drei Punkten geschnitten wird, deren Distanzen in einem constanten Verhältnisse stehen.

Bezeichnen wir die Schnittpunkte von E_v mit M_v, N_v und OZ durch m, n und r, so ist offenbar das Verhältniss $\frac{mr}{nr}$ jenem von $\frac{AO}{BO}$ gleich, oder weil $AO = BO$ ist, wird auch $mr = nr$, welches auch die Lage von E_v sei, wenn nur E_v die Verticaltraçe einer doppeltberührenden Ebene dargestellt.

Nun sind aber m und n die Schnittpunkte der doppeltberührenden Ebene E_v E_h mit den Erzeugenden M_v und N_v der Normalenfläche, deren horizontale Projectionen m' und n' auf AB liegen und von O' gleichweit ertfernt sind.

Offenbar ergeben sich genau dieselben Beziehungen auch für die Schnittpunkte (kk') und (ll') der in der Ebene (OZ, CD) liegenden Erzeugenden (KK') und (LL') mit der Ebene E_vE_h. Selbstverständlich ist auch hier $O'k' = O'l'$, wie es schon aus dem Umstande hervorgeht, dass wir gleich ursprünglich die durch CD gehende verticale Ebene als verticale Projectionsebene wählen und hierfür den nämlichen Beweisgang wie im Vorhergehenden einhalten konnten.

Aus der Gleichheit von $O'm'$ und $O'n'$; $O'k'$ und $O'l'$ lässt sich mit Leichtigkeit ein interessanter Satz ableiten.

Eine jede doppeltberührende Ebene der Normalenfläche enthält ausser den beiden sie bestimmenden Erzeugenden noch einen Kegelschnitt, nämlich den Ort der Durchstosspunkte mit allen anderen Erzeugenden der Fläche.[1] Die doppeltberührende Ebene E_hE_v schneidet die Normalenfläche nach einem Kegelschnitt, von welchem bereits vier Punkte und zwar die Schnittpunkte (mm'), (nn'), (kk') und (ll'), Fig. 1, dieser Ebene mit den vier Erzeugenden (M_vM_v'), (N_vN_v'), (KK'), und (LL') bekannt sind.

Die horizontale Projection dieses Kegelschnittes geht daher durch die vier Punkte m', n', k' und l'.

Es ist leicht einzusehen, dass der Mittelpunkt O' des Leitkegelschnittes in Folge der Gleichheit von $O'm'$ und $O'n'$, $O'k'$ und $O'l'$ zugleich der Mittelpunkt dieser Horizontalprojection sein müsse oder mit anderen Worten, dass der Mittelpunkt O' des Kegelschnittes, in welchem die Normalenfläche von der Ebene E_vE_h getroffen wird, auf der durch O gehenden horizontalprojicirenden Geraden OZ liegen werde.

Da von der Ebene E_vE_h nichts anderes vorausgesetzt wurde, als dass sie durch zwei sich schneidende Erzeugende der Normalenfläche gehe und die Fläche demgemäss noch einen Kegelschnitt schneidet, so folgt, dass das Gleiche für alle doppeltberührenden Ebenen der Normalenfläche gilt.

Umgekehrt sind aber alle Ebenen, welche durch die auf der Normalenfläche liegenden Kegelschnitte gehen, doppeltberührende Ebenen der Fläche. Hieraus folgt der Satz:

3. „Die Mittelpunkte aller auf der Normalenfläche liegenden Kegelschnitte sind auf jener Geraden gelegen, welche durch den Mittelpunkt des Leitkegelschnittes geht und zur Ebene desselben senkrecht steht."

Ebenso leicht läst sich auch nachweisen, das $m'n'$ und $k'l'$, Fig. 1, die Hauptaxen der horizontalen Projection jenes Kegelschnittes darstellen.

Zwei beliebige auf der Normalenfläche liegende Kegelschnitte sind vermittelst der Erzeugenden der Normalenfläche projectivisch auf einander bezogen. Im vorliegenden Falle ent-

[1] Peschka. Normalenflächen 1880.

sprechen sich die Punkte (AA') und (mm'), da sie auf der nämlichen Erzeugenden $(M_v M_v')$ liegen; ebenso die Punkte (BB') und (nn'); (CC') und (kk'), (DD') und (ll'). Die unmittelbar auf M_v folgende Erzeugende der Normalenfläche schneidet die beiden Kegelschnitte in zwei Punkten $(\alpha\alpha')$ und $(\mu\mu')$, welche beziehungsweise unendlich nahe den Punkten (AA') und (mm') liegen. Überdies entsprechen sich die Punkte $(\alpha\alpha')$ und $(\mu\mu')$ auf den beiden Kegelschnitten.

Die Geraden $(\alpha A, \alpha' A')$ und $(m\mu, m'\mu')$ sind Tangenten derselben zwei Kegelschnitte.

In Folge der projectivischen Beziehung der fünf Punkte $A'\alpha'B'C'D'$ zu den fünf Punkten $m'\mu'n'k'l'$ müssen die vier Strahlen $A'\alpha'$, $A'B'$, $A'C'$ und $A'D'$ dasselbe Doppelverhältniss wie die vier Strahlen $m'\mu'$, $m'n'$, $m'k'$ und $m'l'$ besitzen, und da das Doppelverhältniss der ersteren ein harmonisches ist, so muss auch jenes der letzteren ein ebensolches sein, das heisst: die Gerade $m'\mu'$ (Tangente) muss senkrecht zu $m'n'$ stehen.

Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass die Gerade $m'n'$ und $k'l'$ die Axen der horizontalen Projection des in der doppeltberührenden Ebene $E_v E_h$ liegenden Kegelschnittes der Normalenfläche sind; daher der Satz:

4 *a*. „Die orthogonalen Projectionen der sämmtlichen auf der Normalenfläche liegenden Kegelschnitte auf die Ebene der Leitcurve sind concentrische Kegelschnitte mit den nämlichen Axen; die gemeinschaftlichen Hauptaxen aller dieser Projectionen sind gleichzeitig die Hauptaxen des Leitkegelschnittes;" oder:

4 *b*. „Die Ebenen, welche durch die Hauptaxen des Leitkegelschnittes senkrecht zur Ebene desselben geführt werden, schneiden die Ebene eines jeden auf der Normalenfläche liegenden Kegelschnittes in zwei Geraden, welche conjugirte Durchmesser des letzteren repräsentiren."

Eine sehr wichtige Eigenschaft einer Developpablen dritter Classe besteht bekanntlich darin, dass die Schnittgeraden zweier Paare ihrer Berührungsebenen von allen anderen Berührungsebenen in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten werden.

Ist auch die unendlich ferne Ebene eine Berührungsebene der Developpablen, so entsprechen sich die unendlich fernen Punkte in den beiden Reihen, das heisst: sie sind insbesondere ähnlich.

Diese Eigenschaft lässt sich sehr einfach auf die Normalenfläche übertragen.

Da eine jede Erzeugende der Normalenfläche von zwei anderen Erzeugenden geschnitten wird, so kann dieselbe stets als Schnittgerade zweier doppeltberührender Ebenen der Normalenfläche betrachtet werden.

Nachdem andererseits die Enveloppe aller doppeltberührenden Ebenen der Normalenfläche eine Developpable dritter Classe ist, so folgt, dass zwei beliebige, also überhaupt alle Erzeugenden der Normalenfläche von den doppeltberührenden Ebenen in ähnlichen Punktreihen geschnitten werden müssen.

Erwägt man aber, dass der Schnittpunkt einer Erzeugenden der Normalenfläche mit einer doppeltberührenden Ebene ein Punkt des Kegelschnittes ist, in welchem diese Ebene die Normalenfläche schneidet, so lässt sich die eben gefundene Eigenschaft in folgenden Satz kleiden:

5*a*. „Das System der doppelt-berührenden Ebenen der Normalenfläche, oder was dasselbe ist, das System der auf der Fläche liegenden Kegelschnitte, schneidet die Erzeugenden der Normalenfläche in ähnlichen Punktreihen;“ oder:

5*b*. „Die Stücke sämmtlicher Erzeugenden der Normalenfläche zwischen drei auf der Fläche liegenden Kegelschnitten stehen in einem constanten Verhältnisse“.

Der dem obigen Satze dual gegenüberstehende Satz wird sich nun ohne weitere Schwierigkeit feststellen lassen.

Der doppeltberührenden Ebene entspricht dual der Schnittpunkt zweier Erzeugenden, das ist ein Punkt der Doppelcurve der Normalenfläche.

An die Stelle der Punktreihe, welche sämmtliche doppelt berührenden Ebenen auf einer Erzeugenden der Normalenfläche bestimmen, tritt das Ebenenbüschel, welches zur Axe eine Erzeugende besitzt und dessen Ebenen durch die Punkte der Doppelcurve gehen. Man erhält sonach den reciproken Satz:

6. „Die Punkte der Doppelcurve der Normalenfläche werden aus sämmtlichen Erzeugenden der Normalenfläche durch projectivische Ebenenbüschel projicirt.“

Berücksichtigt man, dass auf jeder Erzeugenden der Normalenfläche zwei Punkte der Doppelcurve liegen, das heisst, dass eine jede Erzeugende der Normalenfläche eine zweipunktige Secante der Doppelcurve ist, so findet man, dass der eben aufgestellte Satz eine allgemeine Eigenschaft einer jeden Raumcurve dritter Ordnung ausspricht.

Der vorhergehende Satz führt zu einer einfachen Construction desjenigen Kegelschnittes auf der Normalenfläche, welcher durch einen auf der Fläche angenommenen Punkt gehen soll.

Setzen wir zu diesem Zwecke voraus, es sei (KK') Fig. 2 die Leitcurve der Normalenfläche, während (SS') die Projectionen des Kegelscheitels darstellen mögen.

Denken wir uns eine Erzeugende (NN') der Normalenfläche construirt und auf derselben einen Punkt (pp') angenommen. Es ist derjenige Kegelschnitt auf der Normalenfläche zu bestimmen, welcher durch den gegebenen Punkt (pp') geht.

Die verticale Ebene $V_v V_h$, welche durch die Axe ($\gamma'_1\gamma'_2, \gamma_1\gamma_2$) des Leitkegelschnittes geht, ist, wie wir bereits wissen, eine doppeltberührende Ebene; dieselbe wird von der Erzeugenden (NN') in einem Punkte getroffen, dessen verticale Projection durch b dargestellt werde.

Die Ebene H des Leitkegelschnittes ist gleichfalls eine doppeltberührende Ebene der Normalenfläche; diese wird von der Normalen (NN') in dem Punkte (aa') getroffen.

Bezeichnen wir endlich diejenige doppeltberührende Ebene, welche den zu suchenden Kegelschnitt enthalten soll und demgemäss die Erzeugende (NN') in dem angenommenen Punkte (pp') trifft, mit E, so folgt aus dem obigen Satze, dass jede Erzeugende der Normalenfläche von den drei Ebenen V, H und E in drei Punkten geschnitten wird, deren einfaches Theilverhältniss constant, und zwar dem Theilverhältnisse der drei bekannten Punkte a, b und p gleich ist. Dies vorausgeschickt gelangen wir folgendermassen zur Construction der Ebene E.

Man bestimmt zunächst die beiden Erzeugenden M_v und N_v der Normalenfläche, welche in der verticalen Projectionsebene liegen. Die erstere M_v, Fig. 2, trifft die Ebenen V und H beziehungsweise in den Punkten β_1 und α_1.

Auf M_v ist nun der Punkt π_1 so zu construiren, dass durch ihn die Streke $\alpha_1\beta_1$ in dem nämlichen Verhältnisse und Sinne getheilt wird, wie die Strecke $a\ b$ durch p. Es muss also:

$$\frac{\alpha\pi_1}{\beta_1\pi_1} = \frac{ap}{bp}$$

sein, was wir auf nachstehende Weise bewerkstelligen.

Man verbindet b mit α_1 und schneidet die Verbindungsgerade durch eine zu $\alpha_1\alpha_2$ und durch p gehende parallele Gerade in p_1; der so erhaltene Punkt p_1 wird parallel zu $\beta_1\beta_2$ auf M_v nach π_1 projicirt. Hiernach ist:

$$\frac{\alpha_1\pi_1}{\beta_1\pi_1} = \frac{\alpha_1 p_1}{bp_1} = \frac{ap}{bp}.$$

Es wird somit der Punkt π_1 ein Punkt der Erzeugenden M_v sein, welcher mit den Punkten α_1 und β_1 das nämliche Theilverhältniss wie der Punkt p mit den Punkten a und b besitzen wird. Der Punkt π_1 gehört daher der Ebene E an und ist insbesondere ein Punkt ihrer Verticaltraçe, nachdem derselbe in der verticalen Projectionsebene liegt.

In analoger Weise findet man den Punkt π_2, in welchem die Verticaltraçe der Ebene E die zweite in der verticalen Projectionsebene liegende Erzeugende N_v schneidet.

Die Vertikaltraçe E_v ergibt sich demgemäss als Verbindungsgerade der Punkte π_1 und π_2, und da die Ebene E selbst durch den Punkt (pp') gehen soll, so ist es jetzt ein Leichtes die Horizontaltraçe E_h festzustellen.

Man kann jedoch mit Berücksichtigung des vorher angeführten Satzes auch zwei Punkte der Horizontaltraçe E_h direct finden.

Besagte Traçe trifft nämlich die in der horizontalen Projectionsebene liegenden Erzeugenden X und Y in zwei Punkten

ξ und η derart, dass das zwischen den Ebenen H und V liegende Stück x_1y_1 respective x_2y_2 in dem Verhältnisse:

$$\frac{\xi x_1}{\xi y_1} = \frac{\eta x_2}{\eta y_2} = \frac{pa}{pb}$$

getheilt wird.

Nachdem nun die durch den Punkt (pp') gehende doppeltberührende Ebene E_vE_h bekannt ist, kann ohne Schwierigkeit der in derselben liegende Kegelschnitt $(\Sigma\Sigma')$ Fig. 1. der Fläche verzeichnet werden, indem man die Schnittpunkte der doppeltberührenden Ebene mit den einzelnen Lagen der Erzeugenden bestimmt.

Noch einfacher dürfte jedoch folgende Construction zum Ziele führen.

Nach Satz 4) dieser Abhandlung ist die horizontale Projection Σ', Fig. 1. des Kegelschnittes wieder ein Kegelschnitt, welcher dieselben Hauptaxen wie der Leitkegelschnitt (KK') besitzt.

Die Endpunkte der einen Axe sind bekanntlich die horizontalen Projectionen π'_1 und π'_2 (Fig. 2), jener Punkte π_1 und π_2, in welchen die doppeltberührende Ebene E_vE_h die in der verticalen Projectionsebene liegenden Erzeugenden M_v und N_v schneidet. Ferner ist p' ebenfalls ein Punkt von Σ', wodurch dieser Kegelschnitt vollkommen bestimmt erscheint.

Mit Zuhilfenahme des über $\pi'_1\pi'_2$ als Durchmesser gezeichneten zu Σ' affinen Kreises σ, lässt sich mit Leichtigkeit die zweite Axe $\pi'_1\pi'_2$ von Σ', als auch die Tangente t' von Σ' im Punkte p' auf bekannte Weise construiren. Die verticale Projection t der Tangente lässt sich nun, da selbe in der Ebene E_vE_h liegt, aus der horizontalen Projection t' anstandslos ableiten.

Legt man nun durch die Erzeugende (NN') und die Tangente (tt') eine Ebene B_vB_h, so berührt diese die Normalenfläche in dem angenommenen Punkte (pp').

Aus den vorhergegangenen Erörterungen folgt ein besonderer Satz bezüglich der Tangente der Kegelschnitte in Punkten, welche auf der nämlichen Erzeugenden liegen.

Betrachten wir zum Zwecke der Feststellung des angedeuteten Satzes zwei unmittelbar auf einander folgende Erzeugende e_1 und e_2 der Normalenfläche. Besagte Erzeugenden werden von

den auf der Normalenfläche liegenden Kegelschnitten $K_a, K_b, K_c \ldots$. auf Grund des vorher bewiesenen Satzes (5) in zwei ähnlichen Punktreihen $a_1, b_1, c_1 \ldots$ und $a_2, b_2, c_2 \ldots$ geschnitten.

Die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte dieser Reihen ist eine Tangente des Kegelschnittes, welchem sie angehören. Andererseits bilden aber bekanntlich die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier ähnlichen Reihen auf zwei sich nicht schneidenden Trägern ein hyperbolisches Paraboloid, und daher folgt der Satz:

7. „Die Tangenten aller auf der Normalenfläche liegenden Kegelschnitte in Punkten, welche einer und derselben Erzeugenden der Fläche angehören, sind Erzeugende eines hyperbolischen Paraboloides, welches die Normalenfläche längs dieser Erzeugenden berührt."

Sei wieder (KK') Fig. 1, der Leitkegelschnitt für die Normalenfläche, wobei dessen Ebene als horizontale Projectionsebene und die durch eine der Hauptaxen AB gehende zur Ebene des Leitkegelschnittes senkrecht stehende Ebene, als verticale Projectionsebene angenommen ist, und (SS') seien die beiden Projectionen des Leitkegelscheitels.

Sind x' und y' die Berührungspunkte der von S' aus an K' gezogenen Tangenten $t_x t_y$, so sind die Normalen X und Y von K' in diesen beiden Punkten, wie wir bereits wissen, die in der horizontalen Projectionsebene liegenden Erzeugenden der Normalenfläche.

Die beiden Geraden X und Y, die Hauptaxen des Leitkegelschnittes $A'B'$ und $C'D'$, so wie die Gerade $x'y'$ sind Tangenten einer bestimmten Parabel Π, deren sämmtliche Tangenten die Horizontaltraçen doppeltberührender Ebenen der Normalenfläche repräsentiren.

Setzen wir nun voraus $E_v E_h$ sei irgend eine beliebige doppeltberührende Ebene. Diese Ebene schneidet die Normalenfläche in einen Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt ($\omega\omega'$) der Durchschnittspunkt der Ebene $E_v E_h$ mit der im Mittelpunkte OO' des Leitkegelschnittes auf die horizontale Projectionsebene senkrecht gezogenen Geraden (OZ) ist.

Die beiden Punkte ξ und η, in welchen die Horizontaltraçe E_h die Geraden X und Y trifft, gehören offenbar sowohl der Ebene E_vE_h, als auch der Normalenfläche an; sie sind daher Punkte des in der Ebene E_vE_h liegenden Kegelschnittes ($\Sigma\Sigma'$).

Denken wir uns die Strecke $\xi\eta$ im Punkte o halbirt, die Gerade $O'o$ gezogen und endlich durch O' eine parallele Gerade $O'\varphi$ zu E_h geführt, so stellen diese beiden Geraden $O'o$ und $O'\varphi$ zwei conjugirte Durchmesser der Horizontalprojection Σ' vor und sind demgemäss auch die Horizontalprojectionen zweier conjugirten Durchmesser des in der Ebene E_vE_h liegenden Kegelschnittes ($\Sigma\Sigma'$), wovon der eine $O\varphi$ insbesondere parallel zur Horizontaltraçe E_h, mithin parallel zur Horizontalebene selbst ist.

Die Gerade E_h ist als Horizontaltraçe einer doppeltberührenden Ebene der Normalenfläche, eine Tangente der Parabel II; eine zweite Tangente an die Parabel II erhalten wir, indem wir durch den auf der Geraden E_h liegenden Punkt o die Gerade R ziehen.

Die drei Tangenten X, Y und R schneiden die Tangente E_h in drei Punkten ξ, η und o, welche zwei gleiche Strecken ξo und ηo bilden. Nach einem bekannten, die Parabel betreffenden Satze, müssen daher auch die sämmtlichen anderweitigen Tangenten der Parabel II von X, Y und R in je drei Punkten geschnitten werden, welche zwei gleiche aneinanderstossende Strecken bilden. Ist also E_h' eine beliebige Tangente von II, so wird dieselbe von X, Y und R in drei Punkten ξ_1, η_1 und r_1 derart geschnitten, das $\xi_1 o_1 = \eta_1 o_1$ wird.

Ziehen wir ferner $O'o_1$ und die Gerade $O\varphi_1$ parallel zu E_h', so sind dies die Horizontalprojectionen zweier conjugirten Durchmesser des in der Ebene $E_v'E_h'$ gelegenen Kegelschnittes (Σ,Σ'), wovon der eine $O\varphi_1$ zur Horizontalebene parallel ist.

Es kann nun leicht nachgewiesen werden, dass die Durchmesser $O\varphi$, $O\varphi_1$, $O\varphi_2$ ..... ein hyperbolisches Paraboloid bilden und die ihnen conjugirten Durchmesser Oo, Oo_1, Oo_2 ... ein zweites Paraboloid bestimmen.

Die Durchmesser $O\varphi$, $O\varphi_1$, $O\varphi_2$ ..... sind nach den unendlich fernen Punkten der Traçen E_h, E_h', E_h^2 .... gerichtet, oder mit anderen Worten, sie verbinden die Schnittpunkte w, w_1, w_2 ... der Geraden OZ und der Ebenen E_vE_h, $E_v'E_h'$.... mit jenen

Punkten, in welchen diese Ebenen die unendlich ferne Gerade der Horizontalebene treffen.

Nun sind aber sowohl die Gerade OZ, als auch die unendlich ferne Gerade der Horizontalebene Schnittlinien von doppeltberührenden Ebenen untereinander und werden daher von allen übrigen doppeltberührenden Ebenen E, E^1, E^2 .... in zwei projectivischen Punktreihen w, w_1, w_2 .... und φ, φ_1, φ_2 ..... geschnitten. Die Verbindungsgeraden $w\varphi$, $w_1\varphi_1$, $w_2\varphi_2$ .... sind daher Erzeugende eines hyperbolischen Paraboloids.

In gleicher Weise ergibt sich, dass die Gerade (ZO) und die Gerade R von sämmtlichen Ebenen E, E^1, E^2 .... in ähnlichen Punkreihen w, w_1, w_2 ..... und o, o_1, o_2 ..... geschnitten werden müssen, da auch R die Schnittlinie zweier doppeltberührenden Ebenen ist. Die Geraden wo, w_1o_1, w_2o_2 .... bilden somit gleichfalls ein Paraboloid und man gelangt daher zu dem Satze:

8. „Die zur Ebene des Leitkegelschnittes parallelen Durchmesser der auf einer Normalenfläche liegenden Kegelschnitte bilden ein hyperbolisches Paraboloid und die den genannten Durchmessern conjugirten Durchmesser bestimmen eine zweite ebensolche Fläche."

Es wurde vorher gezeigt, dass die horizontalen Traçen sämmtlicher doppelt-berührenden Ebenen der Normalenfläche, eine Parabel II (Fig. 1) umhüllen, welche durch die Axen des Leitkegelschnittes und die beiden in dessen Ebene liegenden Erzeugenden X und Y der Normalenfläche, vollkommen bestimmt ist. Ebenso wurde bereits nachgewiesen, dass die Tangenten p_1, p_2, p_3 .... dieser Parabel II, Gerade sind, welche auf der Verbindungslinie $\mu PS'$ ihres Poles P in Bezug auf den Leitkegelschnitt (KK'), mit dem Punkte S' senkrecht stehen.

Der Ort der genannten Pole selbst ist eine gleichseitige Hyperbel F (Fig. 3), welche durch den Mittelpunkt O' des Leitkegelschnittes und durch S' geht, und deren Asymptoten h_1h_2 parallel zu den Hauptaxen $A'B'$, $C'D'$ des Leitkegelschnittes sind.

Der Leitkegelschnitt (KK') und die vorgenannte Parabel II besitzen vier gemeinschaftliche Tangenten; eine derselben sei T_1.

Besagte Tangente T_k^1 trifft den Leitkegelschnitt (KK') in zwei zusammenfallenden, im Berührungspunkte τ vereinigten Punkten. Diese beiden Punkte sind, dem früher Besprochenen gemäss, die Fusspunkte zweier unmittelbar aufeinander folgenden, sich gleichzeitig schneidenden Erzeugenden der Normalenfläche, oder mit anderen Worten, die Erzeugende $(\varepsilon_1\ \varepsilon'_1)$ der Normalenfläche, welche durch den Punkt $(\tau_1, \tau'_1,)$ geht, ist eine Torsallinie der Fläche.

Die Gerade T_k^1 ist die horizontale Traçe der entsprechenden Torsalebene.

Weiters entspricht aber der Geraden T_k^1 als Tangente der Parabel auch die Eigenschaft, dass sie senkrecht steht auf der Verbindungslinie ihres Poles τ'_1 in Bezug auf den Leitkegelschnitt K' mit dem Punkte S', welcher Umstand darauf hindeutet, dass die Normale ε'_1 des Kegelschnittes K im Punkte τ'_1 durch S' geht. Nachdem aber T'_1 die horizontale Projection der zu $(\tau'_1\tau_1)$ gehörigen Torsallinie repräsentirt, so folgt, dass letztere die horizontalprojicirende Gerade S' schneidet.

Dasselbe gilt offenbar auch von den übrigen drei Torsallinien und es ergibt sich somit der Satz:

9. „Die vier Torsallinien der Normalenfläche schneiden die vom Scheitel des Leitkegels auf die Ebene des Leitkegelschnittes K gefällte Senkrechte", oder mit anderen Worten:

„Die orthogonalen Projectionen der Torsallinien einer Normalenfläche auf die Ebene des Leitkegelschnittes, sind die von der Projection des Kegelscheitels aus gezogenen Normalen des Leitkegelschnittes".

Nachdem die Pole P sämmtlicher Tangenten der Parabel II in Bezug auf den Leitkegelschnitt K' eine gleichseitige Hyperbel F bilden, welche durch den Mittelpunkt O' des Leitkegelschnittes K' und durch S' geht und deren Asymptoten h_1h_2 parallel zu den Hauptaxen des Leitkegelschnittes sind, folgt, weil der Punkt τ'_1 den Pol der Geraden T_k^1 darstellt:

10. „Die Fusspunkte der vier Torsallinien auf dem Leitkegelschnitte liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten zu den Axen des Leitkegel-

schnittes parallel sind und durch den Mittelpunkt des Leitkegelschnittes, als auch durch die orthogonale Projection des Kegelscheitels auf die Ebene des Leitkegelschnittes geht".

Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades längs eines zu einer Hauptebene senkrechten Schnittes.

Der Scheitel (SS') Fig. 4, des der Fläche längs eines solchen Schnittes umschriebenen Kegels liegt in der genannten Hauptebene.

Die obenbezeichnete Normalenfläche ist demgemäss auch Normalenfläche eines Kegels zweiten Grades längs eines zu einem Hauptschnitte senkrechten Schnittes.

Betrachten wir die horizontale Projectionsebene als Ebene des Leitkegelschnittes (KK') Fig. 4, und legen wir die verticale Projectionsebene durch die eine Hauptaxe AB des Leitkegelschnittes, so genügt es, den Kegelscheitel (SS') in der verticalen Projectionsebene anzunehmen, um die oben angeführten Bedingungen zu erfüllen.

Die verticale Projectionsebene, welche nun eine Hauptebene des Kegels (S, K) repräsentirt, wird sonach offenbar auch für alle aus dem Kegel abgeleiteten Curven und Flächen, eine Ebene orthogonaler Symmetrie sein.

Es wurde bereits in einer früheren Abhandlung[1] nachgewiesen, dass die verticalen Projectionen aller Normalen des Leitkegelschnittes in den Punkten von (KK') eine Parabel Σ berühren, deren Tangenten unter anderen auch die Grundlinie ($A'B'$, AB) und die im Mittelpunkte O' des Leitkegelschnittes K' auf die horizontale Projectionsebene geführte Senkrechte OZ sind.

Zieht man von S' aus die Tangente $S'\sigma'_1$ und $S'\sigma'_2$ an K', so repräsentiren die Berührungspunkte σ'_1 und σ'_2 derselben zwei Punkte, in welchen die Berührungsebenen des Leitkegels (S, K) horizontalprojicirend sind. Die zugehörigen Erzeugenden der Normalenfläche sind mithin zwei in der horizontalen Projectionsebene liegende Gerade N'_1 und N'_2, welche sich in einem Punkte (PP') der Axe $A'B'$ schneiden und den Leitkegelschnitt K' in den Punkten x'_1 und x'_2 treffen.

[1] Peschka, Sitzgsber. d. Kais. Akad. d. Wissenschaften. 1880.

Die den Endpunkten der Kegelschnittsaxe $A'B'$ entsprechenden Erzeugenden M_v und N_v der Normalenfläche liegen in der verticalen Projectionsebene und repräsentiren zwei Torsallinien der Normalenfläche.

Dass M_v und N_v in der That Torsallinien sind, folgt unmittelbar aus dem vorher ganz allgemein bewiesenen Satze 9. Die Horizontalprojectionen derselben fallen nämlich mit der Axe $A'B'$ zusammen, sind also einerseits Gerade, welche durch die horizontale Projection S' des Kegelscheitels gehen und andererseits Normalen des Kegelschnittes K'. Selbstverständlich werden die Geraden M_v und N_v, da sie verticale Projectionen von Erzeugenden der Normalenfläche darstellen, die Parabel Σ berühren.

Unter allen Tangenten der Parabel Σ ist diejenige (D) die wichtigste, welche gleichzeitig durch den Punkt P geht. Dieselbe ist offenbar die Verticalprojection jener beiden Normalen des Kegels, deren Fusspunkte die Schnittpunkte p'_1 und p'_2 von K' mit der durch P zu $A'B'$ senkrecht gezogenen Geraden sind.

Betrachtet man jedoch D als eine in der verticalen Projectionsebene liegende Gerade, so repräsentirt dieselbe, wie in der vorher angezogenen Abhandlung nachgewiesen wurde, den geometrischen Ort der Schnittpunkte aller Erzeugenden der Normalenfläche mit der verticalen Projectionsebene, also auch, in Folge der Symmetrie der Normalenfläche gegen diese Ebene, eine Doppelgerade der Fläche.

Da die Doppelcurve der Normalenfläche in dem früher besprochenen allgemeinen Falle als eine Curve dritter Ordnung erkannt wurde, so folgt, dass diesfalls der Rest derselben eine Curve zweiten Grades sein müsse, welche wieder in Folge der schon mehrfach bezeichneten Symmetrie in einer zur verticalen Projectionsebene senkrecht stehenden Ebene liegen muss.

Die Lage dieser Ebene zu finden, soll den Gegenstand unserer derzeitigen Betrachtung bilden.

Denken wir uns durch die Doppelgerade D eine beliebige Ebene $e_v e_h$ gelegt. Die Verticaltraçe e_v ist mit D identisch; die horizontale Traçe e_h möge den Leitkegelschnitt K' in den Punkten (aa') und (bb') treffen, während $(N_a N'_a)$ und $(N_b N'_b)$ die diesen Punkten entsprechenden Erzeugenden der Normalenfläche darstellen.

Es ist einleuchtend, dass, nachdem sowohl die Punkte a und b dieser Erzeugenden, als auch die verticalen Durchstosspunkte derselben Ebene $e_v e_h$ angehören, diese Erzeugenden selbst, ihrer ganzen Länge nach, in der Ebene $e_v e_h$ liegen müssen. Besagte Geraden bestimmen daher im Schnitte (CC) einen Punkt der Doppelcurve.

Dasselbe gilt von jeder anderen durch die Doppelgerade D gelegten Ebene. Die verticale Projectionsebene selbst ist eine specielle Lage einer solchen Ebene und der Schnittpunkt (ss') der in derselben liegenden Erzeugenden M_v und N_v, somit gleichfalls ein Punkt der Doppelcurve.

Es lässt sich nun nachweisen, dass in der That die durch die Punkte (CC) und (ss') geführte verticalprojicirende Ebene $E_v E_h$ den Doppelkegelschnitt enthält, das heisst, dass alle Punkte, welche durch die nämliche Construction wie C erhalten werden, in der Geraden E_v liegen müssen.

Eine beliebige durch P gezogene Gerade e_h trifft den Leitkegelschnitt K in zwei Punkten a' und b'. Die Tangenten t'_a und t'_b (Fig. 4) des Kegelschnittes K in den bezeichneten Punkten, schneiden sich in einem Punkte z der Polare von P und treffen die Kegelschnittsaxe $A'B'$ in a_1 respective b_1. Die Normalen N'_a und N'_b treffen die Kegelschnittsaxe AB beziehungsweise in α' und β'.

Bezeichnet man mit f_1 und f_2 die Brennpunkte des Leitkegelschnittes K, so sind bekanntlich

$$a_1,\ \alpha',\ f_1 \text{ und } f_2$$

vier harmonische Punkte und ebenso

$$b_1,\ \beta',\ f_1 \text{ und } f_2$$

wobei f_1 und f_2 stets conjugirte Punkte vorstellen.

Verbindet man ferner den Punkt z, in welchem die Polare π von P, von den Tangenten t'_a und t'_b getroffen wird, mit P, so sind bekanntlich auch die vier Strahlen

$$t'_a,\ t'_b,\ zP \text{ und } \pi$$

harmonisch, also deren Schnittpunkte

$$a_1,\ b_1,\ P \text{ und } R$$

mit der Axe AB vier harmonische Punkte.

Diese Erörterungen im Auge behaltend, wollen wir nun annehmen die Gerade e_k drehe sich um den Punkt P. Unter dieser Voraussetzung werden auch die Punkte a_1 und b_1 zwei Punktreihen auf AB beschreiben, die eine Involution bilden, weil, wie früher gezeigt wurde, zwei entsprechende Elemente, wie beispielsweise a_1 und b_1, stets conjugirte harmonische Punkte zu den nämlichen festen Punkten P und R sind.

Ebenso werden bei der Drehung des Strahles e_k um P, auch die beiden Punkte α' und β' zwei Punktreihen durchlaufen.

Die Punktreihe, welche α' durchläuft, ist projectivisch mit jener, welche der Punkt a_1 beschreibt, da hier ebenfalls zwei entsprechende Lagen a_1 und α' stets conjugirt harmonische Punkte in Bezug auf die festen Brennpunkte f_1 und f_2 sind.

In gleicher Weise findet man, dass auch die Reihen, welche von den Punkten β' und b_1 beschrieben werden, projectivisch sind.

Nachdem aber die Reihen a_1 und b_1, wie oben gezeigt wurde, eine Involution bilden, also selbst zu einander projectivisch sind, werden auch die beiden Punktreihen α' und β' zu einander projectivisch sein.

Es wird nunmehr auch keinen weiteren Schwierigkeiten unterworfen sein, zu zeigen, dass diese Punktreihen überdies eine Involution bilden, indem wir einfach nachweisen, dass sich entsprechende Elemente α' und β' stets anstandslos vertauschen lassen.

Betrachten wir nämlich α' als einen Punkt der Reihe β' und bezeichnen wir ihn in dieser Eigenschaft mit β'_1, so wird demselben in der Reihe b_1 der vierte harmonische Punkt zu β'_1, f_1, f_2 entsprechen, also ein Punkt b'_1, welcher mit a_1 zusammenfällt. Dem Punkte b'_1 entspricht in der Reihe a_1 der vierte harmonische Punkt zu b'_1, P, R, also ein Punkt a'_1, welcher mit b'_1, übereinstimmt.

Endlich entspricht dem Punkte a'_1 in der Reihe α' der vierte harmonische Punkt zu a'_1, f_1, f_2, das heisst ein Punkt α'_1, welcher mit β' zusammenfällt.

Die angestellten Betrachtungen und die hiedurch erzielten Resultate sagen aber nichts anderes aus, als dass die Punkte α' und β' einander entsprechen, wenn man sie in Bezug auf die Reihen, welchen sie als Elemente angehören, vertauscht.

Dreht sich also e_h um P, so beschreiben die Punkte α' und β' eine Involution auf der Axe AB des Leitkegelschnittes F.

Projicirt man die Involution $\alpha'\beta'$ durch Strahlen, welche senkrecht zu $A'B'$ sind auf die Gerade D', so erhält man auf dieser eine neue Involution (α, β).

Die Paare entsprechender Elemente dieser Involution haben aber noch eine andere Bedeutung.

Aus der Construction entnimmt man nämlich unmittelbar, dass α und β gleichzeitig die Durchstosspunkte jener beiden Erzeugenden der Normalenfläche mit der Bildebene sind, welche durch die Endpunkte (aa') und (bb') der entsprechenden Kegelschnittssehne gehen.

Denkt man sich nun zwei Sehnen e_h und e'_h durch P gezogen, welche den Leitkegelschnitt F in den Punkten (aa') und (bb') respective (cc') und (dd') treffen und die zugehörigen Erzeugenden (N_aN_a'), (N_bN_b'), (N_cN_c'), und (N_dN_d') der Normalenfläche construirt, so werden die verticalen Durchstosspunkte α und β der beiden ersteren und jene γ und δ der beiden letzteren, den vorausgeschickten Entwickelungen zufolge, zwei Paare conjugirter Punkte der Involution auf D repräsentiren.

Verbindet man ferner die Schnittpunkte C und L von N_a und N_b respective N_c und N_d durch eine Gerade E_v, so stellt sich folgende Eigenschaft heraus.

Nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Kegelschnitte schneiden die Paare von Tangenten, welche von den Punkten einer Geraden E_v an eine Parabel Σ gezogen werden, die feste Tangente D dieser Parabel in conjugirten Punkten einer Involution.

Der Construction der Geraden E_v gemäss sind α und β, respective γ und δ zwei Paare entsprechender Punkte dieser Involution. Die letztgenannte ist sonach mit der früher construirten Involution auf D identisch.

Hiedurch ist aber gleichzeitig bewiesen, dass die Gerade E_r der geometrische Ort der verticalen Projectionen der Durchschnittspunkte solcher Paare von Erzeugenden der Normalenfläche sei, deren Fusspunkte auf Kegelschnittssehnen liegen, welche durch den festen Punkt P gehen, oder mit anderen Worten: die

verticalprojicirende Ebene $E_h E_v$ enthält den Doppelkegelschnitt der Normalenfläche.

Die Gerade E_v schneidet die Parabel Σ in zwei Punkten, wovon wir nur den einen Δ berücksichtigen wollen. Die Tangenten von diesem Punkte Δ an die Parabel Σ fallen zusammen und bestimmen demnach auf D einen Doppelpunkt der Involution, welcher sich wie leicht nachweisen lässt, der Punkt Δ selbst ist.

Zieht man nämlich durch P jene Kegelschnittssehne, welche zu AB senkrecht steht, so trifft sie den Kegelschnitt K' in den Punkten $p'_1 p'_2$, während die Normalen n'_1 und n'_2 in den genannten Punkten von K die Axe AB in einem und demselben Punkte Δ', das ist einem Doppelpunkte der Involution $(\alpha'\beta')$, schneiden.

Die Projection Δ des Punktes Δ' auf die Gerade D ist sodann ein Doppelpunkt der Involution $(\alpha\beta)$ und daher identisch mit dem Punkte Δ, in welchem die Gerade E_v die Parabel Σ trifft. Die Gerade E_v geht somit durch jenen Punkt Δ, in welchem die Parabel Σ von D berührt wird, und der Punkt $(\Delta\Delta')$ wird folglich ein gemeinschaftlicher Punkt des Doppelkegelschnittes und der Doppelgeraden der Normalenfläche sein.

Die in der Ebene des Leitkegelschnittes K' liegenden Normalen N'_1 und N'_2 schneiden den Leitkegelschnitt zum zweiten Male in zwei zu AB symmetrisch liegenden Punkten x'_1 und x'_2, und da durch diese Punkte gleichfalls Erzeugende der Normalenfläche gehen, so stellen dieselben zwei in der horizontalen Projectionsebene liegende Punkte des Doppelkegelschnittes vor, woraus folgt, dass die horizontale Traçe E_h der Ebene des Doppelkegelschnittes mit der Geraden $x'_1 x'_2$ zusammenfallen muss.

Die Richtigkeit der eben angestellten Betrachtungen lässt sich auf folgende Weise verificiren.

Es ist bekannt, dass wenn eine windschiefe Fläche durch drei Leitlinien l_1, l_2, l_3 von den bezüglichen Ordnungen m_1, m_2, m_3 erzeugt wird, unter der Voraussetzung, dass l_1 und l_2 ... s_3 Punkte, l_2 und l_3 .... s_1 Punkte und l_1, l_3 .... s_2 Punkte gemein haben, der Grad der Regelfläche ausgedrückt erscheint durch:

$$2m_1m_2m_3 - s_1m_1 - s_2m_2 - s_3m_3.$$

Betrachten wir im vorliegenden Falle den Leitkegelschnitt K' als

die Leitcurve l_1 und die Doppelgerade resp. den Doppelkegelschnitt als Leitcurven l_2 und l_3 für die Normalenfläche, so ist

$$m_1=2,\ m_2=1,\ m_3=2$$
$$s_1=1,\ s_2=2,\ s_3=0$$

und es folgt für den Grad der Normalenfläche der Werth:

$$2.2.2.1-2.1-2.1=4$$

ein bereits auf anderem Wege als richtig erkanntes Resultat.

Die Ergebnisse der vorhergegangenen Untersuchungen, lassen sich nun in folgendem Satze zusammenfassen:

11 *a.* „Die Normalenfläche eines Kegels zweiter Ordnung, oder allgemein einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung, längs eines zu einer der Hauptebenen senkrechten Schnittes, besitzt eine in dieser Hauptebene liegende Doppelgerade und einen Doppelkegelschnitt.

Die Doppelgerade hat mit dem Leitkegelschnitte keinen Punkt gemein; der Doppelkegelschnitt dagegen, dessen Ebene gleichfalls zu der obengenannten Hauptebene senkrecht steht, trifft den Leitkegelschnitt in zwei Punkten, und zwar in jenen beiden Punkten, in welchen der Leitkegelschnitt von den in seiner Ebene liegenden Erzeugenden der Normalenfläche zum zweiten Male getroffen wird.

Die Doppelgerade und der Doppelkegelschnitt haben einen Punkt gemeinschaftlich.

Die Paare von Erzeugenden der Normalenfläche, welche sich in Punkten des Doppelkegelschnittes schneiden, treffen die Doppelgerade in conjugirten Punkten einer und derselben Involution.

Die Normalenfläche besitzt vier Torsallinien, von welchen zwei immer reell sind, und zwar sind dies jene Normalen des Leitkegels in den Endpunkten derjenigen Axe des Leitkegelschnittes, welche gleichzeitig in der oben genannten Hauptebene liegt.

Dem Gesagten gegenüber lautet der zum Theile reciproke Satz:

11 *b*. „Die der Normalenfläche doppeltumschriebene Developpable, d. i. die Enveloppe der Ebenen, welche durch je zwei sich schneidende Erzeugenden gehen, ist von der dritten Classe und zerfällt in ein Ebenenbüschel und einen parabolischen Cylinder. Die Axe des ersteren ist die Doppelgerade; die Erzeugenden des zweiten stehen auf der zur Ebene des Leitkegelschnittes senkrechten Hauptebene des Leitkegels normal, sind mithin zu der Ebene des Leitkegelschnittes parallel.

Die doppeltberührenden Ebenen, welche dem Ebenenbüschel angehören, haben mit der Normalenfläche die Doppelgerade und zwei Erzeugende gemein, während jene des parabolischen Cylinders zwei Erzeugende und einen Kegelschnitt mit der Normalenfläche gemein haben."

Andere Sätze, wie beispielsweise der Satz, dass die Mittelpunkte aller auf der Normalenfläche liegenden Kegelschnitte auf einer Geraden liegen, und dergleichen, lassen sich direct aus den früher für den allgemeinen Fall aufgestellten Sätzen ableiten.

Die von einem Punkte ausserhalb der Normalenfläche umschriebene Kegelfläche berührt die Normalenfläche, wie ganz allgemein gezeigt wurde, längs einer Curve vierter Classe und sechster Ordnung.

Liegt nun insbesondere der Scheitel des umschriebenen Kegels in der Symmetrieebene (welche in den beiliegenden Zeichnungen durch die verticale Projectionsebene dargestellt erscheint), so ist die genannte Berührungscurve zu dieser Ebene orthogonal symmetrisch. Die orthogonale Projection eines Punktes der Berührungscurve auf die Bildebene (Symmetrieebene) fällt in Folge dessen mit der orthogonalen Projection eines zweiten Punktes dieser Curve zusammen.

Ebenso ist eine Tangente an die verticale Projection der Berührungscurve gleichzeitig die Projection zweier Tangenten dieser Curve. Die Berührungscurve ist vom vierten Range, ihre Projection auf eine beliebige Ebene eine Curve vierter Classe.

Wählt man nun insbesondere die Symmetrieebene als Projectionsebene, so sind von einem Punkte derselben blos zwei Tangenten an die Projection der Berührungscurve möglich, deren jede doppelt zählt; es ist mithin die verticale Projection der Berührungscurve eine Curve zweiter Classe.

Als natürliche Folgerung ergibt sich der Satz:

12. „Wählt man als verticale Projectionsebene die Symmetrieebene der Normalenfläche, so projiciren sich die Berührungscurven aller jener Kegel, welche der Normalenfläche aus Punkten dieser Symmetrieebene umschrieben sind, auf besagte Ebene als Kegelschnitte."

Dieser Satz gilt insbesondere auch von der Strictionslinie, da diese bekanntlich die Berührungscurve der Normalenfläche mit dem derselben aus dem Scheitel des Leitkegels umschriebenen Kegel ist.

Construction der Tangentialebene in einem beliebigen Punkte der Normalenfläche.

Wenn auf einer beliebigen windschiefen Fläche eine Erzeugende gegeben ist, und auf dieser Erzeugenden drei Punkte sammt ihren Berührungsebenen als bekannt vorliegen, so kann man zu jedem beliebigen vierten Punkte dieser Erzeugenden die zugehörige Berührungsebene construiren, indem, wie wir bereits wissen, die Reihe der Punkte auf einer Erzeugenden der windschiefen Fläche zu dem Büschel der ihnen entsprechenden Berührungsebenen projectivisch ist.

Nehmen wir nun auf einer Erzeugenden der Normalenfläche $(N_a N'_a)$, Fig. 4, einen beliebigen Punkt (xx') an und soll die Berührungsebene in diesem Punkte construirt werden, so kann von der obangeführten Eigenschaft folgendermassen Gebrauch gemacht werden.

Die Tangentialebene der Normalenfläche in dem Fusspunkte (aa') der Erzeugenden $(N_a N'_a)$ ist durch die Erzeugende und durch die Tangenten t'_a des Leitkegelschnittes im Punkte a' vollkommen bestimmt.

Die Tangentialebene der Normalenfläche in dem Punkte $(\alpha\alpha')$, in welchem die Erzeugende $(N_a N'_a)$ die Doppelgerade D

trifft, ist bestimmt durch die Erzeugende $(N_a N'_a)$ und die genannte Doppelgerade.

Die Traçe e_h derselben auf der horizontalen Projectionsebene ist die Verbindungsgerade des Punktes a' mit dem horizontalen Durchstosspunkte P der Doppelgeraden.

Endlich ist auch die asymptotische Ebene der Erzeugenden $(N_a N'_a)$, das ist jene Ebene, welche die Normalenfläche in dem unendlich fernen Punkte u der Erzeugenden $(N_a N'_a)$ berührt, bekannt. Bezeichnete Ebene U ist nämlich diejenige, welche durch die Erzeugende $(N_a N'_a)$ senkrecht zu der Erzeugenden $(S_a S'_a)$ des Leitkegels gelegt wird; die Traçen $U_v U_h$ derselben sind demnach zu den Projectionen der Kegelerzeugenden $(S_a S'_a)$ senkrecht.

Wir kennen sonach auf der Erzeugenden $(N_a N'_a)$ drei Punkte: a, α, u, so wie die denselben entsprechenden Berührungsebenen $A_v A_h$, $e_v e_h$, $U_v U_h$ und können folglich mit Hilfe derselben zu dem Punkte (xx') der nämlichen Erzeugenden die Tangentialebene $B_v B_h$ einfach projectivisch construiren.

Die Normalenfläche eines Kegels zweiten Grades längs eines zu einer Focallinie senkrechten Schnittes.

Es ist bekannt, dass wenn ein Kegel durch eine Ebene geschnitten wird, welche zu einer der beiden Focallinien des Kegels senkrecht steht, die Schnittcurve ein Kegelschnitt sei, während einer der Brennpunkte desselben der Schnittpunkt der Ebene mit der genannten Focallinie ist.

Ist daher (KK'), Fig. 5, der Leitkegelschnitt, den wir in der horizontalen Projectionsebene liegend annehmen, so repräsentirt für den zu betrachtenden Fall einer der beiden Brennpunkte z. B. S' bereits die horizontale Projection des Kegelscheitels. Die verticale Projection desselben sei etwa in S gelegen.

Als verticale Projectionsebene wollen wir diesfalls diejenige Ebene wählen, welche durch die Brennpunktaxe des Kegelschnittes K' geht.

Vor Allem wird es sich um die Bestimmung der Doppelcurve der Normalenfläche handeln.

Aus der Betrachtung des allgemeinen Falles wissen wir bereits, dass die horizontalen Traçen der doppeltberührenden Ebenen, das ist solcher Ebenen, welche zwei Erzeugende der Normalenfläche enthalten, senkrecht stehen müssen auf der Verbindungslinie ihres Poles in Bezug auf den Leitkegelschnitt K' mit dem Punkte S'.

Im vorliegenden Falle ergibt sich sofort, dass eine jede zur Brennpunktaxe senkrechte Gerade als Traçe einer derartigen Ebene betrachtet werden kann; denn ihr Pol liegt auf der Brennpunktaxe und die Verbindungsgerade mit dem Punkte S' ist diese Brennpunktaxe selbst.

Es ist aber leicht nachzuweisen, dass auch jede durch S' gehende Gerade E_h als Traçe einer doppeltberührenden Ebene betrachtet werden kann.

Wie vorausgesetzt, ist nämlich S' ein Brennpunkt des Leitkegelschnittes K'. Aus der Theorie der Kegelschnitte wissen wir aber, dass der Pol x einer durch den Brennpunkt S' gezogenen Geraden E_h auf derjenigen Geraden $S'x$ liegt, welche man in S' auf die Gerade E_h senkrecht zieht. Die Verbindungsgerade von S' mit dem Pole x von E_h ist daher senkrecht zu E_h, welches nichts anderes aussagt, als dass E_h die Traçe einer doppeltberührenden Ebene der Normalenfläche sei.

Die Gerade E_h trifft den Leitkegelschnitt K' in den Punkten a'_1 und a'_2. Die Normalen N'_1 und N'_2 des Leitkegelschnittes K' in diesen Punkten sind die horizontalen Projectionen der in der doppeltberührenden Ebene $E_h E_v$ liegenden Erzeugenden und der Schnittpunkt D' von N'_1 und N'_2 ist die horizontale Projection eines Punktes der Doppelcurve der Normalenfläche.

Wenn sich E_h und S' dreht, so wird D' die horizontale Projection der Doppelcurve respective einen Theil derselben durchlaufen.

Wir wollen diese Doppelcurve näher bestimmen.

Die Verbindungsgerade t'_1 der Punkte x und a'_1 ist die Tangente von K' im Punkte a'_1. Denken wir uns noch den Punkt a'_1 mit dem zweiten Brennpunkte F' des Kegelschnittes K' verbunden, so sind offenbar N'_1 und t'_1 die Winkelhalbirenden des Winkels $F'a'_1S'$, das heisst: die vier Strahlen t'_1, N'_1, E_h und a'_1F' sind harmonisch.

In gleicher Weise findet man, dass die Tangente t'_2 im Punkte a'_2 durch die Gerade xa'_2 dargestellt werde. Verbindet man a'_2 mit F', so ergeben sich wieder vier harmonische Strahlen und zwar N'_2, t'_2, E_h und $a'_2 F'$.

Ordnen wir nun die Strahlen der beiden harmonischen Gebilde einander projectivisch zu und zwar derart, dass sich die Strahlen:

$$N'_1 \text{ und } N'_2,\ t'_1 \text{ und } t'_2,\ a'_1 S' \text{ und } a'_2 S' \text{ und } a'_1 F' \text{ und } a'_2 F'$$

entsprechen, so sind die beiden Vierstrahlen offenbar perspectivisch, da zwei entsprechende Strahlen, nämlich $a'_1 S'$ und $a'_2 S$ in die Verbindungsgerade E_h der Scheitel a'_1 und a'_2 fallen.

Die Schnittpunkte F',x und D' liegen daher auf einer und derselben Geraden, auf dem perspectivischen Durchschnitte, oder mit anderen Worten: der Durchschnittspunkt D' der Normalen des Leitkegelschnittes in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt S' gehenden Sehne E_h liegt auf der Verbindungslinie des Poles dieser Sehne mit dem zweiten Brennpunkte F'.

Bezeichnen wir ferner den Schnittpunkt der Geraden E_h und $F'x$ mit R', so ist einleuchtend, dass die vier Punkte F', D', R' und x gleichfalls harmonisch sind. Denken wir uns dieselben von dem Punkte y, in welchem E_h die Polare s des Brennpunktes S' (Directrix) trifft, auf die Brennpunktaxe $F'S'$ projicirt, so erhalten wir als Projectionen der vier Punkte F', D', R' und x die vier Punkte F', z', S' und m, welche offenbar wieder harmonisch sind.

Nachdem die drei Punkte F', S' und m fix, das heisst unabhängig von der Sehne E_h sind, so gilt das Gleiche auch von dem vierten harmonischen Punkte z'. Hierauf folgt, dass der Punkt D' auch auf jener Geraden liegt, welche den festen Punkt z' mit dem Punkte y verbindet, welch' letzterer sich als Schnitt der Sehne E_h mit der Directrix s ergibt.

Nun sind aber die Punkte x und y zwei conjugirte Punkte der Polarinvolution auf s.

Dreht sich mithin die Gerade E_h um S', so beschreiben die beiden Punkte x und y zwei projectivische Punktreihen auf s. Diese beiden Punktreihen werden aus den festen Punkten F' und z' durch zwei projectivische Strahlenbüschel projicirt.

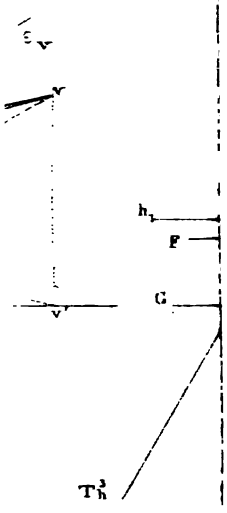
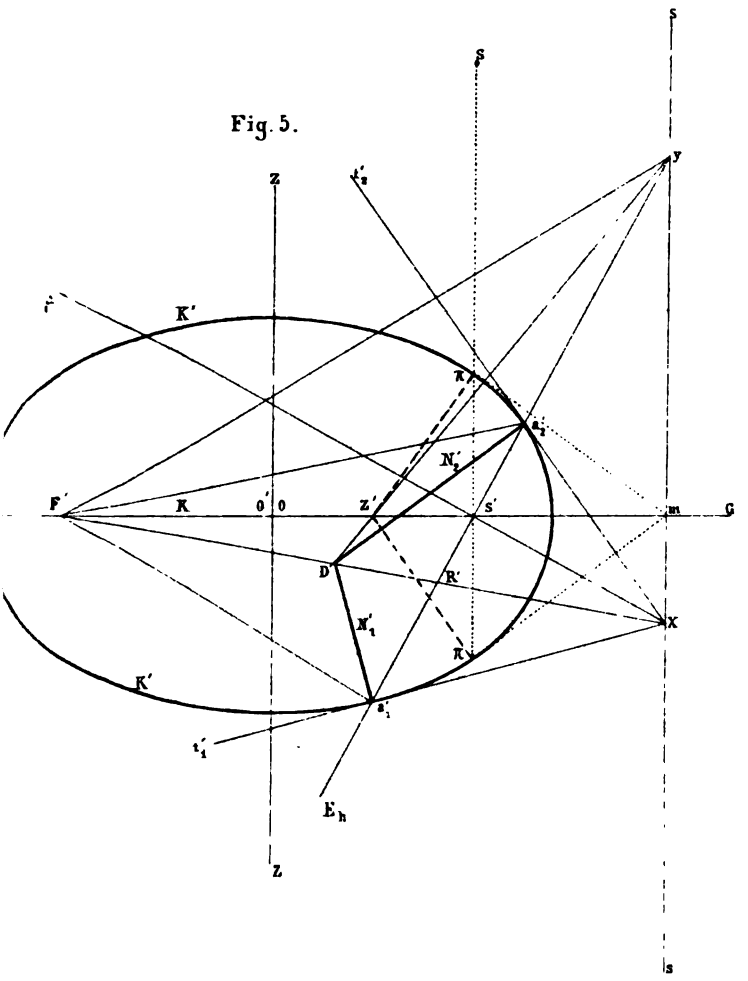

h1
F
G

Fig. 5.



Der Schnittpunkt D' zweier entsprechenden Strahlen ist nun einerseits die horizontale Projection eines Punktes der Doppelcurve und andererseits ein Punkt des durch die beiden projectivischen Büschel F und z' erzeugten Kegelschnittes.

Hieraus folgt der Satz:

Die horizontale Projection eines Theiles der Doppelcurve ist ein Kegelschnitt Σ', welcher durch die beiden Punkte F und z' geht.

Berücksichtigt man, dass zu der Geraden E_λ eine symmetrische Gerade $E_{\lambda'}$ in Bezug auf FS' als Symmetrieaxe existirt, dass also einem jeden Punkte D' ein symmetrisch gelegener in Bezug auf SF entspricht, so ergibt sich, dass die Gerade Fz' eine Axe orthogonaler Symmetrie oder mit anderen Worten: eine Hauptaxe des vom Punkte D' beschriebenen Kegelschnittes Σ' ist.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei gesonderten Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.

SEP 12 1882

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXV. BAND. III. HEFT.

Jahrgang 1882. — März.

(Mit 2 Tafeln, 2 Karten und 10 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1882.

INHALT

des 3. Heftes März 1882 des LXXXV. Bandes, II. Abth. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

VI. Sitzung vom 2. März 1882: Übersicht 411

Hann, Über den Föhn in Bludenz. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] . . 416

Lecher, Über Ausstrahlung u. Absorption. I. Abhandlung. (Mit 7 Holzschnitten.) [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.] 441

Gegenbauer, Das Additionstheorem derjenigen Functionen, welche bei der Entwicklung von e^{xzt} nach den Näherungsnennern regulärer Kettenbrüche auftreten. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 491

Schier, Über Potenzsummen rationaler Zahlen. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 503

VII. Sitzung vom 9. März 1882: Übersicht 509

Weyr, Über Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen cubischen Curve. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 513

v. Escherich, Die Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte mittelst reciproker Flächenbündel. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] . . . 526

Drasch, Beitrag zur synthetischen Theorie der ebenen Curven III. Ordnung mit Doppelpunkt. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 50 kr. = 1 RMk.] 534

Boehm, Über Schwefelwasserstoffbildung aus Schwefel und Wasser. [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 554

Haitinger, Vorläufige Mittheilung über Glutaminsäure und Pyrrol 558

Wächter, Über die materiellen Theile im elektrischen Funken. (Mit 2 Holzschnitten) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 560

Eder u. *Ulm*, Über das Verhalten von Quecksilberjodid zu unterschwefligsauren Natron. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] . 584

VIII. Sitzung vom 16. März 1882: Übersicht 592

Kachler u. *Spitzer*, Über zwei isomere Bibromcampher aus Monobromcampher 596

Stefan, Über die magnetische Schirmwirkung des Eisens [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 613

Pick, Über die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 643

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXV. Band. III. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

VI. SITZUNG VOM 2. MÄRZ 1882.

Herr Dr. L. J. Fitzinger führt als Alterspräsident den Vorsitz.

Das Präsidium der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien übermittelt die aus Veranlassung der fünfundzwanzigjährigen Jubelfeier dieser Gesellschaft (im December 1881) erschienene Festschrift.

Das w. M. Herr Prof. E. Hering übersendet eine Abhandlung: „Beiträge zur allgemeinen Nerven- und Muskelphysiologie. VIII. Mittheilung. Über scheinbare Öffnungszuckung verletzter Muskeln," von Herrn Dr. Wilh. Biedermann, Privatdocent der Physiologie und erster Assistent am physiologischen Institute der Universität zu Prag.

Das c. M. Herr Prof. E. Weyr übersendet eine Abhandlung des Herrn Prof. Heinrich Drasch in Steyr, betitelt: „Beitrag zur synthetischen Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt."

Das c. M. Herr Prof. C. Claus übersendet eine im zoologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Arbeit von Herrn Eduard Becher: „Zur Kenntniss der Mundtheile der Dipteren."

Herr Dr. Friedrich Wächter in Wien übersendet eine Abhandlung: „Über die materiellen Theile im elektrischen Funken."

Herr Dr. M. Holl, Supplent der Anatomie in Innsbruck, übersendet eine im Wiener anatomischen Institute ausgeführte Arbeit: „Über die richtige Deutung der Querfortsätze der Lendenwirbel und die Entwicklung der Wirbelsäule des Menschen".

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Construction der allgemeinen Flächen der dritten bis siebenten Ordnung aus der Anzahl sie bestimmender Punkte," von Herrn Prof. Dr. G. v. Escherich in Czernowitz.

2. „Über Schwefelwasserstoffbildung aus Schwefel und Wasser," von Herrn Prof. Josef Boehm in Wien.
3. „Über die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen", von Herrn Dr. G. A. Pick, Assistent am physikalischen Institute der Universität zu Prag.
4. „Über die Entwicklung der Zahlen in gewisse Reihen aus reciproken ganzen Zahlen", von Herrn F. J. Schneider, Assistent an der technischen Hochschule im Lemberg.

Das w. M. Herr Prof. E. Suess überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung des Herrn Dr. Leo Burgerstein in Wien unter dem Titel: „Geologische Studie über die Therme von Deutsch-Altenburg".

Das w. M. Herr Hofrath G. Tschermak spricht über den Meteoritenfall, welcher am 3. Februar l. J. bei Mócs unweit Klausenburg in Siebenbürgen stattfand und überreicht eine darauf bezügliche Mittheilung des Herrn Prof. A. Koch in Klausenburg.

Das w. M. Herr Director J. Hann überreicht eine Abhandlung: „Über den Föhn in Bludenz."

Der Secretär überreicht eine im physikalischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Arbeit: „Über Ausstrahlung und Absorption." I. Abhandlung, von Herrn Dr. Ernst Lecher.

Das c. M. Herr Prof. Sigm. Exner überreicht eine unter seiner Leitung ausgeführte Untersuchung von Dr. F. v. Mises in Wien: „Über die Nerven der menschlichen Augenlider."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia Real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 210. Tomo XVIII. Enero 15. Habana, 1882; 8°.

Académie Impériale de St. Pétersbourg: Bulletin. Tome XXVII. Nr. 4 et dernier. St. Pétersbourg, 1881; 4°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft. XVIII. Nr. 1—2. Januar 1882. Halle a. S.; 4°.

Alterthums-Verein zu Wien: Berichte und Mittheilungen. Band XX. Wien, 1871; 4°.

Annales des Ponts et Chaussées: Memoires et Documents. 6e serié. 1re année. 12e cahier. 1881. Décembre. Paris; 8°.

Apotheker-Verein, allgem.-österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XX. Jahrgang Nr. 5 u. 6. Wien, 1882; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang. VI. Nr. 7—9. Cöthen, 1882; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Academie des sciences. Tome XCIV. Nos. 5—7. Paris, 1882; 4°.

Genootschap, het Bataviasch van Kunsten en Wetenschappen: Verhandelingen. Ded XLI. 2. Stuk. Batavia, 's Hage, 1880; 4°.

— — Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXVI. Aflevering 2—6. Batavia, 's Hage, 1880—81; 8°.

— — Notulen van de Algemeene en Bestuurs-vergaderingen. Deel XVIII. 1880. Nr. 1—4. Batavia, 1880; 8°. Deel XIX. 1881. Nr. 1. Batavia, 1881; 8°.

Gesellschaft, allgemeine schweizerische für die gesammten Naturwissenschaften. Neue Denkschriften. Band XVIII. Abthlg. 1. Basel, Genève und Lyon, 1880; 4°.

— deutsche chemische: Berichte XV. Jahrgang. Nr. 2. Berlin 1882; 8°.

— Fürstlich Jablonowski'sche: Jahresbericht. Leipzig im April, 1881; 8°.

— Naturforschende in Bern: Mittheilungen aus dem Jahre 1881. I. Heft Nr. 1004—1017. Bern, 1881; 8°.

— österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XVIII. Band, Februar-Heft 1882. Wien, 1882; 8°.

Gewerbe-Verein, niederösterr.: Wochenschrift LIII. Jahrgang Nr. 6—8. Wien, 1882; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr: Wochenschrift. VII. Jahrgang. Nr. 6—8. Wien, 1882; 4°.

Institut, königl. Preuss. geodätisches: Publication. Das hessische Dreiecksnetz. Berlin, 1882; 4°.

— Präcisions-Nivellement der Elbe. 2. Mittheilung. Von der Seevemündung bis auf die Insel Neuhof. Berlin, 1881; 4°.

Instituut, het koninklijk voor de Taal-Land-en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. IV. Volgreeks. V. Deel. — 1 Stuk. 's Gravenhage, 1881; 8°.

Instituut, Reis in Oost- en Zuid-Borneo van Koetei naar Banjermassin door Carl Bock. 1. Gedeelte. 's Gravenhage, 1881; 4°. Dazu Atlas. 's Gravenhage, 1881; 4°.

Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden: Handelingen en Mededeelingen over het jaar 1881. Leiden, 1881; 8°. — Levensberichten der afgestorvene Medeleden. Leiden, 1881; 8°. — Alphabetische List der Leden. Leiden, 1881; 8°.

— — Neue Untersuchungen über die Bahn des Olbers'schen Cometen und seine Wiederkehr von F. K. Ginzel. Haarlem, 1881; 4°.

Mittheilungen aus Justus Perthes geographischer Anstalt von D A. Petermann. XXVIII. Band 1882. II. Gotha, 1882; 4°.

Musée Teyler: Archives. Série II. 2e partie. Haarlem, Paris, Leipsic, 1881; 4°.

Museum of Comparative Zoology: Buletin. Vol.VI. Nr. 12. Cambridge, October, 1880; 8°.

Nature. Vol. XXV. Nos. 641—43. London, 1882; 8°.

Observatorium, astrophysikalisches zu Potsdam: Publicationen. II. Band mit 35 Tafeln. Potsdam, 1881: 4°.

Omboni, Giovanni: Osservazioni dei Fossili triasici del Veneto, que furono descritti e figurati dal Prof. P. A. Catullo. Venezia, 1882; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. 1882. Nr. 1, 2 u. 3. Wien, 1882; 8°.

Societät, physikalisch-medicinische zu Erlangen: Sitzungsberichte. 13. Heft. November 1880 bis August1881. Erlangen. 1881; 8°.

Société de Biologie: Comptes rendus des séances et Mémoires. Tome I. de la 7e série, année 1879. Paris, 1880; 8°.

— géologique de France: Mémoires. 3e série. Tome second. I, Documents. Paris, 1881; 4°. — II. Mémoires. Paris,1882; 4°.

— Hollandaise des Sciences à Harlem: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XVI. 3e, 4e et 5e livraisons. Harlem, 1881; 8°.

— des sciences de Finlande: Observations météorologiques. Vol. VII. Année 1879. Helsingfors, 1882; 8°.

Society, the Asiatic of Bengal: Proceedings. Nr. IX. November, 1881. Calcutta, 1881; 8°.

— the Boston of Natural History: Proceedings. Vol. XX. part. IV. January 1880. — April 1880. Boston; 8°. Vol. XXI. part. I. May, 1880. — December 1880. Boston; 8°.

— the Royal astronomical: Monthly Notices. Vol. XLII. Nr. 3. January, 1882. London; 8°.

— the Royal geographical: Proceedings and monthly record of Geography. Vol. IV. Nr. 2. February, 1882; 8°.

— the Zoological of London: Proceedings for the year 1881. Part. II. London, 1881; 8°.

— the Royal Dublin: The scientifique Proceedings. Vol. II. (N. S.) November 1880. Part. VII. Dublin, 1880; 8°. — Vol. III. (N. S.) Parts I—IV. Dublin, 1881; 8°.

Society, the Royal Dublin: The scientifique Transactions. Vol. I. (Series II.) (November 1880). XIII. — On the Possibility of originating Wave Disturbances in the Ether by means of Electric Forces. Part. 2. Dublin, 1880; 4°.—Vol. I. (Series II.) April 1881). XIV. — Explorations in the Bone Cave of Ballynamintra, near Cappagh, County Waterford. Dublin, 1881; 4.

Vereeniging, koninklijke natuurkundige in Nederlandsch-Inbië: Natuurkundig Tijdschrift. Deel XL. Achtste Serie. Deel I. Batavia, 's Gravenhage, 1881; 8°.

Verein, militär-wissenschaftlicher in Wien.: Organ. XXIV. Band. Separatbeilage zum III. Hefte. 1882. Wien; 8°.

Vierteljahrsschrift, Oesterreichische für wissenschaftliche Veterinärkunde. LVI. Band. II. Heft. (Jahrgang 1881. IV). Wien, 1881; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXII. Jahrgang. Nr. 6, 7 u. 8. Wien, 1882; 4°.

Zoologische Station zu Neapel: Mittheilungen, zugleich ein Repertorium für Mittelmeerkunde. III. Band, 1. u. 2. Heft. Leipig, 1881; 8°.

Über den Föhn in Bludenz.

Von dem w. M. **J. Hann.**

Die meteorologische Centralanstalt besitzt ein mit grösster Sorgfalt und persönlichem Interesse geführtes meteorologisches Beobachtungsjournal von Bludenz aus den Jahren 1856 bis 1873. Sie verdankt dasselbe dem Herrn Baron Otto von Sternbach, damals Landwehr-Bataillons-Commandant in Bludenz, welcher auf seinem Schlosse an den von der k. k. Centralanstalt gelieferten Instrumenten alle Beobachtungen einer meteorologischen Station zweiter Ordnung mit grösster Regelmässigkeit ausführte. Dieses Beobachtungsjournal gewinnt noch sehr an Werth durch tägliche Bemerkungen über besondere Witterungserscheinungen, die nicht direct in den Rahmen des Beobachtungsschemas fallen.

Nachdem das Bataillons-Commando nach Bregenz verlegt worden war, musste Herr Baron von Sternbach seine meteorologischen Aufzeichnungen in Bludenz aufgeben, und die werthvolle Beobachtungsreihe von Bludenz fand damit ihr Ende. Ich nahm daraus Veranlassung, die Resultate derselben zusammenstellen zu lassen, wie ich dies schon für eine Anzahl anderer abgeschlossener Beobachtungsreihen des österr. Netzes gethan habe und es wird diese Zusammenstellung an einem anderen passenderen Orte veröffentlicht werden. Hier aber mag eine meteorologische Erscheinung specieller behandelt werden, welche in Bludenz energischer wie vielleicht irgendwo sonst in den Alpen auftritt und auch physikalisches Interesse in Anspruch nimmt, es ist dies der Föhn.

Die zwei wesentlichsten Eigenschaften des Föhn sind: relativ hohe Wärme und geringe relative Feuchtigkeit. Um zu erforschen, unter welchen meteorologischen Verhältnissen grössere Lufttrockenheit in Bludenz überhaupt eintritt, habe ich alle Fälle aufgesucht, in welchen die relative Feuchtigkeit unter 35% hinabgesunken ist, und die zugleich herrschende Temperatur und Windrichtung notirt. Auf diese Weise ist folgende Übersicht gewonnen worden:

I. Verhältnisse, unter denen in Bludenz die Minima der Feuchtigkeit eintraten, als obere Grenze der Minima sind 35% angenommen worden.

	Zahl der Fälle in 10 Jahren			Mittlere relative Feuchtigkeit			Mittlere Temperatur		
	6h	2h	10h	6h	2h	10h	6h	2h	10h
Winter	20	53	24	25	26	26	11·2	12·1	10·3
Frühling	14	132	20	29	27	26	11·1	19·1	15·0
Sommer	3	41	3	30	32	34	23·2	27·9	25·3
Herbst	24	48	22	29	27	28	15·8	18·6	16·0
Jahr..	61	274	69	28	28	28	15·3	19·4	16·7

Häufigkeit der Winde bei diesen Fällen

h	N	NE	EN	SE	S	SW	W	NW	Summe
				I. Winter					
6h	0	0	1	18	1	0	0	0	20
2h	3	0	2	36	3	2	7	0	53
10h	0	0	2	19	2	0	1	0	24
				II. Frühling					
6h	0	0	0	14	0	0	0	0	14
2h	5	1	2	47	9	6	19	43	132
10h	0	0	0	18	1	0	0	1	20
				III. Sommer					
6h	0	0	0	3	0	0	0	0	3
2h	0	0	0	5	0	3	9	24	41
10h	0	0	0	3	0	0	0	0	3
				IV. Herbst					
6h	0	0	0	23	1	0	0	0	24
2h	1	1	1	38	1	0	1	5	48
10h	0	1	0	20	1	0	0	0	22

Da die normale Temperatur zu Bludenz im Winter —0°·8, im Frühling 8°·6, im Sommer 16°·3 und im Herbst 8°·8 C. ist, so ergibt sich zunächst, dass geringe relative Feuchtigkeit stets mit erhöhter Temperatur auftritt, was an sich nicht bemerkenswerth ist, da dies eine ziemlich allgemeine Verknüpfung dieser beiden meteorologischen Factoren ist. Bemerkenswerther ist das

relativ häufige Auftreten grosser Trockenheit im Herbst und Winter, ganz gegen die Regel der Stationen im Flachlande. Namentlich zeigt sich die grösste Abhängigkeit der Trockenheit von der Windrichtung. Im Herbst und Winter tritt dieselbe nur bei SE Wind auf, und wenn man blos die Morgen- und Abendbeobachtung berücksichtigt, so gilt dies auch vom Frühling und Sommer. Dass bei der Nachmittagsbeobachtung um 2^h im Frühling und Sommer auch die W und NW Winde an der Trockenheit theilnehmen, rührt wohl nur daher, dass grössere Trockenheit auch bei schönem warmen Wetter in Bludenz wie überhaupt an allen unseren Stationen an den Nachmittagsstunden der wärmeren Jahreszeit auftritt, und dass der W und NW Wind in Bludenz der aufsteigende Thalwind ist, der ja in den Gebirgsthälern bei ruhiger warmer Witterung Nachmittags regelmässig weht. Der SE Wind dagegen kommt vom Gebirge herab, vom Hintergrund des Thales, er ist ein absteigender Wind, aber als trockener Wind nicht der Localwind (Nachtwind), wie ja schon seine grössere Häufigkeit in den Nachmittagsstunden zeigt. Grössere Lufttrockenheit in den Morgen- und Abendstunden bringt das ganze Jahr hindurch nur der SE Wind, im Herbst und Winter aber ausschliesslich. Die mittlere Temperatur und Häufigkeit der trockenen SE Winde im Mittel von 6^h am und 10^h pm ist

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mittlere Temperatur . . .	10°·8	13°·0	24°·2	15°·9
Abweichung vom Normale .	13°·0	8°·9	(10°·0)	9°·0
Häufigkeit	44	34	6	46

Im Winter und Herbst ist die Gesammtzahl der trockenen SE Winde 191 (in 10 Jahren), die mittlere Temperatur 14°·0 (Winter 11°·2, Herbst 16·8, Abweichung respective 12·0 und 8·0) mit einer mittleren relativen Feuchtigkeit von 27% (Abweichung −48%).

Den SE Winden in Bludenz kommen also gelegentlich hohe Wärme und extreme Trockenheit, die Eigenschaften des Föhn, in hohem Maasse zu.

Wir wollen nun die Frage umkehren und nachsehen, ob denn diese Eigenschaften den SE Winden überhaupt durchschnittlich anhaften. Zu diesem Zwecke wurden, aber nur für den Winter,

alle SE-Winde, deren Stärke den Grad 3 der zehntheiligen Scala überschritt, aufgesucht und der gleichzeitige Luftdruck, sowie Temperatur, relative Feuchtigkeit und Bewölkung notirt. Auf diese Weise erhielt ich die nachstehende kleine Tabelle.

Die SE Winde in Bludenz im Laufe von zehn Wintern:

	Häufigkeit					Summe	Mittlere Stärke
	E	ESE	SE	SSE	S		
6h	6	0	54	2	4	66	5·0
2h	5	0	52	2	3	62	4·9
10h	6	1	47	1	5	60	5·0
Summe .	17	1	153	5	12	188	5·0

	Mittlerer Luftdruck				Mittlere Temperatur			
	6h	2h	10h	Mittel	6h	2h	10h	Mittel
Mm.	707·8	703·8	707·2	706·3	6°1	9°7	6°4	7°4
	Mittlere Feuchtigkeit				Mittlere Bewölkung			
Procent	48	37	45	43	73	77	59	70

Die Winde zwischen E und S, die in Bludenz über den Hochgebirgszug herabkommen, der in diesen Richtungen das Thal abschliesst, sind also warme Winde (mittlere Temperatur-Abweichung 8°·2) und trockene Winde (mittlere Abweichung —31%), die Bewölkung steht über dem Mittel (+0·9), der Luftdruck befindet sich unter dem Mittel (—3·4mm). Die SE-Winde haben also nicht blos in besonderen Fällen, sondern durchschnittlich die Eigenschaften des Föhn. Herr Baron von Sternbach bezeichnet auch jederzeit den stürmischen SE Wind als Föhn. Herr Dr. J. Daimer, ein vorzüglicher Alpenkenner, jetzt in Bludenz lebend, schreibt mir: „Der Föhn ist hier höchst interessant. Er kommt aus Montavon (das obere Illthal) das ist aus SE und bringt dem Gefühle nach sehr trockene Luft, welcher, soweit meine bisherigen Erfahrungen reichen, alsbald feuchte Luft und

Niederschläge folgen. Der Wolkenzug ist dabei SW. In Montavon und zwar im Gargellenthal findet sich ein von SE her einmündendes Seitenthal, das den Namen Val calda führt, offenbar vom Föhn". Das Montavonthal schliesst in SE mit der mächtigen vergletscherten Silvretta-Gruppe, in welcher selbst die tiefste Passeinsattlung nicht unter 2500^{m} herabgeht, während die mittlere Kammhöhe 2800—2900^{m} sein dürfte. Auch nach S und SW ist das Montavonthal durch den nur wenig niedrigeren Gebirgszug der Rhäticonkette abgeschlossen, so dass die S und SE Winde in Bludenz aus einer relativen Höhe von mindestens 2000^{m} herabkommen. Dies und die Richtung des Thales von NW—SE erklärt wohl die besondere Intensität, mit der der Föhn im Illthale auftritt.

Von der Intensität, mit der der Föhn in Bludenz herrscht, geben die nachfolgenden Daten eine Vorstellung. Wir haben einige extreme Föhntage im Frühling und Herbst, dann im Winter hier zusammengestellt. (Siehe Pag. 421 und 422.)

Die 6 Föhntage im November haben eine Temperaturabweichung von 16°·0 und die mittlere Feuchtigkeit ist um 51% vermindert. Am 24. und 25. November 1870 war die mittlere Temperatur 17°·7 und die relative Feuchtigkeit nur 12% im Mittel! Auch der 6. März 1871 hatte nur eine mittlere Feuchtigkeit von 14%.

Für die 20 Föhntage im Winter habe ich die gleichzeitige Witterung in Mailand und Stuttgart aufgesucht und in übereinstimmender Weise tabellarisch zur Anschauung gebracht. Die Daten für Mailand konnten den gedruckt vorliegenden täglichen Beobachtungen der Sternwarte entnommen werden, jene für Stuttgart verdanke ich im Manuscript Herrn Prof. von Schoder, Vorstand des württembergischen meteorologischen Bureaus.

Den Gegensatz der Witterungsverhältnisse auf der Nord- und Südseite der Alpen zur Zeit, wo der Föhn in Bludenz herrscht, bringen folgende Mittelwerthe zur deutlichen Anschauung. Die Beobachtungstermine zu Mailand und Stuttgart stimmen nicht ganz mit jenen von Bludenz; es beziehen sich die Daten für Mailand auf 6^{h}, 3^{h}, 9^{h}, jene von Stuttgart auf 7^{h}, 2^{h}, 9^{h}, die für Bludenz auf 6^{h}, 2^{h}, 10^{h}.

Föhntage in Bludenz. (I. Herbst und Frühling.)

Jahr	Monat	Tag	Windrichtung und Stärke			Temperatur Celsius			Relative Feuchtigkeit		
			6h	2h	10h	6h	2h	10h	6h	2h	10h
1857	November	24	—	SE 8	SE 7	—	15·3	15·0	—	26	32
		25	SE 6	SE 7	—	15·5	17·0	—	27	25	—
1865	October	18	—	SE 6	SE 6	—	19·0	19·3	—	27	28
		19	SE 5	—	—	20·5	—	—	25	—	—
1867	November	15	SE 5	—	SE 5	15·8	—	18·0	34	—	31
		16	SE 5	NW 2	SE 5	17·5	20·3	17·3	34	35	28
1870	„	24	—	SE 4	SE 5	—	15·0	16·5	—	12	12
		25	SE 5	SE 5	—	17·3	22·0	—	13	10	—
1872	October	18/19	SE 6	E 4	SE 6	16·3	20·7	19·8	34	31	25
1867	März	23	—	SE 3	SE 6	—	15·5	11·3	—	26	21
		24	SE 6	ESE 4	—	12·5	17·0	—	20	28	—
	Mai	11	—	SE 5	SE 6	—	27·8	19·8	—	17	31
		12	SE 6	SE 6	SE 7	21·0	25·3	22·5	33	24	25
1871	März	6	SE 6	SE 5	SE 5	10·7	17·2	12·5	20	9	14
		7	SE 5	W 3	—	10·0	17·0	—	33	27	—
1872	„	7	SE 6	SE 5	SE 6	11·4	14·8	11·6	20	19	19
		8	SE 6	SE 5	SE 6	10·6	16·0	11·2	26	21	30
	Mittel für 6 Föhntage im November					16·5	17·9	16·7	27	22	26
	„ „ 6 „ „ März					11·0	16·3	11·7	24	22	21

Föhntage in Bludenz (590 Meter). II. Winter.

Jahr	Monat und Tag	Windrichtung und Stärke						Temperatur Celsius			Relative Feuchtigkeit			Luftdruck Mm.			Bewölkung	Niederschlag
		6h		2h		10h		6h	2h	10h	6h	2h	10h	6h	2h	10h		
1856	Dec. 10.	S	7	S	8	S	6	13·5	18·0	14·0	27	13	30	707·7	706·1	708·1	2·3	—
1867	Febr. 15.	SSE	4	SE	5	SE	5	5·8	16·5	12·8	46	20	27	716·9	714·7	715.3	4·7	—
„	„ 16.	SE	6	SE	5	SE	5	12·5	17·0	14·0	26	21	26	714·9	713·5	712·8	3·7	—
1868	Dec. 29/30.*	SE	*4	SE	5	SE	6	11·8*	15·8	14·5	45	13	19	703·6*	704·0	703·6	5·7	●
1869	Jän. 31.	SE	6	SE	5	SE	4	13·8	16·0	13·3	6	11	24	709·2	709·7	708·8	4·0	—
„	Febr. 1.	SE	5	SE	5	—		14·0	19·3	—	20	14	—	705·6	703·6	—	8·0	—
„	„ 19.	SE	4	SE	5	SE	5	8·8	14·8	12·0	29	21	25	709·9	708·6	707·9	9·0	—
1872	Jän. 22.	—		SE	5	SE	6	—	10·4	6·6	—	25	34	—	702·7	702·1	4·5	—
„	„ 23.	SE	5	SE	6	SE	6	9·2	13·0	12·0	28	23	25	699·6	697·5	696·9	7·0	—
„	„ 24.	SE	6	SE	5	—		13·0	14·6	—	22	23	—	695·2	694·3	—	10·0	—
„	Dec. 24*/25	SE	5	SE	5	SE	*6	12·4	14·8	12·2*	29	26	32	702·3	701·1	703·7*	9·3	—
1873	Jän. 19	—		SE	6	SE	7	—	11·8	11·6	—	24	27	—	697·7	692·8	9·0	—
„	„ 20	SE	6	SE	5	–		12·2	11·7	—	27	28	—	687·0	683·8	—	10·0	—
1865	Dec. 4	SE	5	SE	6	SE	4	12·3	16·3	11·0	35	22	40	701·8	701·1	700·7	8·0	—
1866	Febr. 27/28*	SE	*7	SE	5	SE	6	13.1*	11·5	10·6	21*	23	27	689·6*	698·6	695·2	9·0	—
1871	Jän. 16*/17	SE	5	SE	4	SE	*5	12·0	12·2	8·2*	24	34	25	698·0	695·3	701·3*	3·7	—
1872	Jän. 19/20*	SE	*5	SE	5	SE	5	8·4	10·6	7·4	25	27	29	695·7*	695·6	695·5	1·0	—
„	Dec. 10	SE	4	SE	5	SE	6	2·8	8·0	12·2	71	33	24	700·1	696·4	690·8	8 0	●
1866	Jän. 1	SE	7	SE	5	—		11·8	12·5	—	19	21	—	708·3	706·3	—	—	....
1873	Febr. 26	SE	6	SE	6	—		12·0	14·6	—	24	23	—	703·0	698·7	—	—	....
Mittel	(20)	SE		SE		SE		11·1	14·0	11·5	29	22	28	702·7	701·5	702·4	6·9	

Gleichzeitige Witterung in Mailand (147·1 Meter).

Jahr	Monat und Tag	Windrichtung und Stärke			Temperatur Celsius			Relative Feuchtigkeit			Luftdruck Mm.			Niederschläge
		6h	3h	9h	6h	3h	9h	6h	3h	9h	6h	3h	9h	
1856	Dec. 10	N	NE	ENE	3·4	5·4	3·1	nuvolo, pioggia			756·8	754·6	754·1	Regen
1867	Feb. 15	NW	WNW	SW	2·3	6·7	4·8	93	77	89	62·2	60·9	61·3	Regen
„	„ 16	WSW	SW	SW	4·2	8·2	6·5	97	85	90	60·2	58·8	58·7	Regen
1868	Dec. 29/30	SW	NE	NE	5·1	4·5	3·8	97	96	96	48·9	50·3	50·2	bewölkt, Regen
1869	Jän. 31	W	W	W	—0·3	3·5	1·0	97	88	99	55·3	55·5	55·9	bewölkt, Nebel
„	Feb. 1	NW	W	—	2·2	3·4	—	96	99	—	55·1	52·9	—	Regen (11 Mm.)
„	Feb. 19	SSE	E	NNE	3·8	7·1	4·4	98	87	95	54·0	53·2	53·0	Bewölkt
1872	Jän. 22	—	WSW	W	—	4·9	2·2	—	98	99	—	46·4	46.2	Nebel
„	Jän. 23	WNW	S	E	2·4	3·9	3·4	98	97	98	44·7	43·9	44·5	Regen (11·5)
„	Jän. 24	NNE	NW	—	2·5	3·1	—	99	96	—	43·6	41·2	—	Regen (34·2)
„	Dec. 24/25	NNE	NNW	NE	3·0	3·8	3·2	99	96	98	49·7	48·4	50·7	Regen (20·0)
1873	Jän. 19	—	N	SE	—	3·8	3·8	—	99	99	—	43·0	40·6	Bewölkt
„	Jän. 20	NE	WNW	—	3·8	4·4	—	99	92	—	38·7	26·2	—	Regen (10·2)
1865	Dec. 4	E	E	E	9·4	9·4	9·2	93	94	96	44·3	43·3	41·8	Regen (17·2)
1866	Feb. 27/28	S	NNE	E	5·2	7·8	6·4	96	79	92	36·9	42·3	41·6	Regen (6·0)
1871	Jän. 16/17	W	NE	ENE	—1·5	—0·1	—1·3	98	94	94	48·0	44·5	49·3	bewölkt, Schnee
1872	Jän. 19/20	ENE	NE	ENE	2·5	3·1	2·4	98	99	98	38·8	39·6	39·5	bew., Regen (10)
„	Dec. 10.	N	SE	E	0·8	5·6	5·1	98	99	97	39·8	39·3	38·3	Regen (26)
1866	Jän. 1.	ENE	ENE	—	1·9	2 8	—	98	94	—	55·4	52·6	—	Regen (20)
1873	Feb. 26	E	ESE	—	7·0	10·0	—	86	93	—	47·5	45·1	—	bew., Regen (10)
Mittel	(20)	—	—	—	3·2	5·1	3·9	96	93	96	748·9	747·1	748·4	

Gleichzeitige Witterung in Stuttgart (269 Meter).

Jahr	Monat und Tag	Windrichtung und Stärke			Temperatur Celsius			Relative Feuchtigkeit			Luftdruck Mm.			Niederschläge
		7h	2h	9h	7h	2h	9h	7h	2h	9h	7h	2h	9h	
1856	Dec. 10	S	SW	S	1·6	9·0	3·5	82	72	83	734·6	734·7	734·7	
1867	Feb. 15	W 1	SE 1	E 1	1·3	11·9	6·2	87	85	91	46·6	45·8	44·4	
„	„ 16	N 1	E 1	E 1	4·4	15·6	6·9	70	77	73	44·4	43·4	41·9	
1868	Dec. 29/30	SW 1	SW 1	SW 1	7·1	11·6	11·2	84	69	71	34·3	32·9	31·6	Regen
1869	Jän. 31	SW 2	SW 5	SW 1	4·4	13·8	9·4	90	47	67	37·7	37·9	37·0	—
„	Feb. 1	W 1	W 2	— 0	5·0	14·4	—	90	48	—	33·6	31·8	—	Abd. etwas Reg.
„	„ 19	S 1	SW 1	SW 1	3·8	11·2	6·2	100	49	100	39·9	38·3	39·0	
1872	Jän. 22	—	NE 1	NE 1	—	4·4	2·5	—	79	77	—	33·0	31·2	
„	„ 23	SW 1	NE 1	NE 1	2·5	6·2	4·4	77	74	79	28·7	26·0	25·6	Abd. Regen
„	„ 24	SW 1	SW 1	— 0	6·9	8·8	—	73	83	—	21·4	21·8	—	Regen
„	Dec. 24/25	E 1	S 1	E 1	0·0	4·5	1·0	90	84	100	30·2	28·8	31·0	
1873	Jän. 19	— 0	S 2	S 5	—	6·5	7·0	—	86	78	—	21·3	17·6	Regen
„	„ 20	S 5	S 1	— 0	8·0	6·0	—	72	78	—	13·1	13·3	—	Regen
1865	Dec. 4.	E	SE	E	0·0	3·1	2·1	78	79	91	32·5	31·6	32·0	
1866	Febr. 27/28	NW 1	E 1	SE 1	5·0	12·5	5·6	80	86	62	16·9	28·6	27·4	
1871	Jän. 16/17	SW 1	SW 1	W 1	1·9	4·4	0·6	100	79	89	25·3	25·3	27·7	Regen
1872	„ 19/20	S 1	NE 1	NE 1	—1·9	6·9	1·9	88	73	82	25·1	26·3	25·5	
„	Dec. 10	SW 2	SW 2	SW 2	4·5	6·5	6·0	68	64	70	25·1	22·6	17·5	Abd. Regen
1866	Jän. 1	S 1	S 2	— 0	3·4	9·4	—	85	75	—	38·3	38·1	—	Abd. Regen
1873	Feb. 26	N 1	S 1	— 0	2·5	8·5	—	91	60	—	28·4	24·8	—	* u. Regen
Mittel	(20)	—	—	—	3·4	8·8	5·0	84	72	81	730·9	730·3	730·9	

Mittel von 20 Föhntagen im Winter.

	Seehöhe Meter	Temperatur			Relative Feuchtigkeit			Luftdruck-Abweichung vom Normale
Stuttgart . . .	269	3·4	8·8	5·0	84	72	81	—7·5
Bludenz . . .	590	11·1	14·0	11·5	29	22	28	—7·5
Mailand . . .	147	3·2	5·1	3·9	96	93	96	—0·2

Die abnorm hohe Temperatur und Trockenheit tritt nur in Bludenz auf, sie fehlt im Norden wie im Süden in einiger Entfernung vom Kamm der Alpen. Die Luftdruckdifferenz Stuttgart-Bludenz ist nahezu Null, hingegen steht das Barometer in Mailand um mehr als 7^{mm} höher als in Bludenz. Wir werden diese charakteristische Erscheinung nach specieller zur Darstellung bringen. Während in Bludenz SE Sturm herrscht, wehen in Mailand schwache variable Winde, selbst in Stuttgart finden wir nur an einigen Tagen gleichzeitig S oder SW Sturm, in der grösseren Zahl der Fälle schwächere Winde zwischen E und SW, einige Male sogar N und NE. In Mailand fällt meist Regen, wenn in Bludenz der Föhn herrscht, auch in Stuttgart, aber seltener und schwächer. Die Feuchtigkeit ist an beiden Orten der Sättigung nahe.

Der Temperaturunterschied zwischen den Alpenthälern, wo der Föhn herrscht und den Niederungen im Norden und Süden von den Alpen tritt noch auffallender hervor, wenn man die Temperaturen auf ein gleiches Niveau reducirt. Wir wählen für dasselbe das Niveau von Bludenz und nehmen als Wärmeabnahme mit der Höhe im Winter den Factor 0·45 für je 100^{m}. Dies gibt dann:

Temperatur im Niveau von 590 Meter

	Morgens	Nachmittags	Abends	Mittel
Stuttgart . .	2·0	7·4	3·6	4·3
Bludenz . .	11·1	14·0	11·5	13·2
Mailand . .	1·2	3·1	1·9	2·1

Es ist also die Luft im gleichen Niveau mit Bludenz in Stuttgart um 9°, in Mailand um 11° kälter als zu Bludenz während der Dauer intensiver Föhnwinde. Die ausserordentliche Temperatursteigerung ist ein locales Phänomen der Alpenthäler selbst.

Dass durch das Auftreten des Föhn in Bludenz die mittleren Temperaturmaxima der Wintermonate über jene der am Südfuss der Alpen gelegenen Stationen erhöht werden, zeigt folgende kleine Tabelle.

Mittlere Monatsmaxima in Celsius-Graden:

Station	November	December	Jänner	Februar
Bludenz	17°5	11°7	11°5	14°1
Bozen	13·2	9·9	8·0	11·9
Riva	14·8	11·1	10·2	11·8
Mailand	15·4	10·4	8·7	12·9

Auf die Theorie der hohen Temperatur und geringen Feuchtigkeit des Föhn brauche ich hier nicht einzutreten, nachdem die von mir in der österreichischen meteorologischen Zeitschrift, Jahrgänge 1866, 1867 und 1868 zuerst vertretenen Ansichten allgemeine Annahme gefunden haben. Von Interesse bleibt aber noch immer die verticale Temperaturvertheilung auf beiden Seiten der Alpen, sowie die Vertheilung des Luftdruckes im gleichen Niveau während intensiver Föhnwinde durch die Beobachtungen festzustellen. Da wir in Vorarlberg und Tirol keine Höhenstationen besitzen, aus deren Beobachtungen sich die Temperaturänderung mit der Höhe während des Föhn in Bludenz ableiten liesse, so müssen wir die Beobachtungen der schweizerischen Stationen zu Hilfe nehmen. Ich will mich hier auf den Föhnsturm vom 31. Jänner und 1. Februar 1869, welcher in Bludenz wenigstens zu den heftigsten seiner Art gehörte, und jenen von Anfang Jänner 1877 beschränken, der durch seine Dauer und hohe Wärme sich auszeichnete.

Föhn am 1., 4. und 7.—9. Jänner 1877 in der Schweiz.

Mittlere Temperatur und Feuchtigkeit dieser 5 Tage:

	Temperatur			Relative Feuchtigkeit			Windrichtung			Mittel Bewölkung
	7ʰ	1ʰ	9ʰ	7ʰ	1ʰ	9ʰ	7ʰ	1ʰ	9ʰ	
Altdorf .	13·8	15·8	13·0	31	29	42	S_2	S_2	S_2	5
Altstätten	15·1	16·0	14·0	25	29	35	S_2	SSW_2	SSW_1	5

In Altdorf fielen am 4. 3^{mm} Regen; zu Altstätten am 1. $7 \cdot 3^{mm}$. In Lugano hingegen war die mittlere Bewölkung $9 \cdot 0$, Regen fiel am 1. $13 \cdot 4$, am 4. $33 \cdot 9$, am 5. $5 \cdot 4$ und am 6. $6 \cdot 1^{mm}$. Die Abweichung der Temperatur von den normalen Werthen betrug im Mittel der 9 Tage 1. und 3. bis 10. Jänner in Celsius-Graden:

Südseite der Alpen: Lugano $4 \cdot 8$, Castasegna $3 \cdot 9$,
Alpenpässe: Sanct Bernhard $3 \cdot 7$, Sils-Maria $6 \cdot 6$,
Alpenthäler, Föhngebiet: Altdorf $11 \cdot 4$, Altstätten[1]) $13 \cdot 3$,
Nordseite der Alpen: Zürich $6 \cdot 9$, Basel $8 \cdot 0$.

Die verticale Temperaturvertheilung während dieser 2 Föhnperioden wird durch folgende Daten zur Darstellung gebracht.

31. Jänner und 1. Februar 1869

Südseite der Alpen	Seehöhe Meter	Temperatur Mittel	Temperatur 7^h am
1. Bellinzona, Lugano, S. Vittore . .	260	2·7	0·5
2. Castasegna, Brusio	740	2·5	1·1
3. Airolo	1170	0·9	0·5
Alpenkämme (Pässe)			
4. Gotthard, Julier, Bernina, Bernhardin	2070	—3·7	—4·6
Nordseite der Alpen			
5. Andermatt, Splügen Dorf, Platta	1430	2·7	2·0
6. Altdorf, Marschlins, Sargans, Altstätten	490	12·6	12·0

Es gibt dies für die Südseite eine durchschnittliche Wärmeänderung mit der Höhe von 0·40 Celsius pro 100 Meter, für die Nordseite im Tagesmittel 1·02, für 7^h am $1°·05$ Celsius. Specieller lernt man die Vertheilung der Temperatur und Witterung längs der Gotthardstrasse aus folgenden Zahlen kennen:

---

[1]) Am 1. war die Abweichung 17·1, am 4. 15°·8 und am 8. 17°2.

Tagesmittel für den 31. Jänner und 1. Februar 1869.

Ort	Seehöhe	Temperatur	Relative Feuchtigkeit	Witterung
Bellinzona	229^m	3°0	80%	N Regen
S. Vittore	268	2·5	85	S und SW
Airolo	1172	0·9	—	N und S
Gotthard	2100	−4·5	—	S_{2-3}
Andermatt	1448	2·5	—	SW_2
Altdorf	454	14·5	28	S (Föhn)

Die verticale Wärmevertheilung während der 5 Föhntage zwischen dem 1. und 9. Jänner 1877 in der Schweiz wird durch folgende Temperaturmittel dargestellt:

Temperaturmittel des 1., 4., 7., 8., 9. Jänner 1877.

Ort	Seehöhe Meter	Temperatur Celsius	Wärmeabnahme pro 100 Meter	Ort	Seehöhe Meter	Temperatur Celsius	Wärmeabnahme pro 100 Meter
San Vittore	268	6°0		Andermatt	1448	5°0	
Lugano	275	6·3		Altdorf	454	14·1	·92
Castasegna	700	4·1	·49				
Sils	1810	−0·8	·44				
Bernhardin	2070	−2·1	·50	Engelberg	1024	7·1	
				Auen	821	10·9	
				Glarus	466	12·4	1·18
Bernhardin	2070	−2·1					
Splügen, Dorf	1471	3·1	·87	Gäbris	1253	8·1	
Platta	1379	4·6	·97	Trogen	887	9·9	
Marschlins	545	12·4	·94	Altstätten	478	14·1	0·85
Ragatz	541	12·3	·94				
Davos, Platz	1562	1·6		St. Bernhard	2478	−5·1	
Chur	590	11·1	·98	Grächen	1632	2·1	0·85

Die Wärmeabnahme auf der Südseite ist 0°48, auf der Nordseite 0°·95 für je 100^m.

Will man eine willkürliche Gruppirung vermeiden und die Rechnung schärfer durchführen, so gelangt man zu folgenden Resultaten:

Föhnperiode 31. Jänner und 1. Februar 1869:

Bellinzona, Lugano, S. Vittore.	260	Meter	2·7	Südseite
Castasegna, Brusio	740	„	2·5	
Airolo.....	1170	„	0·9	
Gotthard, Julier, Bernhardin ..	2140	„	—3·4	
St. Bernhard	2480	Meter	—5·7	Nordseite
Gotthard, Simplon, Julier, Bernhardin, Grimsel	2060	„	—2·9	
Davos, Grächen, Andermatt, Splügen, Platta.....	1530	„	2·8	
Churwalden, Grindelwald, Trogen, Auen, Ütliberg ..	1000	„	7·8	
Chur, Marschlins, Ragatz, Altstätten, Altdorf	520	„	11·8	

Diese Daten geben die Gleichungen:

Südseite $t_h = 4°4 - 0·34\,h$
Nordseite $t_h = 16·7 - 0·92\,h$

Für die längere Föhnperiode vom Jänner 1877 erhält man:

Föhnperiode vom 1., 4., 7., 8., 9. Jänner 1877:

S. Vittore, Lugano	270	Meter	6·2	Südseite
Castasegna.....	700	„	4·1	
Sils.....	1810	„	—0·8	
Bernhardin.....	2070	„	—2·1	
Bernhardin, St. Bernhard	2270	Meter	—3·6	Nordseite
Davos, Grächen.....	1600	„	1·9	
Splügen, Platta, Andermatt...	1430	„	4·2	
Engelberg, Gäbris.....	1140	„	7·6	
Auen, Trogen.....	840	„	10·4	
Ragatz, Chur, Marschlins.....	560	„	11·9	
Altdorf, Altstätten, Glarus....	470	„	13·5	

Diesen Daten entsprechen folgende Gleichungen:

Südseite $t_h = 7·4 - 0·46\,h$
Nordseite $t_h = 17·9 - 0·95\,h$

Die Wärmeabnahme ist auf der Südseite somit im Mittel 0°4 pro 100 Meter, auf der Nordseite 0·94, lezteres ist fast genau das theoretische Maass der Wärmezunahme in einem herabsinkenden Luftstrome. Im Jahre 1868 hatte ich für 4 Fälle von Nord- und Südföhn eine Wärmeabnahme von 1°·00 gefunden, während die gleichzeitige Wärmeabnahme auf der entgegengesetzten Seite der Alpen blos 0°·48 für je 100^{m}[1] betrug. Nimmt man im Mittel die Wärmezunahme nach unten bei Föhn zu 0·97, so würde sich aus der Gleichung:

$$\frac{dt}{dh} = -\frac{1}{cJ}$$

wo $c = 0 \cdot 238$, das mechanische Äquivalent der Wärme J zu 433 ergeben, ein Werth, der nur um 2% von dem jetzt als richtigsten angenommenen Werthe abweicht.

Als Temperatur im Meeresniveau für unsere beiden Föhnstürme ergibt sich aus den Formeln: Südseite der Alpen 5°9, Nordseite 17·3, Differenz 11°·4. Nimmt man die durchschnittliche Wärmeabnahme mit der Höhe im Winter zu 0·45 (wie dies auch auf der Südseite so ziemlich der Fall war) und berücksichtigt, dass dieselbe in einem herabsinkendem Luftstrom um 0·97—0·45=0°·52 grösser ist, so genügt es, dass der Luftstrom aus einer relativen Höhe von 2200^{m} kommt, um den Wärmeunterschied von 11°·4 hervorzubringen.

Wenden wir uns nun der Betrachtung der Luftdruckverhältnisse auf beiden Seiten der Alpen während des Föhn zu. Im Mittel der 20 Föhntage war der Luftdruck

			reducirt auf 590 Meter
zu Stuttgart in	269 Meter	730·7	702·5
„ Bludenz „	589·7 „	702·2	—
„ Mailand „	147·1 „	748·1	709·0

Die directe Entfernung zwischen Mailand und Bludenz ist 196 Kilometer, zwischen Bludenz und Stuttgart 188 Kilometer.

---

[1] Zeitschrift für Meteorologie III. Band 1868, pag. 574, Hann: Der Scirocco der Südalpen.

Die Luftdruckdifferenz Mailand-Bludenz im Niveau von 590^{m} ist demnach 6·8^{mm} oder 3·9^{mm} auf den Äquatorgrad, zwischen Bludenz und Stuttgart hingegen —0·3, welches Resultat aber wahrscheinlich auf eine kleine Fehlerquelle zurückzuführen sein dürfte. Wie mir Herr Prof. Schoder mittheilt, war die Station 1855/74 in den Händen eines Reallehrers, der mehrmals seine Wohnung wechselte, im Mittel scheint die Seehöhe nahezu 271 Meter gewesen zu sein (seit 1874 ist sie 268·4^{m}). Nimmt man nur die Beobachtungen während der intensiven Föhnstürme von Jänner, Februar 1869, Jänner 1872 und December 1872, so erhält man im Mittel von 19 Beobachtungen: Bludenz B=698·6^{mm}, Stuttgart 726·1, letzterer Stand reducirt auf 590^{m} gibt 698·0, somit eine Barometerdifferenz von 0·6^{mm} zwischen Bludenz und Stuttgart. Dies dürfte der Wahrheit näher kommen. In jedem Falle sehen wir aber, dass der Gradient zwischen Stuttgart und Bludenz sehr gering ist, während er zwischen Mailand und Bludenz sehr beträchtlich wird. Die Alpen bilden also eine Scheidewand, welche den Luftaustausch in den unteren Schichten hemmt. Während demnach die Luft des Alpenvorlandes und der Alpenthäler schon in die Barometerdepression der atlantischen Cyclonen hineingezogen wird, bleibt die Luft auf der Südseite der Alpen noch ausserhalb der directen Wirkungssphäre derselben. Es ist aber klar, dass wenn die Luft aus den Alpenthälern gegen die im W oder NW befindliche Depression hin abfliesst, dafür Luft aus der Höhe vom Alpenkamm in die Thäler herabstürzen wird und zwar mit grosser Vehemenz, da ja im Süden der Luftdruck noch hoch ist.

Viel schärfer lässt sich dieser Luftdruckunterschied zwischen der Nord- und Südseite der Alpen bei Föhnwind aus den Beobachtungen der schweizerischen Stationen ableiten. Ich habe hiezu die schon früher benützten Föhnstationen vom 31. Jänner und 1. Februar 1869 und vom 1., 4., 7., 8., 9. Jänner 1874 benützt. Nachfolgende kleine Tabelle enthält die auf das gleiche Niveau von 278^{m} (Basel) reducirten Barometerstände. Die Reduction ist bei den geringen Höhendifferenzen mit ziemlicher Genauigkeit ausführbar, vorausgesetzt die genaue Kenntniss der Seehöhen. Dieselben sind für die benützten Stationen: Basel 278, Altstätten 478, Altdorf 454, Marschlins 545 und Lugano 275 Meter.

Luftdruck am 31. Jänner und 1. Februar 1869 im Niveau von 278 Meter.

Datum und Stunde		Basel	Altstätten	Altdorf	Marschlins	Lugano	Differenz Lugano Altdorf	Differenz Altdorf Basel
31. Jän.	7h	736·2	736·3	739·2	740·5	744·8	5·6	3·0
	1h	37·1	37·7	39·7	40·5	43·9	4·2	2·6
	9h	35·5	36·6	37·8	40·4	44·5	6·7	2·3
1. Feb.	7h	30·9	32·4	35·1	37·7	43·5	8·4	4·2
	1h	30·5	31·2	33·6	35·7	42·5	8·9	3·1
	9h	32·8	33·2	34·7	35·1	40·6	—	—
	Mittel	733·8	734·6	736·7	738·3	743·3	6·76	3·04

Die Entfernung Altdorf-Basel beträgt 109 Kilometer, Altdorf-Lugano 100 Kilometer. Man sieht also direct, wie sich der Gradient beim Überschreiten der Alpenmauer sprungförmig ändert. Auf den Äquatorgrad bezogen war die mittlere Luftdruckdifferenz Altdorf-Basel während der Dauer des Föhn $3 \cdot 10^{mm}$, jene zwischen Altdorf und Lugano aber 7·53, mehr als zweimal grösser und so beträchtlich, wie sie sonst nur bei den heftigsten Stürmen beobachtet wird. Dennoch war die Luft auf der Südseite der Alpen ruhig, denn die Alpenkette hinderte den Luftaustausch in diesem Niveau.

Es wäre nun interessant, den Gradient in jener Höhe kennen zu lernen, wo bereits ein Luftaustausch zwischen Südseite und Nordseite der Alpen stattfinden kann. Die Station auf dem Rigi in Verbindung mit etlichen Stationen in ähnlicher Seehöhe auf den Alpenpässen könnte hiezu einige Anhaltspunkte liefern. Für das Jahr 1869 liegen auch barometrische Beobachtungen vom Rigi gedruckt vor. Man hat früher in der Schweiz bei Publication der Luftdruckbeobachtungen leider die Form der Abweichungen vom Monatsmittel gewählt, wodurch leicht Fehler oder doch eine gewisse Unsicherheit über die absoluten Werthe, die man allein brauchen kann, entstehen. Folgende sind die auf absolute Werthe zurückgeführten Luftdruckangaben von Sils (1810m) Bevers (1715) und Rigikulm (1784m) reducirt auf das Niveau von 1874 Meter:

	31. Jänner			1. Februar		
	7^h	1^h	9^h	7^h	1^h	9^h
Bevers	619·2	18·7	19·4	17·5	15·8	13·8
Sils	618·5	18·5	18·9	17·2	16·4	14·0
Mittel.....	618·8	18·6	19·1	17.3	16·1	13·9
Rigikulm..	615·1	15·8	15·5	12·4	11·3	11·8
Differenz..	3·7	2·8	3·6	4·9	4·8	2·1

Da die Entfernung vom Rigi nach Sils und Bevers 120 Km. beträgt, so war die mittlere Luftdruckdifferenz auf den Äquatorgrad bezogen während der Dauer des Föhn $3·72^{mm}$ oder auf das Meeresniveau reducirt, um mit den gewöhnlichen Gradienten vergleichbar zu werden, $4·6^{mm}$; ein ganz bedeutender Gradient.

Berechnet man auf ähnliche Weise die Barometerdifferenz Rigikulm-Grimsel, so erhält man im Mittel für die 5 Terminbeobachtungen der Föhndauer

	31. Jänner			1. Februar			
	7^h	1^h	9^h	7^h	1^h	(9^h)	Mittel
ΔB	1·5	2·2	2·5	2·2	1·8	(1·0)	2·04

Da die Entfernung Rigikulm-Grimsel nur 56 Km. beträgt, so gibt die Reduction auf den Äquatorgrad $4·05^{mm}$, reducirt aufs Meeresniveau $5·0^{mm}$. Es bestand also damals zwischen dem Alpenkamm und dem unmittelbaren Alpenvorland im Niveau von 1780^m ein Gradient von $3·9^{mm}$ (oder $4·8^{mm}$ aufs Meeresniveau reducirt), während er im Niveau von 280^m bloss $3·1^{mm}$ betrug. Es würde interessant sein, diese Gradienten auch bei anderen Föhnstürmen aufzusuchen, um zu sehen, ob dieselben in der That in den höheren Niveaus etwas grösser sind, als im Niveau des Flachlandes.

Für die Föhnstürme vom Jänner 1877 ist eine solche Berechnung leider nicht möglich, da die Beobachtungen vom Rigi fehlen. Ich kann hier nur die Gradienten im Niveau des Flachlandes bestimmen, was durch die folgende Tabelle geschieht. Die Seehöhe der Station Glarus (473^m) wurde von mir durch die gleichzeitigen Luftdruckmittel Glarus-Altdorf bestimmt.

Luftdruckvertheilung im Jänner 1877 im Niveau von 278 Meter.

Jänner 1877	Stunde	Basel	Altstätten	Altdorf	Glarus	Lugano	Lugano Altdorf	Altdorf Basel
1.	7h	727·2	729·0	730·5	—	739·5	9·0	3·3
	1h	27·3	28·6	30·2	29·0	38·1	7·9	2·9
	9h	29·4	29·3	31·0	—	37·4	6·4	1·6
4.	7h	28·2	28·8	30·0	—	39·2	9·2	1·8
	1h	27·0	29·0	31·1	29·8	37·3	6·2	4·1
	9h	23·8	25·1	24·5	—	34·7	10·2	0·7
7.	7h	32·3	33·3	33·1	—	38·2	5·1	0·8
	1h	31·5	32·5	33·6	32·8	38·7	5·1	2·1
	9h	34·4	35·6	37·0	—	41·6	4·6	2·6
8.	7h	37·7	37·7	38·3	—	43·6	5·3	0·6
	1h	36·0	37·7	38·3	37·4	45·0	6·7	2·3
	9h	36·2	38·4	40·1	—	46·3	6·2	3·9
9.	7h	37·2	38·5	39·6	—	47·0	7·4	2·4
	1h	40·4	40·9	41·0	41·7	46·0	5·0	0·6
	9h	42·1	42·7	42·0	—	45·8	3·8	—0·1
Mittel	—	732.7	733·8	734·7	(734·0)	741·2	6·5	2·0

Die Luftdruckdifferenz ist auch hier wieder im Mittel mehr als dreimal grösser zwischen Altdorf und Lugano, gegenüber jener zwischen Altdorf und Basel. Auf den Äquatorgrad reducirt erhält man:

Luftdruckdifferenz Basel—Altdorf = 2·04

„ „ Altdorf—Lugano = 7·23.

Bilden wir ein Mittel aus den vorhin berechneten und diesen letzteren Werthen mit Rücksicht auf die Zahl der Beobachtungen, so erhalten wir:

Luftdruckdifferenz pro Äquatorgrad bei Föhnstürmen

Basel —Altdorf = $2 \cdot 3^{mm}$

Altdorf—Lugano = $7 \cdot 3^{mm}$

In einzelnen Fällen steigt der Gradient zwischen Altdorf und Lugano sogar auf 10 bis 12^{mm} und wird dann gleich jenem bei den heftigsten tropischen Orkanen.

Dass dieser Gradient sich längere Zeit erhalten kann, obgleich doch die Luft in den Höhen zwischen 2000 und 3000^{m} frei gegen die im W oder NW befindliche Depression abfliessen kann, liegt wohl zum Theile in dem Temperaturunterschied der Luftsäule von jener Höhe auf der Nordseite und Südseite der Alpen. Die früher aufgestellten Formeln ergeben:

		Nordseite	Südseite
Mittlere Temp. in	278 Met.	14·7	4·8
	2500 „	−4·1	−4·1
	Mittel	5·3	0·3

Berechnen wir damit das Gewicht einer Luftsäule von 2222^{m} Höhe und drücken dasselbe durch die Höhe der Quecksilbersäule aus, die demselben äquivalent ist, so erhalten wir:

Gewicht der Luftsäule im Süden	211·1^{mm}
„ „ „ „ Norden	207·3
	3·8.

Von der mittleren Luftdruckdifferenz von 6·6^{mm} zwischen Lugano und Altdorf erklären sich somit 3·8 durch den Temperaturunterschied und es bleiben noch 2·8^{mm} für den oberen Gradienten, was mit dem früher ermittelten Druckunterschied in dem Niveau der tiefsten Alpenpässe ziemlich gut stimmt.

Man hat früher Schwierigkeiten gefunden, das Herabsteigen des Föhn in die innersten Alpenthäler zu erklären und noch ganz neuerlich hat Hr. Hébert, Prof. in Moulins, in einer sonst sehr verdienstlichen Arbeit: Études sur les lois des grands mouvements de l'atmosphère (Annnuaire de la Soc. Mét. des France 29e année 1881) eine sehr künstliche und gewagte Hypothese aufgestellt, um das Auftreten des Föhn in den Alpenthälern zu erklären. Hr. Wild hat früher eine saugende Wirkung des über die Alpenkämme hinbrausenden Sturmes angenommen, welche aber eher einen aufsteigenden Luftstrom in den Thälern erzeugen müsste. In neuerer Zeit hat Hr. Billwiller diese scheinbare Schwierigkeit auf die einfachste Weise durch den Hinweis auf die natürlichen Consequenzen eines Luftzuflusses gegen die atlan-

tischen Depressionsgebiete hinweggeräumt (Zeitschrift für Meteorologie 1878, B. XIII, p. 319).

Die Schwierigkeit ist entstanden, indem man von der Vorstellung eines von Süden kommenden über die Alpenkämme hinwegwehenden Südsturmes als Ursprung des Föhn ausging, oder doch diese Vorstellung implicite demselben zu Grunde legte. Man hat, wie ich es selbst früher gethan habe, den nicht ganz adäquaten und leicht zu Missverständnissen führenden Satz aufgestellt, dass ein Föhn entsteht, wenn ein stürmischer Wind einen hohen Gebirgskamm überweht. Nun liegt aber das Motiv der Föhnstürme nicht jenseits, auf der Rückseite der Alpen, sondern diesseits auf deren Nordseite, und es besteht in dem Auftreten tiefer Barometer-Minima auf irgend einem Theile der Strecke zwischen der Bay von Biscaya und Nordschottland. Diese Barometer-Minima ziehen zunächst die Luft über Frankreich und Mitteleuropa in den Wirbelsturm hinein und später auch die Luft über den Niederungen der Nordschweiz und der Alpenthäler. Indem aber die Luft aus den Alpenthälern nach N und NW hin abfliesst, stürzt sich die Luft von den Alpenkämmen in die Thäler hinab, erwärmt sich dabei und bildet den Föhn. Die Föhnluft kommt im Anfange gar nicht vom Süden her, dies im weiteren Sinne des Wortes genommen, es ist die Luft über den Alpenkämmen selbst und der unmittelbar südlich davon gelegenen Schichten, welche in die Thäler hinabfällt, sie ist gar nicht im Süden am jenseitigen Gebirgshange emporgestiegen. Ihre hohe Temperatur erklärt sich aus der normalen Wärme der betreffenden höheren Luftschichten im Winter und der raschen Temperaturzunahme beim Niedersinken auf der Nordseite vollkommen, wie Seite 15 schon gezeigt worden ist.

Es erklärt sich daraus auch, dass der Föhn im Sommer keine so grosse Temperatursteigerung hervorbringen kann als im Winter, denn während in letzterer Jahreszeit die herabsinkenden Luftmassen für je 100^m einen relativen Temperaturzuwachs von $0 \cdot 99 - 0 \cdot 45 = 0°.54$ erhalten, beträgt derselbe im Sommer nur $0 \cdot 99 - 0 \cdot 70 = 0°.29$, das ist fast nur die Hälfte. Dessgleichen ist dieser relative Temperaturzuwachs im Herbst grösser als im Frühling und Sommer ($0 \cdot 46$ im Herbst, $0 \cdot 32$ im Frühling) was wieder damit übereinstimmt, dass der Föhn im Herbst relativ

wärmer ist als im Frühling und dem Winterföhn in der Temperaturerhöhung am nächsten kommt. Natürlich muss man dabei auch die grössere Intensität der Barometer-Minima in der kälteren Jahreszeit in Betracht ziehen.

Im weiteren Verlaufe werden dann allerdings auch die tieferen Luftschichten auf der Südseite in die Bewegung hineingezogen, die Luft auf der Südseite steigt dann auf und es tritt Condensation des Wasserdampfes ein. Der Regenfall auf der Südseite der Alpen wird im allgemeinen dem Auftreten des Föhn erst nachfolgen, nicht vorausgehen. Dies war auch beim Föhn vom 23. September 1866 der Fall, wie Hr. L. Dufour ausdrücklich hervorhebt (Pag. 65 seiner Monographie): „Le Foehn ayant commencé dans les vallées plusieurs heures avant que la pluie commencât sur les hauteurs, cette précipation d'eau, et la condensation qui doit la précéder, ne peuvent donc pas être considérées comme la cause de la sécheresse de l'air."

Es ist gar nicht nöthig, dass auf der Nordseite der Alpen im Flachlande ein S- oder SW-Sturm herrscht, wie ja auf der Südseite den Nordföhn überhaupt ruhige Luft oder variable Winde begleiten. Es kann, wie wir dies in den vergleichenden Tableaux der Witterungsverhältnisse bei Föhn in Bludenz sahen, der Föhnsturm nur in den inneren Alpenthälern herrschen, während im Norden wie im Süden kein Sturm weht. Wohl aber muss jederzeit ein nach NW oder N gerichteter Barometergradient vorhanden sein, der die Luft aus den Alpenthälern zum Abfliessen zwingt. Im Hintergrunde der Thäler, die sich nach NW und N öffnen, werden dann locale Föhnstürme eintreten. Kurz, es erklären sich auf diese Weise alle die Eigenthümlichkeiten der Luftbewegung bei Föhnwinden, welche die Aufmerksamkeit und das besondere Interesse auf sich gezogen haben. Hr. L. Dufour hat in seiner vortrefflichen, ja einzig in ihrer Art dastehenden Monographie über den Föhn vom 23. September 1866 in der Schweiz (Bulletin de la Soc. Vaud. des sc. nat., Vol. IX, 1868) eine grössere Anzahl von bemerkenswerthen Thatsachen über die Bewegung der Luft bei diesem Föhnsturm zusammengestellt, die räthselhaft bleiben, wenn man an der Ansicht eines von Süden kommenden, über die Alpen hinwegwehenden Sturmes festhält. So herrschte z. B. der SW-Wind schon am 21. September mit grosser Heftigkeit auf den

Plateaux des Jura, ohne die Temperatur erheblich zu erhöhen; erst am 22. September, als der Föhn in den Alpenthälern auftrat, stellte sich auch auf dem Jura die hohe Temperatur ein (Pag. 37). Natürlich, denn erst als die Luft auch von den Alpenkämmen herab in die Bewegung hineingezogen wurde, konnte die mit dem Herabsinken derselben verbundene höhere Wärme eintreten.

In den Niederungen, wo die Luft nur horizontal dem Depressionsgebiete zuströmt, kann keine derartige Erwärmung eintreten.

Das stossweise Auftreten und zeitweilige Aufhören des Föhn hängt mit dem Vorübergange von secundären Depressionen zusammen, wie ja auch im Flachlande zu einer Zeit, wo sich rasch Depressionen folgen, die Windfahne zwischen SE und NW spielt, während freilich die begleitenden Temperatur- und Feuchtigkeitsänderungen nicht so gross sind und desshalb wenig Beachtung finden. Zum Belege hiefür führe ich aus den Beobachtungsjournalen des Herrn Baron von Sternbach die folgenden Daten an:

Jänner 1873	19	20	21	22	23	24
			Luftdruck Mm.			
6^h	703·1	687·0	687·2	696·5	696·1	699·9
2^h	697·7	683·8*	684·9*	691·8*	699·6	697·6*
10^h	692·8	684·9	694·4	693·7	704·2	698·5

19. Früh Aufheiterung. Um $9^1/_4{}^h$ bricht plötzlich der Föhn los und steigert sich bis Abends zur Stärke 5 bis 7, dabei wechselnde Bewölkung. 20. Die Nacht hindurch stürmischer Föhn, der auch Früh und Vormittags anhält (Temperatur 6^h 15°2, Feuchtigkeit 27%) auf den Bergen schneit es zeitweise, der Föhn wird schwächer und geht um $3^1/_2{}^h$ in NW_3 über, Abends N_2 (Abends 10^h Temperatur, 4·0. Feuchtigkeit 84%). 21. Vor Mitternacht NW oder N_4, dann wieder SE mässig und es beginnt erst zu regnen und von 2^h am an zu schneien; um 6^h am schneite es nicht mehr. Niederschlagsmenge 5·3 Mm. Von 8^h am an rasche Aufheiterung von NW, die Bergspitzen stäuben von Süden. Vormittag sonnig von 11^h an wieder Föhnwind 5 und abermalige Trübung. Um 5^h pm schlägt der Föhn in NW um, $5^1/_2{}^h$ pm kurzer NW-Sturm, es beginnt zu schneien und schneit bis 8^h pm, dann ruhig. 22. Früh rasche Aufheiterung bei E, der bald in SE (Föhn) übergeht und von 8^h am an in gewohnter Weise

seine Tonscala vom Brummen bis zum Pfeifen durchspielt — einige Stunden heiter, dann Bewölkung von W. Der Föhn hält an, manchmal stürmisch. 23. Föhn bis Morgens, dann NW und N_3, gegen 6^h am beginnt es zu schneien. Schneetreiben mit Sonnenblicken ebenso Nachmittag. Von 8^h pm an rasche Aufheiterung. 24. Nach Mitternacht Föhnwind stossweise. Es bewölkt sich wieder. Wolkenzug aus W. Sonnenblicke. Tagsüber wechselnde Bewölkung. Nachmittag sonnig, Abends heiter.

Man sieht aus diesen Aufzeichnungen und den oben mitgetheilten Luftdruckbeobachtungen recht deutlich, wie jedem Minimum der SE oder Föhn vorausgeht und es begleitet, dann aber in NW und N mit Schnee umschlägt. Es wäre von Interesse an einer Föhnstation ein registrirendes Barometer aufzustellen und die Luftdruckschwankungen mit den Föhnstössen in Connex zu bringen. Man würde vielleicht directer als es jetzt möglich ist, die Beziehungen zwischen dem Abfluss der Luft aus den Thälern gegen die westliche Depression hin und das Herabfallen der Luft von den Alpenkämmen in Form von Föhnstössen nachweisen können.

Ich habe aus dem meteorologischen Journale des Herrn von Sternbach, von dessen detaillirten Angaben soeben eine Probe mitgetheilt worden ist, alle Tage, an denen Föhn wörtlich notirt wurde, ausziehen lassen. Im Mittel von 10 Jahren, in denen aber von einigen Monaten die wörtlichen Notizen fehlen, ergab sich folgende jährliche Periode der Häufigkeit des Föhnwindes zu Bludenz.

Mittlere Zahl der Föhntage.

December	4·4	März	3·3	Juni	0·6	September	3·5
Jänner	3·6	April	2·6	Juli	1·3	October	2·9
Februar	2·6	Mai	2·3	August	1·2	November	3·6

Wie zu erwarten zeigt die jährliche Periode, aus einer so kurzen Beobachtungsperiode abgeleitet, noch keine vollkommene Ausgleichung der Zufälligkeiten. Doch ist der Gang im Ganzen schon sehr entschieden mit einem Maximum im December und einem Minimum im Juni. Die Mittel der Jahreszeiten sind:

Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
10·6	8·2	3·1	10·0	31·9

Herbst und Winter haben die grösste Zahl der Föhntage. Im Jahresmittel hat Bludenz mehr als einen ganzen Monat Föhn. Bei der hohen Temperatur, die der Föhn in Bludenz bringt, muss dies die Temperatur wesentlich erhöhen, namentlich im Winter und Herbst. In der That ist die mittlere Temperatur von Bludenz auf das Meeresniveau reducirt (mit 0·58 pro 100 M.) 11°·6, die mittlere Wintertemperatur (mit 0·45 reducirt) 1°·9, die des Herbstes circa 12°.2 C., alles Temperaturen, die relativ sehr hoch sind. Den wohlthätigen Einfluss des Föhn auf die Maiscultur in Nordtirol und das inselförmige Vorkommen von Pflanzen, die einer höheren Wärme bedürfen, hat Kerner in seinen ausgezeichneten pflanzen-geographischen Arbeiten öfter hervorgehoben, so auch in einer an mich gerichteten Mittheilung über den Föhn in Innsbruck [1].

[1] Zeitschrift für Meteorologie 1868, B. III., Pag. 346.

Über Ausstrahlung und Absorption.

I. Abhandlung.

Von Dr. **Ernst Lecher.**

(Mit 7 Holzschnitten.)

Im Jahre 1860 hat Kirchhoff die beiden Begriffe Ausstrahlung und Absorption in eine einfache und klare Beziehung zu einander gebracht. Trotzdem seither eine Unzahl experimentellen Materiales gesammelt wurde, sind wir dennoch dem eigentlichen Vorgange der Strahlung und Absorption in seiner Abhängigkeit von Wellenlänge und Temperatur nicht näher getreten. Das Gesetz dieser Abhängigkeit aufzusuchen, ist das schliessliche Ziel einer grösseren Anzahl von Rechnungen und Messungen, welche ich unter obigem gemeinsamen Titel veröffentlichen will.

Man wird finden, dass ich gleich in dieser ersten Abhandlung einen von der gewöhnlichen Auffassungsweise scharf getrennten Standpunkt einnehme. Mag man denselben im weiteren Verlaufe berechtigt finden oder nicht, so ist mir gleichwohl sicher, dass die betreffenden Partien der Optik und strahlenden Wärme durch Einführung eines sehr einfachen Gedankens in jedem Falle nur gewinnen können. Ich bin nämlich der bestimmten Ansicht, dass die Entwicklung der Molecularphysik früher oder später auf diesen Punkt kommen musste, dass mehr weniger genau dieselben Ideen, wie ich sie gebe, von irgend einer anderen Seite aufgestellt worden wären; hat doch die einfachste Auffassung eben in ihrer Einfachheit schon eine gewisse Berechtigung. Ich hoffe daher, selbst im ungünstigsten Falle nicht umsonst gearbeitet zu haben, denn es musste gewiss einmal untersucht werden, ob der scheinbar einfachste und verlockendste Weg im weiteren Verlaufe zum Ziele führt oder nicht.

Die zunächst vorliegende Arbeit zerfällt in drei Theile:

1. Der erste Theil gibt eine mathematische Betrachtung. Wenn ein Körper Wärme oder Licht ausstrahlt, so wird die vom eigentlichen Ursprunge des Strahles, von den einzelnen schwingenden Massentheilchen ausgehende Bewegung (φ) schon im Innern des Körpers geschwächt, indem ein Bruchtheil a der Strahlung φ auf der Längeneinheit des Weges absorbirt wird. Ferner wird ein Theil der Gesammtstrahlung beim Austritt aus der Oberfläche des Körpers wieder ins Innere zurückreflectirt. Was man nun gewöhnlich Strahlung nennt, ist aus vielen physikalischen Einzelwirkungen zusammengesetzt; ebenso das, was man gewöhnlich Absorption heisst. Beide Grössen wurden zunächst in der angedeuteten Weise in ihre Summanden zerlegt, welche zum Theile ganz neue physikalische Begriffe sind, an deren nähere Kenntniss ich grosse Hoffnungen knüpfe. — Ferner wurde dann das Kirchhoff'sche Gesetz in der neuen Darstellungsweise ausgedrückt als $-4 \log\text{nat}\,(1-a) = \frac{\varphi}{F}$, wobei F die Strahlung eines ideal schwarzen Körpers darstellt in Bezug auf dieselbe Wellenlänge und Temperatur, für welche a und φ gelten. Ferner folgt, dass bei genügender Dicke der Unterschied des Ausstrahlungsvermögens verschiedener Körper nur herrührt von dem Unterschiede des Reflexionsvermögens, weil die ursprünglich gleiche Strahlung beim Verlassen des Körpers in verschiedener Weise ins Innere zurückreflectirt wird.

2. Der zweite Theil behandelt Dinge mehr hypothetischer Natur. Unter Annahme der Constanz von a für verschiedene t ergibt sich, dass die Strahlung eines jeden Körpers schon bei der tiefsten Temperatur alle Wellenlängen besitzt, die sie bei höheren Temperaturen hat, und dass die relative spectrale Vertheilung der ausgestrahlten Energie von der Temperatur des strahlenden Körpers unabhängig ist. Dabei wirkt aber die Änderung des Reflexionsvermögens mit der Temperatur störend ein; wenn daher stark reflectirende Körper bei höheren Temperaturen mehr violette Strahlen aussenden, geschieht das nur, weil bei diesen Temperaturen die violetten Strahlen im Verhältniss zu den rothen beim Heraustreten aus dem Medium weniger stark zurückreflectirt werden.

3. Der letzte Theil bringt einige experimentelle Erörterungen zu den beiden vorigen Sätzen. Es zeigte sich da sowohl bei hermometrischen als auch bei photometrischen Versuchen, dass, je geringer das Reflexionsvermögen eines Körpers ist, in eben demselben Masse auch die Giltigkeit der beiden ausgesprochenen Gesetze wächst.

Alle diese Sätze scheinen mir unerlässlich zu sein, sowie man den Vorgang der Strahlung in seine physikalischen Summanden zerlegt, wobei jedoch ein besonderes Gewicht zu legen ist auf den Einfluss, welchen die Reflexion an der Oberfläche auf die aus dem Inneren des Körpers herauskommende Strahlung ausübt.

I. Absorption und Ausstrahlung bei derselben Temperatur.

Scheinbares Ausstrahlungsvermögen. Gewöhnlich nennt man totale Emission diejenige Wärmemenge, welche ein Körper per Flächen- und Zeiteinheit ausstrahlt, wenn seine Temperatur die der Umgebung um einen Grad Celsius übersteigt.[1] Diese Definition müsste, falls man sie mit dem Prevost'schen Grundprincip der strahlenden Wärme in Einklang bringen wollte, verschiedene Nebenbestimmungen enthalten; trotzdem aber wäre obigem Begriffe nur schwer eine tiefere physikalische Deutung abzugewinnen. Ich nenne im Gegensatze hiezu „scheinbares Ausstrahlungsvermögen" jene Wärmemenge, welche von der Einheit der Oberfläche eines im Übrigen beliebigen Körpers im Vacuum weggeht; dabei ist natürlich auf Form, Temperatur und Farbe der Einhüllung keinerlei Rücksicht zu nehmen. Dies so definirte Ausstrahlungsvermögen ist dann bei einem und demselben Körper eine nur von der Temperatur[2] abhängige Grösse. Die Gestalt aber dieser Function kann bei verschiedenen Körpern verschieden sein.

[1] Wüllner, Exper. Phys. 1875 III. 205. — Rosetti, Ann. de chim. et de phys. (V), T. XVIII. 187 u. s. w. Hingegen hat Gouy, C. R. LXXXVIII denselben Namen zur Bezeichnung jener Grösse angewendet, die viel besser „Absorptionsvermögen" genannt werden sollte.

[2] Es ist auch dieser Satz bezweifelt worden, doch schienen mir die Einwendungen nicht überzeugend. Schuster, Phil. Mag. (5) XII.

Scheinbares Absorptionsvermögen. Eine ideal schwarze Fläche ist eine solche, die jede Art von auffallender Strahlung vollkommen absorbirt;[1] dieselbe habe ein Ausstrahlungsvermögen $F(t)$, wo t die in beliebigen Graden gezählte Temperatur der strahlenden schwarzen Fläche bezeichnet.

Es befinde sich nun in einer nach aussen hin adiabatischen Hohlkugel eine kleine concentrische Kugel angebracht, wie z. B. bei allen Versuchen nach der Methode von Dulong und Petit. Die gegen einander strahlenden Flächen dieser beiden Kugeln seien schwarz und ferner haben beide dieselbe Temperatur. Wenn der Radius der äusseren Kugel R, der der inneren r ist, wird von aussen $4R^2\pi . F(t)$, von innen aber $4r^2\pi . F(t)$ ausgestrahlt werden. Jeder Strahl, der die innere Kugel verlässt, muss an der äusseren absorbirt werden; in der entgegengesetzten Richtung jedoch wird in Folge des Grundsatzes, dass Wärme nie von selbst von einem kälteren zu einem wärmeren Körper übergehen kann,[2] nur der Theil $\frac{r^2}{R^2} . 4R^2\pi F(t)$ an die mittlere Kugel gelangen. Denn nur so ist die Summe der auffallenden und abgehenden Strahlung gleich Null.

Es werde nun die äussere Kugelhülle ersetzt durch eine solche, die nach innen ideal reflectirt, und auf welche, ebenfalls nach innen, eine $\frac{x}{2}$ Längeneinheiten dicke Schichte eines beliebigen Körpers unmittelbar aufgetragen ist. Die kleine Kugel bleibt schwarz. Der aufgetragene Körper hat ein anderes scheinbares Ausstrahlungsvermögen als ein schwarzer Körper; die von einer Schichte dieses Körpers von der Dicke x ausgehende Wärmemenge sei dargestellt durch eine von der Temperatur abhängige Grösse $f(t)$. Wenn auf eben diesen Körper, welcher eine Dicke x nach einer

---

[1] „Einen Körper, der kein Licht reflectirt, wenn es auf ihn auffällt nenne ich schwarz". Helmholtz, Physiologische Optik, pag. 280. Diese Definition ist nicht erschöpfend, denn eine dünne Schichte eines Körpers kann gar kein Licht reflectiren, ist deshalb aber noch nicht schwarz.

[2] Zuerst ist dieser Satz klar ausgesprochen bei Fourier. Später hat Clausius denselben verallgemeint und zu wichtigen Folgerungen benützt. Mech. Wärmetheorie, I, 1876, pag. 81. In allerjüngster Zeit hat A. Schuster Einwendungen dagegen erhoben. Phil. Mag. (5) XII.

bestimmten Richtung besitzt, in eben dieser Richtung von einem schwarzen Körper gleicher Temperatur die Strahlung $F(t)$ auffällt, so werde ein Bruchtheil der auffallenden Strahlung, nämlich $\alpha_t F(t)$ absorbirt. Den Werth α_t nenne ich das „scheinbare Absorptionsvermögen" dieses Körpers für die Temperatur t.

Kirchhoff's Absorptionsgesetz. Aus den oben gegebenen Bemerkungen folgt unmittelbar, dass

$$4r^2\pi\alpha_t F(t) - \frac{r^2}{R^2} 4R^2\pi f(t) = 0$$

oder

$$\alpha_t = \frac{f(t)}{F(t)} \qquad (1)$$

Diese Beziehung wurde bekanntlich zuerst von Kirchhoff in ihrer allgemeinsten Form entwickelt, und gilt ebenso für die Gesammtstrahlung als auch für die einzelnen Wellenlängen.[1] Nun ist α vermöge seiner Bedeutung stets ein echter Bruch oder höchstens gleich Eins; daher muss immer

$$F(t) \geqq f(t) \qquad (2)$$

sein. Für jede Temperatur und jede Wellenlänge ist also das Ausstrahlungsvermögen eines schwarzen Körpers stets grösser oder höchstens gleich dem Ausstrahlungsvermögen anderer Körper.

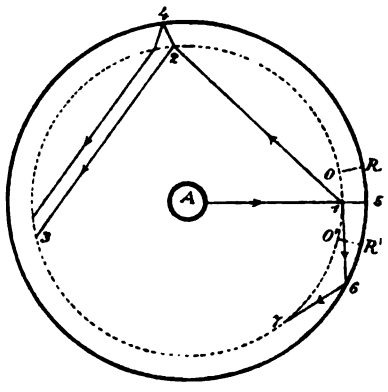
Es ist aber nur zum Theile erlaubt, das α_t als eigentliche Absorptionsgrösse zu betrachten und ebenso wäre es unrichtig in $f(t)$ die Summe der Strahlungen der einzelnen Strahlungscentra zu erblicken; beide Grössen sind vielmehr sehr zusammengesetzter Natur und eine genaue Betrachtungsweise gibt einige nicht uninteressante neue Beziehungen.

Zerlegung des scheinbaren Absorptionsvermögens in seine physikalischen Summanden. Ich muss zunächst vorausschicken, dass sich die folgenden Betrachtungen auf eine bestimmte Wellenlänge (und nicht auf die Gesammtstrahlung) beziehen. Umstehende Figur versinnliche uns die eben besprochenen zwei concentrischen Kugelschalen. Die Kugel in der

[1] Pogg. Ann. 109.

Mitte ist ideal schwarz und an der äusseren, idealreflectirenden, sehr grossen Hohlkugel ist ein beliebiger Körper in einer Höhe $OR = \frac{x}{2}$ unmittelbar aufgetragen. $\frac{x}{2}$ ist eine gegen $(A,1)$ sehr kleine Grösse.

Fig. 1.



Die innere Kugel A strahlt per Flächeneinheit die Wärme $F(t)$ aus, welche, sobald die innere Kugel gegen die äussere sehr klein ist, in normaler Richtung auf OO' auffällt. Nun tritt aber eine theilweise Reflexion des Strahles ein. Von der Einheit der senkrecht auffallenden Strahlung werde ρ regelmässig, und μ diffus reflectirt. Es sind ρ und μ die regelmässigen oder diffusen Reflexionscoëficienten in normaler Richtung.[1] Dann wird von der auf OO' auffallenden Strahlung $\rho F(t)$ und $\mu F(t)$ zurückreflectirt. Verfolgen wir einen Strahl dieses letzteren Theiles, z. B. (1, 2). In 2 wird der Strahl zum grössten Theil entweder regelmässig reflectirt (2, 3) oder ins Innere des Körpers hineingebrochen (2, 4). Die Richtung all dieser Linien wird auch im weiteren physikalischen Verlaufe nie mehr so, dass sie zu A gelängen. Allerdings wird bei 2 vom Strahl (1, 2) ein Theil diffus nach A reflectirt und auch von den Strahlen (2, 4) und (2, 3) kann durch diffuse Reflexion schliesslich Etwas nach A kommen. Nun besitzt aber der urprüngliche Strahl (1, 2) schon sehr wenig lebendige Kraft, so dass wir mit Vernachlässigung eines überaus kleinen Theiles der diffusen Zerstreuung in 2 annehmen können, dass die in 1 diffus reflectirte Strahlung schliesslich in der äusseren Kugel-

[1] Es ist klar, dass die senkrechte Incidenz nicht in mathematischem, sondern in physikalischem Sinne zu nehmen ist. Dieselbe erstreckt sich von einem Einfallswinkel Null bis zu einem Einfallswinkel $x = \arcsin\frac{r}{R}$.

schale absorbirt wird; es ist dies $\mu . F(t)$.[1] Diese diffuse Reflexion ist dadurch entstanden, dass die Oberfläche des Körpers nicht ganz glatt und eben ist; die nämliche Ursache bewirkt aber auch, dass der eindringende Hauptstrahl zum Theil diffus gebrochen wird. Diese Strahlungsmenge sei $\nu F(t)$. Im weiteren physikalischen Verlaufe kann dieser Strahl (1,6,7) nur durch diffuse Zerstreuung und auch das nur im allergeringsten Masse nach A gelangen, welch' letzteren Betrag wir sicherlich nicht mehr werden messen können, nachdem $\nu F(t)$ selbst schon sehr klein ist. Es wird also auch $\nu . F(t)$ schliesslich in der Kugelschale absorbirt werden.[2]

In der Richtung (1, 5) dringt die Menge $F(t)[1-\rho-\mu-\nu]$ in unseren Körper ein, gelangt nach RR', wo sie ideal reflectirt wird und kommt schliesslich wieder in OO' an, wobei aber auf der ganzen Wegstrecke ein beträchtlicher Theil durch Absorption verloren ging.

Wirklicher Absorptionscoëfficient. Wenn die Einheit der Strahlung in unserem Körper den Weg Eins zurücklegt, bleibe die Wärmemenge $a_{t\lambda}$ wirklich im Körper zurück, während $(1-a_{t\lambda})$ die austretende Wärmemenge bezeichnet. Dieses $a_{t\lambda}$ nenne ich den „wirklichen Absorptionscoëfficienten" des Körpers für die Temperatur t und die Wellenlänge λ.[3]

Es wird also in unserem Falle auf dem Wege $(A, 1, 5, 1)$ in 1 die Wärmemenge

$$F(t)[1-\rho-\mu-\nu](1-a)^x$$

ankommen, nachdem die Menge

$$F(t)[1-\rho-\mu-\mu][1-(1-a)^x]$$

absorbirt wurde. Der im Medium zurückgelegte Weg ist x. Die in OO aus dem Medium kommenden Strahlen theilen sich in mehrere Theile. Es bezeichne (analog den Grössen ρ und μ) r und m den regelmässigen, respective diffusen Reflexionscoëfficienten

[1] Sämmtliche Grössen, welche absorbirte Wärmemengen darstellen sind unterstrichen.

[2] Selbstverständlich sind μ, ρ und ν abhängig von der Temperatur und Wellenlänge.

[3] Der Index t und λ bleibt bei der weiteren Entwicklung als selbstverständlich weg.

für Strahlen, die aus dem Medium in normaler Richtung an die Oberfläche gelangen. In unserem Falle wird also

$$r.F(t)[1-\rho-\mu-\nu](1-a)^x$$

noch einmal den Weg (1, 2, 1) machen. Ein anderer Theil

$$m.F(t)[1-\rho-\mu-\nu](1-a)^x$$

wird diffus reflectirt und wenn wir da einen beliebigen Strahl verfolgen, z. B. (1, 6, 7), so sehen wir, dass kein irgendwie nennenswerther Bruchtheil dieser ohnedem schwachen Strahlung an die innere Kugel A gelangen kann. Es wird also obiger Werth absorbirt. Wo aber eine diffuse Reflexion stattfinden kann, eben da muss auch immer diffuse Brechung erfolgen; bezeichnen wir den entsprechenden Coëfficienten (analog dem ν) mit n, so wird im betrachteten Falle

$$n.F(t)(1-\rho-\mu-\nu)(1-a)^x$$

aus unserem Körper so hinausgebrochen, dass diese Strahlung an der inneren Kugel vorbeigeht. Diese Strahlung wird aber auch im weiteren physikalischen Verlaufe für A verloren sein, mit Ausnahme eines sehr kleinen, von weiteren diffusen Zerstreuungen herrührenden und daher zu vernachlässigenden Theiles.

Die in OO' regelmässig nach RR' zurückreflectirte Strahlung kommt zum dritten Male nach OO', wobei die neuerliche Einbusse durch Absorption

$$r.F(t)[1-\rho-\mu-\nu](1-\alpha)^x[1-(1-a)^x]$$

ist. In OO' kommt die Menge

$$r.F(t)(1-\rho-\mu-\nu)(1-a)^{2x}$$

an. Davon wird

$$m.rF(t)(1-\rho-\mu-\nu)(1-a)^{2x}$$

unregelmässig reflectirt und absorbirt. Ebenso wird die diffus aus dem Medium hinausgebrochene Strahlung nach dem oben Gesagten absorbirt

$$n.r.F(t)(1-\rho-\mu-\nu)(1-a)^{2x}$$

Wieder regelmässig nach RR' zurückreflectirt wird

$$r^2F(t)(1-\rho-\mu-\nu)(1-a)^{2x}.$$

Von dieser Menge wird beim nächsten Durchgange

$$\underline{r^2F(t)(1-\rho-\mu-\nu)(1-)^{2x}[1-(1-a)^x]}$$

absorbirt;

$$r^2F(t)(1-\rho-\mu-\nu)(1-a)^{3x}$$

langt in 1 an,

$$\underline{mr^2F(t)(1-\rho-\mu-\nu)(1-a)^{3x}}$$

wird unregelmässig reflectirt,

$$\underline{nr^2F(t)(1-\rho-\mu-\nu)(1-a)^{3x}}$$

wird diffus hinausgebrochen und ebenfalls absorbirt u. s. w.[1]

Wenn wir die unterstrichenen, das heisst absorbirten Ausdrücke addiren, so haben wir

$$\alpha_t F(t) = F(t)\begin{Bmatrix}\mu+(1-\rho-\mu-\nu)[1-(1-\alpha)^x]V\\ \nu+(m+n)[1-\rho-\mu-\nu](1-a)^xV\end{Bmatrix}$$

wo $V=1+r(1-a)^x+r^2(1-a)^{2x}+r^3(1-a)^{3x}+\ldots$

Daher ist, weil $(1-a)$ und r immer kleiner als 1 ist,

$$\alpha_t=\frac{1-\rho-\mu-\nu}{1-r(1-a)^x}[1-(1-a)^x(1-m-n)]+\mu+\nu \qquad (3)$$

Dies gilt natürlich nur für bestimmte Wellenlängen und Temperaturen, es sollten also eigentlich alle Grössen des Indices λ und t besitzen; ich habe sie nur der Bequemlichkeit wegen ausgelassen.

Für $x=\infty$ wird $\alpha'=1-\rho$ (4)

das heisst mit Ausnahme der regelmässig reflectirten Strahlung wird Alles absorbirt.

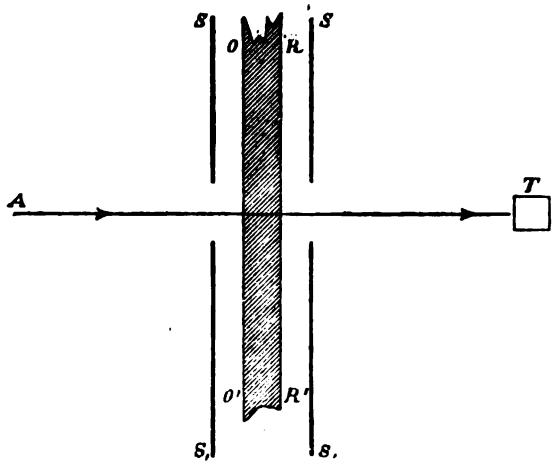
Anordnung bei einer eventuellen praktischen Ausführung. Ich werde später zeigen, dass alle Grössen in (3)

[1] Wie man leicht sieht, gilt diese Betrachtungsweise für sämmtliche Strahlen, deren Einfallswinkel zwischen + und − arcsin $\frac{r}{R}$ liegt.

von der Temperatur des strahlenden schwarzen Körpers unabhängig sind. Wenn ich also die mittlere Kugel auf eine beliebig hohe Temperatur bringe, kann ich für verschiedene x das $\alpha_{\lambda t}$ experimentell bestimmen und so ρ, r, μ, m, n, ν finden, da ja alle diese Grössen bei verschiedenem x gleichbleiben.

In der praktischen Ausführung wäre eine Versuchsanordnung am einfachsten, wie dieselbe beistehende Figur versinnlicht. In der Richtung AT kommt ein Strahl bestimmter Wellenlänge, aber von beliebiger (möglichst hoher) Intensität. SS' sind schwarze Schirme. $ORO'R'$ ist die absorbirende Substanz von der Dicke x.

Fig. 2.



Die Strahlung wird in T gemessen und sinkt durch Einschieben von OR $O'R'$ von 1 auf

$$1-\alpha'^{\lambda}=1-\frac{1-\rho-\mu-\nu}{1-r(1-a)^x}[1-(1-a)^x(1-m-n)]-\mu-\nu \quad (5)$$

Man sieht nämlich leicht, dass der Ausdruck (3) zwar nicht mehr ganz in $ORO'R'$ absorbirt wird, aber doch ganz in seiner Wirkung auf T verloren geht, sobald nur die Schirmöffnung im Verhältniss zu OO, nicht zu gross ist.

Es wird also auch bei Anwendung von homogenen Strahlen ziemlich schwierig, aber doch möglich sein, die Zahl a, das ist

den „wirklichen Absorptionscoëfficienten“ zu bestimmen, welche Zahl höchst wahrscheinlich sehr interessante Beziehungen zu anderen physikalischen Constanten des Körpers liefern wird.

Frühere Arbeiten auf diesem Gebiete. Vollkommen richtig sind jedoch die abgeleiteten Beziehungen nicht. Schon bei der ersten Reflexion (ρ) ist der Strahl etwas in den Körper eingedrungen, ebenso ist der Körper nie absolut gleich dicht und gleich mit Masse erfüllt, es werden also auch in der Mitte des Körpers Reflexionen stattfinden, wie dies besonders bei Gasen zu erwarten ist. Wenn man daher gar für ρ die Fresnel'schen oder andere Formeln einsetzen wollte, so glaube ich, dass die Resultate nur ungefähre sein können. C. Bohn[1] hat die Fresnel'sche Gleichung zu einer derartigen Berechnung verwendet. Man müsste dann in unseren Formeln $r = \rho = \left(\frac{M-1}{M+1}\right)^2$ und $\nu = m = n = \mu = o$ setzen, wo M den Brechungsexponenten des Körpers bezeichnet. Alle diese Annahmen werden aber in den allerseltensten Fällen zulässig sein.

Zöllner's Arbeit über das Ausstrahlungsvermögen. Auch das Ausstrahlungsvermögen unseres Körpers lässt sich schichtenweise mittelst einer geometrischen Progression berechnen. Es hat dies bereits Zöllner[2] versucht und er gelangte zu dem aller Erfahrung widersprechenden Resultate, dass bei hinlänglicher Dicke oder Dichte jeder Körper das Emissionsvermögen eines ideal schwarzen Körpers zeigen müsse. Ein Gold- oder Silberblock strahlt selbst bei unendlicher Dicke ganz anders als ein Kohlenstück. Zöllner hat eben die Oberflächenschichte genau so behandelt, wie die tiefer liegenden.

Wirkliches Ausstrahlungsvermögen. Jeder einzelne Strahl hat seinen Ursprung in einem kleinen Raume, welchen ich das Strahlungscentrum nennen werde. In der Raumeinheit eines Körpers seien eine bestimmte Anzahl solcher Strahlungscentra und die Summe ihrer Wirkungen — ich nenne dieselbe das „wirkliche Ausstrahlungsvermögen“ — sei $\varphi(t)$. Es ist dies

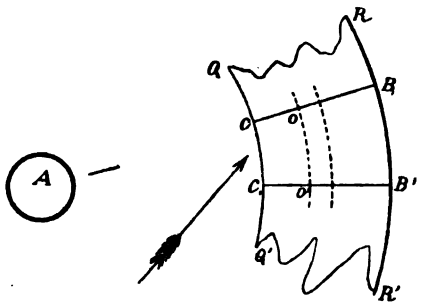
[1] Pogg. Ann. 127.

[2] Pogg. Ann. 142. Zöllner berücksichtigt zunächst Gase, später (Anm. pag. 100) auch andere Körper.

eine ideelle Summe, denn in Wirklichkeit werden die einzelnen Theilchen sich in ihrer Wirkung stören, indem die vorderen einen Theil der Strahlung der hinteren absorbiren; die physikalische Summe der Wirkungen ist also kleiner.

Zerlegung des scheinbaren Ausstrahlungsvermögens in seine physikalischen Summanden. In nebenstehender Figur sei RR' die total reflectirende Kugelhülle, $RR'QQ'$ sei die unmittelbar auf RR' aufgetragene strahlende Substanz. A ist die schwarze Kugel in der Mitte, deren Radius so gewählt ist, dass ein grösster Kreis derselben die Flächeneinheit einschliesst $\left(r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$, der Radius R der Kugelhülle sei sehr gross gegen r und gegen die Dicke der strahlenden Substanz $CB = \frac{x}{2}$. Ich werde nun aus $QQ'RR'$ einen Cylinder $CC'BB'$ herausschneiden, dessen Basis die Flächeneinheit repräsentire $(CC' = \frac{2}{\sqrt{\pi}})$, und dann betrachte ich die Strahlungswirkung dieses Cylinders gegen A hin.

Fig. 3.



In der Raumeinheit seien N Strahlungscentra, dann wird ein einzelnes Strahlungscentrum $\frac{\varphi(t)}{N}$, nach allen Richtungen ausstrahlen; eben dasselbe Theilchen aber wird direct gegen A einen Werth $\frac{1}{4R^2\pi}\frac{\varphi(t)}{N}$ hinsenden.[1] Ein schmaler Streifen unseres Cylinders von der Dicke $d\xi$ strahlt also $\frac{1}{4R^2\pi}\varphi(t)d\xi$ gegen A

[1] Denken wir uns nämlich um dieses Theilchen als Centrum eine schwarze Kugelhülle mit dem Radius R gelegt, so wird alle Strahlung absorbirt; es wird daher die Flächeneinheit in der Entfernung R obigen Betrag erhalten.

direct und ebenso viel mittelst Reflexion über BB'. Wenn nun aber α der wirkliche Absorptionscoëfficient unserer Substanz ist, so wird der erste Betrag, wenn $CO = \xi$ gesetzt wird, in Folge der Absorption auf

$$\frac{\varphi(t)}{4R^2\pi}(1-\alpha)^{\xi}d\xi,$$

der zweite aber auf

$$\frac{\varphi(t)}{4R^2\pi}(1-\alpha)^{x-\xi}d\xi$$

sinken. Dabei ist einstweilen die Reflexion an CC' noch nicht berücksichtigt. Unter dieser Beschränkung ist die Strahlung des ganzen Cylinders $CC'BB'$ gegen A hin

$$\frac{\varphi(t)}{4R^2\pi}\left[\int_{\xi=0}^{\xi=\frac{x}{2}}(1-\alpha)^{\xi}d\xi+\int_{\xi=\frac{x}{2}}^{\xi=0}(1-\alpha)^{x-\xi}d\xi\right]$$

Es ist weiter dieses Integral gleich

$$\frac{\varphi(t)}{4R^2\pi}\,\frac{(1-\alpha)^x-1}{l(1-\alpha)}=J$$

Diese Strahlung würde nach A gelangen, wenn bei CC' keine Reflexion statthaben würde. So aber findet da eine Spaltung in vier Theile statt.

Ein Theil $\mathfrak{r}J$ wird regelmässig, ein anderer Theil $\mathfrak{m}J$ wird unregelmässig reflectirt; wo diffuse Zerstreunng ist, muss auch ein Theil $\mathfrak{n}J$ diffus gebrochen werden. Es sind hier $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ analoge Coëfficienten wie r, m und n auf Seite 6. Zur mittleren Kugel gelangt also zunächst $J(1-\mathfrak{r}-\mathfrak{m}-\mathfrak{n})$.

Zugleich gelangt aber auch nach CC' von aussen her in schiefer Richtung (der Pfeil in obiger Zeichnung) eine Strahlenmenge, welche von Nachbarbezirken und gegenüberliegenden Theilen der Kugelhülle ausgestrahlt wird. Davon geht ein Theil mittelst diffuser Reflexion nach A, ein anderer Theil gelangt in entgegengesetzter Richtung durch diffuse Brechung in unser Medium. Der erstere Theil habe die absolute Grösse λ, der zweite die Grösse p.

Wenden wir uns nun zu jenen Strahlungen, welche beim Anlangen des Hauptstrahles an CC' diffus nach rückwärts reflectirt, und nach auswärts gebrochen werden. Von diesen beiden Mengen $\mathfrak{n}J$ und $\mathfrak{m}J$ gelangt [aus analogen Gründen wie vorher $\mu.F(t)$ und $\nu.F(t)$], fast gar Nichts zu A.

Hingegen empfängt aber CC' von rückwärts aus der Kugelschale in schiefer Richtung eine nicht unbeträchtliche Strahlenmenge, zu welcher auch die Strahlungscentra in $CBOR$ und $C'B'O'R'$ mitwirken. Diese Strahlen fallen unter allen möglichen spitzen Winkeln auf CC' auf. Davon gehe durch diffuse Reflexion die Wärmemenge q in normaler Richtung nach rückwärts, während in Folge diffuser Brechung k nach A gelangt.

Es tritt also in normaler Richtung

$$\underline{J(1-\mathfrak{r}-\mathfrak{m}-\mathfrak{n})+\lambda+k}^{1}$$

aus, während in entgegengesetzter Richtung $p+q+Jr$ zurückgeht. Diese Strahlung kommt nach idealer Reflexion bei RR' wieder nach CC', nachdem sie in Folge der Absorption auf $(p+q+Jr)(1-\mathfrak{a})^x$ gesunken ist.

$$\underline{(p+q+Jr)(1-a)^x(1-\mathfrak{r}-\mathfrak{m}-\mathfrak{n})}$$

tritt gegen A aus und $r(p+q+Jr)(1-\mathfrak{a})^x$ geht zurück. Bei dieser Reflexion wird wieder Wärme zerstreut. Eben diese Zerstreuung in den Nachbarcylindern macht auf CC' eine gewisse Strahlenmenge auffallen. Sie ist aber so gering, dass wir die in normaler Richtung noch einmal zerstreute Strahlung sicher vernachlässigen können. Beim Wiederanlangen am alten Platze haben wir $r(p+q+Jr)(1-\mathfrak{a})^{2x}$ und austreten wird

$$\underline{r(p+q+Jr)(1-\mathfrak{a})^{2x}(1-\mathfrak{m}-\mathfrak{r}-\mathfrak{n})}\ \text{u. s. w.}^{2}$$

Es wird also die Gesammtwirkung sein

$$J(1-\mathfrak{r}-\mathfrak{m}-\mathfrak{n})+\lambda+k+(p+q+Jr)(1-r-m-n)(1-a)^xS$$

[1] Sämmtliche Grössen, welche Wärmemengen anzeigen, die von A absorbirt werden, sind unterstrichen.

[2] Sämmtliche Strahlen, deren Emissionswinkel zwischen $+$ und $-\arcsin\frac{r}{R}$ liegt, werden in derselben Weise berücksichtigt.

wo $S = 1 + r(1-a)^x + r^2(1-a)^{2x} + r^3(1-a)^{3x} \ldots\ldots$

Wir haben daher als Ausdruck der Gesammtwirkung

$$\frac{\varphi(t)}{4\pi R^2}\,\frac{(1-a)^x-1}{l(1-a)}\,\frac{1-r-m-n}{1-r(1-a)^x} + (p+q)\,\frac{(1-a)^x(1-r-m-n)}{1-r(1-a)^x} + \lambda + k \qquad (6)$$

Selbstverständlich müsste man hier alle betreffenden Grössen eigentlich mit dem Indices λ, t versehen, um anzuzeigen, dass obige Beziehung nur für eine bestimmte Temperatur und Wellenlänge Giltigkeit hat. Das $\varphi(t)$ aus dieser Gleichung in experimenteller Weise genau zu bestimmen ist nicht möglich, weil K, λ, p und q in ihrer Abhängigkeit von der Dicke der strahlenden Schichte nicht unmittelbar bestimmbar sind. Doch lässt sich leicht eine andere Beziehung auffinden, welche eine einfache indirecte Bestimmung des $\varphi(t)$ erlaubt.

Eine neue Beziehung für das Kirchhoff'sche Gesetz. Es sei

$$\left.\begin{aligned} p\,\frac{4\pi R^2 l(1-a)}{\varphi(t)} &= \mathfrak{p} \\ q\,\frac{4\pi R^2 l(1-a)}{\varphi(t)} &= \mathfrak{q} \\ -k\,\frac{4\pi R^2 l(1-a)}{\varphi(t)} &= \mathfrak{k} \\ -\lambda\,\frac{4\pi R^2 l(1-a)}{\varphi(t)} &= \mathfrak{l} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Dann geht der Ausdruck (6) über in

$$\frac{1}{4\pi R^2}\,\frac{\varphi(t)}{[-l(1-a)]}\left\{\frac{1-r-m-n}{1-r(1-a)^x}\,[1-(1-a)^x(1-\mathfrak{p}-\mathfrak{q})] + \mathfrak{l} + \mathfrak{k}\right\} \qquad (8)$$

Ich werde nun mit dieser Grösse jenen Werth in Verbindung bringen, welchen wir in (2) für das scheinbare Absorptionsvermögen aufgestellt haben.

Damit Gleichgewicht bestehe, muss die Wärmemenge (8), welche CC' in der Richtung nach A verlässt, ebenso gross sein

als die in unserem Cylinder $CC'BB'$ absorbirte Strahlung. Der Durchmesser der Kugel A ist mit $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ festgesetzt worden, es ist daher die Gesammtausstrahlung der inneren Kugel[1] gleich $4\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2\pi F(t)$, welche Strahlung ganz auf die äussere Kugel auffälllt.

Die Flächeneinheit der äusseren Kugel empfängt also eine Strahlung

$$\frac{1}{4R^2\pi}\,4\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2\pi F(t) = \frac{F(t)}{R^2\pi}$$

Es wird also statt der Kirchhoff'schen Formel

$$\alpha_t F(t) = f(t)$$

zu setzen sein

$$\frac{F(t)}{R^2\pi}\left\{\frac{1-\varrho-\mu-\nu}{1-r(1-a)^x}\,[1-(1-a)^x(1-m-n)]+\mu+\nu\right\} =$$

$$\frac{\varphi(t)}{4R^2\pi}\,\frac{1}{[-\mathfrak{l}(1-\mathfrak{a})]}\left\{\frac{1-\mathfrak{r}-\mathfrak{m}-\mathfrak{n}}{1-\mathfrak{r}(1-\mathfrak{a})^{\varepsilon}}\,[1-(1-\mathfrak{a})^{\varepsilon}(1-\mathfrak{p}-\mathfrak{q})]+\mathfrak{l}+\mathfrak{k}\right\}$$

Wir können jetzt rechts und links Einiges streichen. Der wirkliche Absorptionscoëfficient ist in beiden Fällen derselbe also, $a = \mathfrak{a}$.

Die Trennungsebene wird ferner (bei gleicher Wellenlänge und Temperatur) stets dieselbe Menge regelmässig reflectiren $\mathfrak{r} = r$, ebenso dasselbe zerstreuen, $m = \mathfrak{m}$, und es wird schliesslich auch derselbe Bruchtheil unregelmässig aus dem Medium hinausgebrochen $n = \mathfrak{n}$.

Es bleibt daher

$$F(t)\{(1-\varrho-\mu-\nu)[1-(1-a)^x(1-m-n)]+\mu+\nu\}$$

$$= -\frac{\varphi(t)}{4l(1-a)}\{(1-r-m-n)[1-(1-a)^x(1-m-n)]+\mathfrak{l}+\mathfrak{k}\} \quad (9)$$

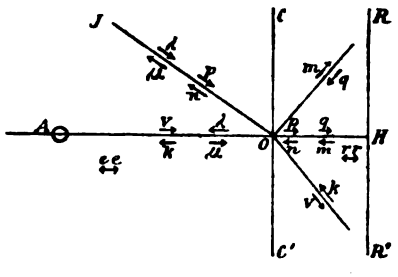
[1] Bei einem ideal schwarzen Körper ist ein Unterschied zwischen wirklichem und scheinbarem Ausstrahlungsvermögen undurchführbar, weil wir da einen idealen, in der Wirklichkeit nur angenähert vorkommenden Fall vor uns hätten.

Es hat die Ähnlichkeit dieser Ausdrücke ihren Grund in der Identität der untereinander stehenden Grössen.

Nebenstehende Figur soll den soeben durchgeführten Vorgang der Strahlung und Absorption übersichtlich machen.

Es sei CC' die Oberfläche des Mediums. A sei wieder die schwarze Kugel in der Mitte. Jeder Strahl ist, bevor er zu O gelangt und nachdem er O verlassen, immer mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet, welcher uns im Laufe obiger Betrachtungen zur Bezeichnung des betreffenden Strahlungsvorganges gedient hatte.

Fig. 4.



Z. B. $\overrightarrow{\nu}$ vor dem O, und $\overrightarrow{\nu}$ rechts unten von O versinnlicht uns dass ν für jene Strahlung gilt, welche normal auffallend schief ins Medium hinein diffundirt wird. Hingegen zeigt $\overrightarrow{\mu}$ vor O und $\overleftarrow{\mu}$ links oben von O an, dass μ der Coefficient für die diffuse Reflexion war, wobei die Richtung OJ natürlich nur als Repräsentant für alle möglichen Richtungen links von CC' gelten darf u. s. w.

Nun ist aber folgender Satz zu berücksichtigen:

„Ein Lichtstrahl gelange von dem Punkte A nach beliebig vielen Brechungen, Reflexionen u. s. w. nach dem Punkte B. In A lege man durch seine Richtung zwei beliebige, auf einander senkrechte Ebenen a_1 und a_2, nach welchen seine Schwingungen zerlegt gedacht werden. Zwei eben solche Ebenen b_1 und b_2 werden durch den Strahl in B gelegt. Alsdann lässt sich beweisen: Wenn die Quantität J nach der Ebene a_1 polarisirten Lichtes von A in der Richtung des besprochenen Strahls ausgeht, und davon die Quantität K nach der Ebene b_1 polarisirten Lichtes in B ankommt, so wird rückwärts, wenn die Quantität J nach b_1 polarisirten Lichts von B ausgeht, dieselbe Quantität nach a_1 polarisirten Lichts in A ankommen.“ [1]

[1] Helmholtz, Physiologische Optik, 169.

Durch successive Anwendung dieses Principes vereinfachen sich unsere Gleichungen ungemein.

In der Richtung *HO*, die ich mir sehr tief denke,[1] kommt nach Gleichung (6) für $x = \infty$

$$\cdot J = \frac{\varphi(t)}{-4R^2\pi l(1-a)} \tag{10}$$

Die diffus in *O* zerstreute Strahlung ist mJ; es muss daher das Medium ebenso viel schiefe Strahlen nach *O* senden, dass dieser Theil in entgegengesetzter Richtung wieder ersetzt wird, da ja nach dem Helmholtz'schen Satze die einzelnen Summanden gleich sein müssen. Diese letztere Strahlung (siehe Zeichnung) nannten wir q. Es muss also $q = m \cdot J$ oder nach Gleichungen (7) und (10) $m = \mathfrak{q}$ sein.

Von *HO* gelangt ferner durch diffuse Brechung nJ nach aussen. Auf dem umgekehrten Wege (siehe Zeichnung) gelangt die Menge p nach *OH*. Es ist also $\mathfrak{n} \cdot J = p$ oder nach (7) und (10) $n = \mathfrak{p}$.

Ferner folgt aus unserer Zeichnung und aus dem Helmholtz'schen Principe unmittelbar, dass

$$\mu \cdot F(t) = \lambda$$

und

$$\nu \cdot F(t) = k$$

sein muss, so dass von der Gleichung (9) nur mehr über bleibt

$$F(t)(1-\rho-\mu-\nu) = -\frac{\varphi(t)}{4l(1-a)}(1-r-m-n).$$

Wenn in senkrechter Richtung von aussen die Strahlungseinheit eintritt, sinkt sie im Medium auf $(1-\rho-\mu-\nu)$; wenn aber in der umgekehrten Richtung *HO* die Strahlungseinheit auf *CC'* auffällt, sinkt sie auf $(1-r-m-n)$. Es muss daher

$$1-\rho-\mu-\nu = 1-r-m-n$$

sein, so dass schliesslich nur mehr die Beziehung überbleibt

$$-4l(1-a) = \frac{\varphi(t)}{F(t)} \tag{11}$$

[1] Es wäre bei Russ etwa 0·07 Mm. und bei NaCl etwa 3·4 Mm. — Villari, Wied. Beibl. III. Deventer, Wied. Beibl. IV.

Diese Gleichung gilt für eine bestimmte Wellenlänge und gibt mir den Zusammenhang zwischen dem wirklichen Absorptionscoefficienten a und dem wirklichen Ausstrahlungsvermögen $\varphi(t)$.

Wenn ich Gleichung (10) und (11) verbinde, so heisst das: jeder Körper würde, sobald er in der betreffenden Richtung hinlänglich dick ist, genau so wie ein schwarzer Körper strahlen, wenn es keine Reflexion der Strahlung beim Heraustritte aus dem Medium geben würde. Wenn wir also bei hinlänglicher Dicke, und das strebten die meisten Experimentatoren an, das scheinbare Ausstrahlungsvermögen eines Körpers messen, haben wir nur das Reflexionsvermögen gemessen.

Nach Gleichung (4) misst man aber bei hinlänglicher Dicke statt des Absorptionsvermögens ebenfalls das Reflexionsvermögen. Die allermeisten experimentellen Nachweise des Kirchhoff'schen Gesetzes, sind ungenügend; sie zeigen nur, dass das Reflexionsvermögen innerhalb der beobachteten Temperaturintervalle constant blieb.

Discussion der erhaltenen Gleichung. Wenn ich also die einzelnen Wirkungen der einzelnen Strahlungscentra per Raumeinheit summiren könnte, so wäre das für eine bestimmte Wellenlänge und Temperatur die Zahl $\varphi(t)$. Die Einheit der Länge absorbirt von der Einheit der auffallenden Strahlung eben derselben Wellenlänge den Theil a.

Dann gilt die Reihe

$$a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \cdots\cdots = \frac{\varphi(t)}{4F(t)} ,$$

wobei $F(t)$ die Strahlung eines schwarzen Körpers bei derselben Temperatur bedeutet.

Diese Gleichung für das wirkliche Absorptionsvermögen weicht von der von Kirchhoff für das scheinbare Absorptionsvermögen aufgestellten bedeutend ab.

Nun hat man für die Kirchhoff'sche Function in der Natur der Ätherschwingungen mechanische Gründe finden wollen. Diese Anschauung kann beibehalten werden. Der Grund der periodischen Ätherbewegung, als welche wir einen Wärmestrahl

aufzufassen genöthigt sind, ist wahrscheinlich eine harmonische Massenbewegung im strahlenden Körper.

Man spricht gewöhnlich von schwingenden Molekülen. Dieser Anschauungsweise vermag ich mich nicht anzuschliessen. Hg-Dampf besteht aus Atomen, welche in unregelmässigen Bahnen hin und her sausen; trotzdem aber haben wir in diesem Falle ein aus vielen Linien bestehendes, sehr complicirtes Spectrum. Es ist also vielmehr wahrscheinlicher, dass die Strahlungscentra innerhalb des Atomes liegen, dessen Untheilbarkeit ja doch nur, eine vorläufige Grenze, den Mängeln der uns zu Gebote stehenden Methoden zuzuschreiben ist.[1]

Nehmen wir nun als Raumeinheit einen Würfel, in welchem ein einziges Strahlungscentrum sich befindet. Es absorbirt dann ein einziges solches Theilchen, dessen Durchmesser dann die Längeneinheit, den Theil a' der auffallenden Strahlung. Dieses a' ist sicher so klein, dass es gegen Eins zu vernachlässigen ist. Es wird also, sowie es sich um Strahlung von einem sehr kleinen Strahlungscentrum handelt, die Absorption für diese Theilchen nach wie vor durch die einfache Kirchhoff'sche Beziehung ausgedrückt. Das muss auch sein, sonst würde ein Strahlungscentrum in der Mitte eines Körpers von selbst immer wärmer oder kälter werden.

Der Widerspruch meiner Formel ist also nur ein scheinbarer, bedingt durch Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Beziehungen, die nicht infinitèsimal gedacht werden können.

Hingegen wird aber die Kirchhoff'sche Function keinen Aufschluss geben über die wirktiche Absorption und die wirkliche Strahlung. Ich habe auf Seite 10 gezeigt, wie man a finden kann; $\varphi(t)$ ist dann daraus leicht zu berechnen, sobald ich die absolute Strahlung eines schwarzen Körpers für dieselbe Temperatur und dieselbe Wellenlänge kenne. a und $\varphi(t)$ sind Zahlen, die gewiss Aufschlüsse geben werden über molekülare Vorgänge des Körpers. Kirchhoff stellte sein Gesetz vor mehr als 20 Jahren auf, es lieferte eine in vielen Fällen unersetzbare Methode der chemischen Analyse; trotz unzähliger Versuche aber über Absorption und Strahlung sind wirkliche Beiträge zur „Molekularphysik“ wohl nur in sehr geringer Anzahl geliefert worden,

[1] Vergleiche Lokyer, Nature XIX.

die Function selbst ist uns immer noch unbekannt. Sie scheint also nicht so einfach zu sein, wie der berühmte Entdecker der Spectralanalyse vermuthete, so dass es mir erlaubt schien, in der soeben durchgeführten Weise die Zerlegung dieser Function in ihre physikalischen Summanden anzudeuten.

II. Absorption und Ausstrahlung bei verschiedener Temperatur.

Folgerungen aus Kirchhoff's Gesetz. Die Gleichung (1)

$$\alpha_t = \frac{f(t)}{F(t)}$$

gilt sowohl für die Gesammtstrahlung als auch für die einzelnen Wellenlängen. Daraus folgt unmittelbar

$$\alpha_t : \alpha_{t'} = \frac{f(t)}{f(t')} : \frac{F(t)}{F(t')} \tag{12}$$

Es verhalten sich also die Absorptionsvermögen einer beliebigen Schichte eines beliebigen Körpers bei zwei verschiedenen Temperaturen, sowohl gegenüber der Gesammtstrahlung als auch gegenüber den einzelnen Wellenlängen, genau ebenso, wie der Ausstrahlungsanstieg der untersuchten Schichte zum Ausstrahlungsanstieg eines total schwarzen Körpers. Die Änderung des Absorptionsvermögens mit der Temperatur wird also um so geringer sein, je ähnlicher der Zusammenhang zwischen Strahlung und Temperatur für den betrachteten und für einen schwarzen Körper ist.

Ausser dieser Änderung des Absorptionsvermögens mit der Temperaturänderung beider Flächen lässt sich noch eine zweite Änderung ins Auge fassen, welche von der Temperaturänderung der strahlenden schwarzen Fläche allein herrührt.

Unabhängigkeit des scheinbaren Absorptionsvermögens von der Temperatur des strahlenden Körpers. Bei jeder wie immer gearteten Betrachtungsweise auf vorliegendem Gebiete muss als erste Grundannahme das Gesetz aufgestellt werden, dass die wirkliche Absorption a unabhängig ist von der Grösse der Amplitude der einfallenden Strahlung; man könnte ja im entgegengesetzten Falle nie berechnen, was eine

x-mal so dicke Schichte absorbirt, wenn die Absorption der Längeneinheit gegeben ist, weil beim Eindringen der Strahlung in den Körper die Amplituden immer kleiner werden. In ganz derselben Weise ist auch das reflectirte Licht immer derselbe Bruchtheil des einfallenden, wie gross auch des letzteren Intensität sein mag. Diese Ansicht findet sich bekanntlich in den theoretischen Arbeiten von Fresnel, Cauchy u.s.w. und ist auch noch nie eine gegentheilige experimentelle Erfahrung gemacht worden. Wenn also ρ in unserer Formel für verschieden starke Zustrahlung gleich bleibt, dann muss aus denselben Gründen die diffuse Zerstreuung von der Intensität der einfallenden Wellenbewegung unabhängig bleiben, da ja die Ursache dieser Zerstreuung in der Unebenheit der Trennungsfläche zu suchen ist und so der eigentliche Ursprung derselben gleichfalls eine regelmässige Reflexion bildet. Nachdem so ρ und μ von der Intensität der einfallenden Strahlung unabhängig sind, muss das auch beim zerstreut gebrochenen Lichte, bei ν der Fall sein.

Es ist daher auch die aus allen diesen Theilen zusammengesetzte scheinbare Absorption unabhängig von der Intensität der auffallenden Strahlung. Man sieht also, dass die Temperatur des strahlenden, schwarzen Körpers für den Absorptionscoëfficienten ohne Einfluss ist. Wie verhält es sich aber mit der Temperatur der empfangenden Fläche? Was wird absorbirt, wenn ich die Temperatur der empfangenden Fläche immer mehr und mehr erhitze?

Abhängigkeit des scheinbaren Absorptionsvermögens von der Temperatur der empfangenden Fläche. Hier ist zunächst sehr zu betonen, dass die Änderungen des Reflexionsvermögens und die eventuelle Änderung des wirklichen Absorptionsvermögens immer scharf getrennt werden müssen.

ρ ist sicher mit der Temperatur veränderlich, doch werden diese Änderungen, so lange nicht ein anderer Aggregatzustand des Körpers eintritt, nicht sehr bedeutend sein. Das Reflexionsvermögen wird als Function des Brechungsexponenten angesehen, und da letzterer, besonders bei festen Körpern, sich sehr wenig mit der Temperatur ändert, wird auch ρ sich ziemlich gleich bleiben.

Ich denke mir nun einen Körper, wo das der Fall ist oder einen solchen, wo ρ so klein ist, dass dessen Änderung auf α keinen Einfluss hat. Dann wird α nur beeinflusst werden durch Änderungen von a. Über die Abhängigkeit dieses wirklichen Absorptionsvermögens a von der Temperatur des betreffenden Körpers lässt sich im Vornhinein wohl kaum etwas Bestimmteres sagen. a kann veränderlich sein, a kann constant sein. Aber die Phänomene sind anzugeben, die, je nachdem die eine oder die andere Hypothese richtig wäre, beobachtet werden müssten.

Wenn a mit steigender Temperatur grösser oder kleiner wird, so kommt die Strahlung bei höheren Temperaturen aus geringer oder grösserer Tiefe, die Anzahl der wirksamen Strahlungscentra wird dann vermindert oder vermehrt. Diese Complication der Erscheinung ist viel grösser als sie auf den ersten Blick erscheint. Für diesen Fall gäbe es eine Arbeit von solchem Umfange, dass ein Ziel einstweilen noch nicht abzusehen.

Man findet gewöhnlich angegeben, dass α_t mit steigender Temperatur steigt;[1] ja man hat sogar höchst merkwürdige Schlüsse in dieser Richtung gezogen. Denken wir an die Gleichung $f(t) = \alpha_t F(t)$.

„Da nun mit steigender Temperatur die Werthe von $f(t)$ nach den bisherigen Beobachtungen als wachsend gefunden wurden, so werden auch die Werthe von α_t bei höherer Temperatur im Allgemeinen grösser als bei niedriger Temperatur vorausgesetzt werden müssen."[2] Der Werth einer derartigen Schlussfolgerung richtet sich selbst: ist doch auch $F(t)$ variabel mit der Temperatur.

Über die Constanz des wirklichen Absorptionsvermögens. Wenn ich dagegen a als constant ansehe, dann werden die meisten verwickelten und einander oft widersprechenden Angaben aus vorliegendem Gebiete klar und einfach. Die von mir umgestaltete Form der Kirchhoff'schen Beziehungen wird ungemein übersichtlich. Kirchhoff selbst hofft, dass seine Function „unzweifelhaft von höchst einfacher Form ist, wie alle

[1] Wüllner, II. 255.

[2] Zöllner, Pogg. Ann. 142, p. 105. Ich habe nur andere Buchstaben eingeführt.

Functionen es sind, die nicht von den Eigenschaften der einzelnen Körper abhängen, und die man bisher kennen gelernt hat.“ [1]

Wenn man aus der Constanz von a Consequenzen zieht, so kommt man dabei auf Dinge, die mir überaus wichtig schienen und die gewiss sehr einfach sind. Dass ich mich zunächst einer nur schwer beweisbaren Hypothese, dessen bin ich mir stets bewusst, in die Arme geworfen habe, hat seinen Grund in ähnlichen Empfindungen, wie sie Helmholtz in der Einleitung seiner physiologischen Optik schildert:

„Es musste am Ende der Versuch gemacht werden, Ordnung und Zusammenhang in dieses Gebiet hineinzubringen und es von den auffälligen Widersprüchen zu befreien, die sich bis jetzt durch dasselbe hinzogen. Ich habe dies gethan in der Überzeugung, dass Ordnung und Zusammenhang, selbst wenn sie auf ein unhaltbares Princip gegründet sein sollten, besser sind, als Widersprüche und Zusammenhangslosigkeit.“ Dieses vielleicht unhaltbare Princip, welches ich betrachten will, ist die Constanz des wirklichen, Absorptionsvermögens, welcher Gedanke jedoch in seinen Consequenzen immer einleuchtender werden wird.

Die Ausstrahlung neuer Wellenlängen bei höheren Temperaturen. Mit Gleichung (10) vereinigt, gibt unser neuer Grundsatz

$$-4l(1-a) = \frac{\varphi(t)}{F(t)} = \frac{\varphi(t')}{F(t')} \qquad (13)$$

Das wirkliche Ausstrahlungsvermögen ist immer der gleiche Bruchtheil des Ausstrahlungsvermögens eines schwarzen Körpers. Dies gilt zunächst für eine bestimmte Wellenlänge.

Nun absorbirt Russ selbst bei gewöhnlicher Zimmertemperatur die äussersten violetten Strahlen,[2] er muss daher auch bei eben dieser Temperatur nach dem Kirchhoff'schen Gesetze Strahlen aussenden. Wenn irgend ein Körper in der Glüh-

---

[1] Pogg. Ann. 109 p. 292.

[2] Jacques, Proc. of Amer. Acad. XIV. Es gilt dies nicht nur von Russ, es gibt sehr viele Körper, die bei gewöhnlicher Temperatur vorzugsweise die violetten Strahlen absorbiren (Soret, Wied. Beibl. III) also müssen sie bei derselben Temperatur violette Strahlen aussenden.

hitze (T) violette Strahlen aussendet, so muss für diese Wellenlänge

$$\frac{\varphi(T)}{F(T)} = \frac{\varphi(t)}{F(t)}$$

sein. Da nun $F(t) > 0$ ist, so muss auch $\varphi(t) > 0$ sein. Soweit die durch Änderung des Reflexionsvermögens ρ herbeigeführten Variationen klein sind, ist dann aber auch $f(t)$ grösser als Null. Das heisst: Jeder Körper sendet bei der tiefsten Temperatur schon alle Strahlen aus, die er bei der höchsten Temperatur aussendet, so lange der Körper derselbe, d. h. chemisch identisch bleibt. Eventuelle (gewöhnlich sehr kleine) Abweichungen rühren her von einer Veränderung des Reflexionsvermögens, nicht aber von einer molecularen Änderung der Schwingungsformen.

Relative spectrale Vertheilung der ausgestrahlten Energie. Denken wir uns nun nach der gewöhnlichen Vorstellungsweise zwei Curven, welche für eine bestimmte Temperatur die Vertheilung der Wärmeintensität im Spectrum angeben. Die Abscissen stellen die Wellenlängen, die Ordinaten die ausgestrahlten Wärmemengen dar. Die eine Curve A repräsentire die Strahlung eines schwarzen, die andere, B, die Strahlung eines beliebigen anderen Körpers bei derselben Temperatur. Wir haben dann in Gleichung (13) gezeigt, dass der Quotient der zur gleichen Abscisse gehörigen Ordinaten A und B für alle Temperaturen identisch sein muss. Wenn daher mit steigender Temperatur das Maximum der Curve A in der Richtung gegen Violett sich verschiebt, so muss auch dasselbe bei B der Fall sein. Gibt es daher irgendwelche Körper B, deren Maxima für verschiedene Temperaturen am gleichen Platze bleiben, so muss auch die Curve A in ihrer relativen Zusammensetzung dieselbe geblieben sein.

Um ein Beispiel aus vielen anzuführen: Jod liefert für 40° C. eine Curve, deren Maxima an dieselben Wellenlängen fallen, wie bei 3259° C.[1] Wenn ich also Jod erhitze, dessen Curve bekanntlich sehr viele Maxima besitzt, so bleiben diese stets an derselben Stelle, die Ordinaten wachsen proportional, denn nur so kann der

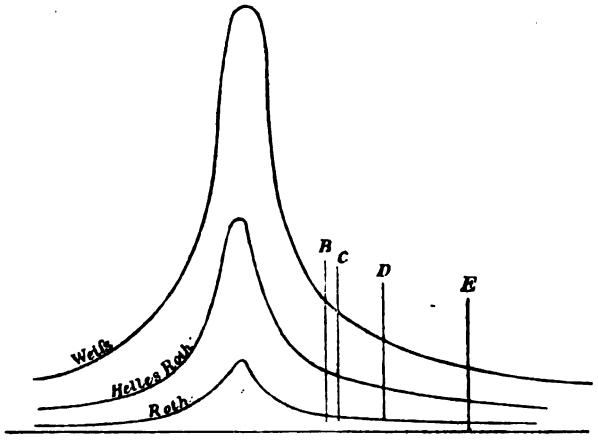
[1] Wüllner, Pogg. Ann. 120.

Gesammteindruck stets derselbe sein. Dann verlangt aber Gleichung (13), dass die Curve *A* in derselben Weise in die Höhe steigt, dass auch für die Strahlung eines schwarzen Körpers die Ordinaten für alle Wellenlängen proportional wachsen. Die spectrale Vertheilung der ausgestrahlten Energie ist relativ für alle Temperaturen dieselbe, sofern nicht die Änderung des Reflexionsvermögens störend einwirkt.

Ebenso wie Jod lassen sich noch unzählige Körper auffinden. Die spectrale Vertheilung sei für alle in der angegebenen Manier, auf dasselbe Coordinatensystem bezogen, gezeichnet. Es würde das aussehen, wie ein Hochgebirgspanorama mit unzähligen Spitzen und Thälern. Die Curve der schwarzen Strahlung spannt sich gleich einem Firmamente darüber. Wenn nun in der altgeglaubten Weise das Maximum dieses Alles überwölbenden Curve sich langsam in der Richtung gegen Violett verschieben würde, müssten alle anderen Spitze ohne Ausnahme derselben Tendenz huldigen, es müssten die näher dem Violett liegenden auf Kosten der anderen wachsen.[1] Dass letzteres aber nicht der Fall, ist gewiss.

Ich glaube daher, dass, so lange keine chemische Änderung vorgeht, jedes Spectrum in Bezug auf die

Fig. 5.



[1] Eine unmittelbare Folge dieser Anschauung scheint mir zu sein, dass dann alle Körper bei genügend hoher Temperatur violett erscheinen müssten.

relative Vertheilung der ausgestrahlten Intensitäten ganz unabhängig ist von der Temperatur. Eventuelle Ausnahmen rühren daher, dass die ausgestrahlte Wärme beim Austritte aus dem Medium in verschiedenem Grade ins Innere zurückreflectirt wird.

Einen wirklichen Beweis kann hier nur das Experiment geben. Die einzigen directen Messungen dieser Art rühren her von Jacques.[1] Ich halte die Art seiner Temperaturbestimmung (Widerstand des glühenden, ausstrahlenden Drahtes) für unrichtig; die Curven in nebenstehender Zeichnung habe ich daher ohne Temperaturangabe gegeben. Es sind die Intensitäten für verschiedene Wellenlängen, gemessen im prismatischen Spectrum durch eine Thermosäule mit schmaler Öffnung, wenn als ausstrahlender Körper Kupferoxyd, auf einem glühenden Platindrahte aufgetragen, verwendet wurde.

Es sind aber die angewandten Temperaturintervalle sehr geringe, ich habe obige Zeichnung nur zum Theil mit Rücksicht auf ihre Beweiskraft gegeben, ich habe das mehr wegen der Anschaulichkeit in der von mir vertretenen Hypothese gethan.

Gesammtstrahlung. Wenn aber jede einzelne Ordinate bei einer höheren Temperatur n-mal so gross wird, als sie es bei einer tieferen war, dann müssen Vielfache von ein und derselben Function die Strahlungsabhängigkeit für alle Körper sowohl in Bezug auf die einzelnen Wellenlängen als auch in Bezug auf die Gesammtstrahlung ausdrücken.

Nehmen wir z. B. an, dass diese Function durch die vierte Potenz der absoluten Temperatur gegeben sei, so sind die wirklichen Ausstrahlungsvermögen

$$\varphi_{\lambda_1} = \beta_1 T^4$$
$$\varphi_{\lambda_2} = \beta_2 T^4$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Durch Addition erhalten wir

$$\Sigma\varphi_\lambda = T^4 \Sigma\beta$$

[1] Proc. of Amer. Acad. XIV., Wied. Bei III.

d. h. auch die Gesammtstrahlung muss dann der vierten Potenz proportional sein. Das gilt auch für das scheinbare Ausstrahlungsvermögen, so lange nicht bei verschiedenen Temperaturen die Strahlung von der Oberfläche des Körpers in verschiedener Weise ins Innere zurückreflectirt wird. Es wird dies also besonders bei wenig spiegelnden Flächen der Fall sein.

Bevor ich jedoch weitere Consequenzen ziehe, will ich auf die hauptsächlichsten der Einwürfe eingehen, welche man, soweit ich die Unzahl der einschlägigen Thatsachen überblicken kann, gegen die von mir durchgeführten Ideen erheben wird.

III. Einige experimentelle Erläuterungen zu vorstehendem Capitel.

Gleichzeitig mit der Widerlegung eventueller Einwürfe will ich im Folgenden mehrere neue experimentelle Daten besprechen. Obschon diese für die Richtigkeit meiner Hypothese nicht endgiltig beweisend sind, werden sie doch sicherlich ungemein die bisherige Auffassung der einschlägigen Erscheinungen modificiren.

Ich will die Experimente in thermometrische und photometrische eintheilen.

a) Thermometrische Versuche.

Die meisten Arbeiten auf vorliegendem Gebiete nehmen stillschweigend die Constanz des scheinbaren Absorptionsvermögens an. Trotzdem aber wurden, soweit mir die Literatur bekannt, niemals die folgeschweren und überaus wichtigen physikalischen Consequenzen daraus gezogen. Ebenso wenig ist mir bekannt, dass Jemand die Zulässigkeit obiger Gleichung bewiesen, deren fundamentale Bedeutung als Ausgangspunkt jeder Bestimmung der Kirchhoff'schen Function im Verlaufe dieser Untersuchung gewiss schon klar zu Tage getreten ist.

Ich will zunächst eines Versuches von Ritchie[1] erwähnen, welcher zeigte, dass die Strahlungswirkung (absorbirte Wärme

[1] Pog. Ann. 28.

weniger der ausgestrahlten) von Russ gegen irgend einen Körper ebenso gross ist, als die Strahlungswirkung dieses Körpers gegen Russ.

Strahlung zweier nicht sich einschliessender Flächen. Ritchie's Versuch. Jede unserer gewöhnlichen Messungen ist combinirt aus der Strahlung zweier Flächen. Die Grösse der empfangenden schwarzen Fläche am thermometrischen Instrumente sei c, die Grösse der gegenüberstehenden schwarzen Fläche sei b, so haben wir zunächst bei Temperaturgleichheit der beiden Flächen mit der im Übrigen beliebigen Umgebung keine Wärmeänderung

$$xbF(t) - cF(t) + C = 0$$

$cF(t)$ ist nämlich die von der thermometrischen Fläche ausgestrahlte Wärmemenge, $x\,bF(t)$ ist der von der eigentlich strahlenden Fläche wirksame Theil, während C die wegen der Strahlung der Umgebung nöthige Correction bedeutet. Obige Gleichung aufgelöst, gibt

$$C = cF(t) - xbF(t).$$

Diese Correctur, die Strahlung der Umgebung, bleibt gleich, auch wenn ich die ausstrahlende Fläche b auf die Temperatur t' erhitze, so dass die dann gemessene Wärmeänderung am Thermometer wird

$$D = xbF(t') - aF(t) + [aF(t) - xbF(t)]$$
$$D = xb[F(t') - F(t)] \qquad (14)$$

Man kann nun die heisse oder die kalte schwarze Fläche durch einen andern Körper ersetzen, dessen scheinbares Ausstrahlungsvermögen $f(t)$ und dessen scheinbares Absorptionsvermögen α_t ist. Im ersteren Falle findet man ganz leicht

$$D_1 = xbf(t') - aF(t) + [aF(t) - xbf(t)]$$
$$D_1 = xb[f(t') - f(t) \qquad (15)$$

Im zweiten Falle hingegen

$$D_2 = x.b\alpha_t F(t') - \alpha f(t) + [\alpha f(t) - xb\alpha_t F(t)]$$
$$D_2 = \alpha_t xb[F(t') - F(t)] \qquad (16)$$

Nun sollen nach Ritchie D_1 und D_2 gleich sein, es ist also

$$\alpha_t F(t') - \alpha_t F(t) = f(t') - f(t).$$

Nach Gleichung (1) ist aber

$$\alpha_t F(t) = f(t),$$

es bleibt daher

$$\alpha_t = \frac{f(t')}{F(t')} = \alpha_{t'}$$

d. h. das scheinbare Absorptionsvermögen ist innerhalb der untersuchten Temperaturintervalle unabhängig von der Temperatur.

Der bekannte Versuch Ritchie's mit seinem Differentialthermometer spricht also direct für meine Hypothese; er arbeitete aber nur zwischen 0° und 100° Cels.

Ebenso liegt die Voraussetzung der Constanz von α_t innerhalb niedrigen Temperaturgrenzen fast allen Arbeiten auf dem Gebiete der Wärmestrahlen zu Grunde. Ich glaube dies nicht ausdrücklich zeigen zu müssen: konnte man doch nie das Kirchhoff'sche Gesetz beweisen, ohne Annahme dieser Hypothese; man musste sich darüber hinwegsetzen, dass die strahlende Fläche eine andere Temperatur hatte als die absorbirende.

Versuch von de la Prevostaye und Desains.[1] Diese beiden Experimentatoren wandten bedeutend höhere Temperaturintervalle an und gelangten zu einem dem früheren entgegengesetzten Resultate. Ein Platinblech, das auf einer Seite geschwärzt und auf der anderen Seite mit borsaurem Bleioxyd bedeckt war, strahlte gegen zwei Thermosäulen, deren Ströme gleich waren, wenn das Platinblech mittelst eines galvanischen Stromes auf 100° Cels. erhitzt wurde. Natürlich waren dann die Abstände der thermometrischen und strahlenden Flächen zweckentsprechend gewählt. Wir erhalten für diesen Fall durch Vereinigung der Gleichungen (14) und (15)

$$xb[F(t') - F(t)] = x'b'[f(t') - f(t)].$$

---

[1] C. R. XXXVIII.

Es zeigt sich dann, dass bei etwa 550° Cels. diese beiden Strahlungswirkungen nicht mehr gleich waren. Es wurde die Wirkung des borsauren Bleioxydes im Verhältniss von 75 zu 100 kleiner. Während also bei der vorhergehenden Gleichung, welche für $t' = 100°$ C. gilt, das

$$\alpha_{t'} = \alpha_t = \frac{xb}{x'b'}$$

sich berechnet, ist unter gleichen Voraussetzungen bei $t' = 550°$ C. das

$$\alpha_{t'} = \alpha_t = \frac{700}{75} \frac{xb}{x'b'};$$

wir bekämen also ganz von einander abweichende Werthe. Diese Abweichung wäre viel zu bedeutend, als dass dieselbe durch eventuelle Änderungen des Reflexionsvermögens erklärt werden könnte. — Es lässt sich aber leicht zeigen, dass obige Resultate nicht richtig sind.

Ich machte den Versuch nach. — Das borsaure Bleioxyd bereitete ich durch Fällen von salpetersaurem Bleioxyd in kalter Lösung mit Borax und trug dasselbe mit Wasser am Platin auf. — Das Resultat des Versuches war dasselbe, wie das der französischen Experimentatoren und wurde, als ich eine Temperatur von etwa 1000° C. erreichte, so, dass das borsaure Bleioxyd bei einer weiteren Temperatursteigerung kaum einen Strahlungszuwachs verrieth. Als ich nun meine Aufmerksamkeit vom Galvanometerfernrohr auf die strahlende Fläche lenkte, bemerkte ich intensiv braune Dämpfe von Untersalpetersäure, welche sich über dem borsauren Bleioxyd bildeten, und die natürlich den grössten Theil der Strahlung aufhielten. Selbst nachdem ich einen Tag lang über das borsaure Bleioxyd langsam Wasser laufen liess, um die Reste von den salpetersauren, leicht löslichen Salzen zu entfernen, zeigte sich die beobachtete Erscheinung, wenn auch in geringerem Masse. Auch dies sehr sorgfältig gereinigte borsaure Bleioxyd bekam immer beim starken Erhitzen einen schwachen gelblichen Anflug. Wenn derselbe auch von dem nicht speciell darauf Achtenden leicht übersehen werden kann, zumal er die Aufmerksamkeit auf andere zu beobachtende Dinge gelenkt hat, so ist dieser Anflug doch beträchtlich genug, eine Absorption der Strahlung

hervorzurufen. Mir wenigstens war es zwar möglich, obigen Bruch $\frac{100}{75}$ bedeutend der Einheit zu nähern, brauchbare Resultate jedoch konnte ich nicht erhalten.

Es wird daher ein anderes Verfahren, wonach gegen eine immer gleich temperirte beliebige Fläche eine verschieden erhitzte schwarze Fläche strahlt, vorzuziehen sein. Ist die relative spectrale Vertheilung der ausgestrahlten Energie immer dieselbe, so muss auch jeder Körper stets dieselbe Menge dieser Strahlung absorbiren, wenn auch sein Absorptionsvermögen gegenüber den verschiedenen Wellenlängen ein sehr verschiedenes ist.

Man liess zwar schon sehr oft verschieden temperirte Flächen gegen ein und dieselbe Substanz strahlen, um die Absorptionen zu finden; man nahm aber das eine Mal einen Leslie'schen Würfel, dann ein Kupferblech von 400° C., eine Locatelli'sche Lampe u. s. w.[1] Ein und dieselbe Fläche aber bei verschiedenen Temperaturen einem stets gleich temperirten Körper entgegenzustellen, hat Melloni und in einigen Fällen auch Tyndall versucht.

Versuche von Melloni.[2] Melloni liess zwei gleiche schwarze Flächen, davon die eine die Temperatur 100° C., die andere jedoch die Temperatur 400° C. hatte, durch 20 verschiedene Körper und durch Combinationen derselben zu je zwei hindurchstrahlen. Es wurden dann aber nicht immer dieselben Wärmemengen absorbirt, je nachdem man die mehr oder minder heisse Wärmequelle anwandte. Da beide Flächen geschwärzt waren, scheint es, als ob hier, wo eine Reflexion nicht denkbar, ein Widerspruch gegen die vorgebrachten Behauptungen vorläge. Wenn nämlich die relative spectrale Vertheilung der ausgestrahlten Energie stets dieselbe bliebe, müssten in beiden Fällen dieselben Wärmemengen absorbirt werden, welche Substanzen man auch als absorbirende verwenden würde.

Ein genaues Eingehen in die Versuchsanordnung zeigte mir aber, dass diese Versuche Melloni's nicht gegen mich beweisend sind.

---

[1] Melloni: La Thermochrôse. I. Naples 1850, p. 164 u. f.

[2] A. a. O., p. 307 u. f.

Die eine Strahlungsfläche war ein Metallwürfel mit siedendem Wasser gefüllt, die zweite Wärmequelle bestand aus einer verticalen Metallplatte, in ihrer oberen Partie gebogen, und an der Hinterfläche mit einer Alkoholflamme erhitzt. Beide Flächen wurden mittelst der Flamme einer Kerze geschwärzt.[1]

Ich will nun nicht davon sprechen, dass es sehr schwer ist, zwei Flächen in gleicher Dicke mit Russ zu überziehen; ganz unmöglich aber ist es nach meinen Erfahrungen, eine mit flockigem Russ überzogene Metallfläche auf 400° C. zu bringen, ohne dass der Russüberzug ganz destruirt würde. Man erhitze beispielsweise nur um 100 Grad höher, bis zur beginnenden Rothgluth, so bemerkt man mit blossem Auge das Schwinden der oberflächlichen Schwärze, es sieht sich an, als ob der Russ verdampfen würde. Dass eine solche Änderung schon bei 400° C. eintritt, zeigte ich folgendermassen. Die beiden aus gleichem Metall, Kupfer, bestehenden Flächen wurden gleichmässig geschwärzt, hierauf mittelst eines angelötheten Eisendrathes mit einander verbunden, während ich noch überdies jede Fläche mittelst eines angelötheten Kupferdrahtes mit je einem Ende eines Galvanometers verband. Es war also ein Thermoelement hergestellt, welches stromlos war, so lange beide strahlenden Flächen gleiche Temperatur hatten. Während die eine Fläche (als Seite eines Leslie'schen Würfels) mittelst siedendem Wasser constant auf 100° C. erhalten wurde, erhitzte ich die zweite Fläche sehr allmälig mittelst eines Bunsenbrenners. Als diese zweite Fläche gleichfalls auf die Temperatur 100° gebracht war, verschwand natürlich der Thermostrom im Galvanometer und im selben Moment brachte ich zwischen beide Wärmequellen eine Thermosäule so an, dass sich beide Strahlungen compensirten, dass also ein zweites Galvanometer, welches mit dieser Thermosäule verbunden war, unafficirt blieb. Dann überliess ich das ganze System sich selbst; die eine Fläche wurde durch den Bunsenbrenner immer mehr und mehr bis zu einem stationären Zustande erhitzt. Nach 15 Minuten drehte ich die Bunsenflamme allmälig zu, so dass die Temperatur der Metallplatte immer mehr sank. Das eine Galvanometer zeigte mir wieder genau den Moment, wo beide strahlenden Flächen dieselbe Temperatur, 100° C., hatten. Die

[1] A. o. O., p. 83 u. f.

Strahlungen waren aber jetzt nicht mehr gleich, die Strahlung jener Fläche, welche während der ganzen Zeit continuirlich auf 100° C. gehalten wurde, überwog bei weitem. Man sieht also, dass bei leichter und flockiger Berussung die Strahlungsversuche nur im Vacuum, wo keine Verbrennung stattfinden kann, gemacht werden dürfen.[1]

Ich glaube daher die Versuche Melloni's als nicht endgiltige annehmen zu müssen.

Versuche Tyndall's.[2] Bei der ersten Anordnung seiner Versuche hatte Tyndall einen Leslie'schen Würfel mit siedendem Wasser, bei der zweiten ein erhitztes Kupferblech von 270° C. Wiewohl die Absorptionen dieser Strahlungen durch Gase und Dämpfe zu ganz anderen Zwecken gemacht wurden, kann man doch ersehen, dass die Reihenfolge der Absorptionsvermögen, sobald die übrigen Umstände identisch, ganz dieselbe ist. Hingegen findet Tyndall bei späteren directen Versuchen entgegengesetzte Resultate. Tyndall liess Platinspiralen von verschiedenen Temperaturen durch neun verschiedene Dämpfe strahlen und im Allgemeinen stieg die Diathermanität mit der Temperatur des strahlenden Platins.[3] Bei der angewandten hohen Temperatur blieben aber Änderungen des Reflexionsvermögens des Platins sicher nicht ohne Einfluss auf die Art der ausgesandten Strahlung. Auch schienen mir die Änderungen, als ich die Versuche nachmachte, weniger bedeutend, als dieselben Tyndall gefunden.

Zu dem Zwecke habe ich das Ritchie's Differentialthermometer etwas anders eingerichtet und eine grössere Anzahl von Versuchen damit gemacht.

Eigene Versuche. Zunächst construirte ich einen Apparat, wie ihn nachstehende Figur versinnlicht. *A* ist ein Holzrahmen,

---

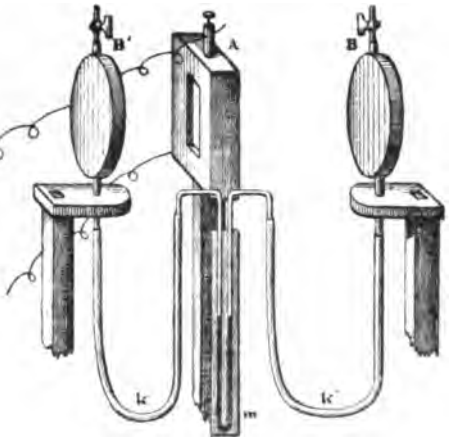
[1] Auch andere Einflüsse wirken oft sehr störend. So hat Verfasser derartige Beobachtnugen in sehr unangenehmer Weise gemacht, indem er durch drei Monate umsonst gearbeitet, als er die Strahlung bei tiefen Temperaturen (— 100° C.) untersuchte. Die im Russ absorbirte Kohlensäure veränderte bei dieser Temperatur das Ausstrahlungsvermögen in sehr starkem Masse.

[2] Contributions to molecular physics in the domain of radiant heat. London 1872.

[3] A. o. O. 221.

in welchem ein blankes Platinblech mittelst galvanischen Stromes zum Glühen gebracht werden kann. Dieses Platinblech ist 20^{mm} breit und 25^{mm} lang und wurde zum Glühen 21 grossplattige Bunsen benutzt, von welchen je sieben Stück zu einem einzigen Elemente vereinigt wurden. Das Platinblech war durch Sieden in Königswasser bis auf eine ungemein kleine Dicke gebracht worden, so dass es bei Anwendung des vollen Stromes in intensiver Weissgluth erschien. *B* und *B'* sind zwei hohle Metalltrommeln aus dünnem Messingblech; der Durchmesser der vorderen Scheibe war 15^{cm}, die Höhe des ganzen Cylinders betrug 1^{cm}. Oben sind diese Gefässe mit Glashähnen versehen und unten stehen sie mittelst Kautschukschläuchen, *k* und *k'*, mit einem U-förmigen Manometer *m* in Verbindung. Dieses Manometer ist gefüllt mit einem Gemisch von Alkohol, Äther, Schwefelkohlenstoff und Benzin, deren Dämpfe natürlich auch nach *B* und *B'* dringen, wodurch eine ungemeine Empfindlichkeit gegen Temperaturänderungen erreicht wird. Die Kautschukschläuche haben bei möglichster Dicke im Fleische eine sehr kleine Öffnung und sind mit einer Glycerinleimlösung gegen die Angriffe der durchstreichenden Dämpfe geschützt. Eine grosse Anzahl von Schirmen zwischen *A* und *B* oder *B'* verhindert, dass andere erwärmte Stellen von *A* mit alleiniger Ausnahme des Platinbleches gegen *B* strahlen können. *A*, *B* und *B'* ist jedes für sich auf demselben Schlitten verschiebbar und über das ganze erhebt sich ein grosser 900^{mm} hoher, 680^{mm} breiter, 250^{mm} tiefer Glaskasten, der so eingerichtet ist, das *B'* auch von aussen mittelst einer feinen Mikrometerschraube verschoben werden konnte.

Fig. 6.



Der Gang des Versuches war folgender: Die gegen *A* schauende Fläche von *B* war entweder blank oder mit Russ belegt, während auf der entsprechenden Seite von *B'* nacheinander Eisenoxyd, Bleiweiss, borsaures Bleioxyd, Menninge, Kreide, Gyps und Schwefel zur Anwendung kamen. Diese Substanzen wurden theils mit einer Lösung von Schwefel in Schwefelkohlenstoff angemacht aufgetragen, theils wurden sie direct mit etwas Wasser angeklebt, in welcher Weise sie bei einiger Vorsicht auch sehr gut haften. Durch Öffnen der beiden Hähne wird der Manometerstand corrigirt, und nachdem beide Trommeln sicher hinlänglich mit Dampf gefüllt, werden die beiden Glashähne sehr behutsam geschlossen. Dann schickte ich den vollen Strom durchs Platin und regulirte die Stellung von *A*, *B* und *B'*, so dass im Manometer wieder die Flüssigkeit in beiden Schenkeln gleich hoch stand. Die gröbste Einstellung machte man mit der Hand, schliesslich jedoch musste man aus der Ferne von aussen her mittelst einer Mikrometerschraube die letzte Einstellung von *B'* vornehmen. War das erreicht, so wurde durch Einschalten von Widerständen die Temperatur des strahlenden, zunächst ganz blanken Platinbleches immer mehr erniedrigt. Das Manometer zeigte nun für alle angewandten Temperaturen zwischen 100° und mindestens 1000° C. vollkommene Ruhe, d. h. vollkommene Gleichheit der Strahlungswirkungen.

Es erschien mir aber unwahrscheinlich, dass die Reflexion auf die Ausstrahlung des Platins und noch dazu eines vollkommen blanken Platins innerhalb so weiter Grenzen ohne Einfluss sein sollte; ich wiederholte daher die Versuche, indem ich *B* und *B'* durch zwei Eisenblättchen ersetzte, welche unter sich durch einen Neusilberdrath und mit einem Galvanometer durch je einen Kupferdrath verbunden waren. Ich hatte also statt des Differentialthermometers eine Differentialthermosäule. Dabei war die Fixirung der Pulver am Eisenbleche und die gegenseitige Einstellung der strahlenden Flächen u. s. w. genau so wie früher. Bei der höchsten Weissgluth des Platinbleches in der Mitte wurde die Stellung so regulirt, dass die Strahlungswirkungen gegen *B* und *B'* gleich waren, dass also im Galvanometer kein Strom auftrat. Diese Einstellung war sehr schwer zu bewerkstelligen und es mussten zu diesem Zwecke zwei Galvanometer von sehr ver-

schiedener Empfindlichkeit in die eine Leitung gebracht werden. Erst nachdem der Strom im gröberen auf Null gebracht war, schaltete ich durch Aufheben einer Abblendung das empfindlichere Galvanometer ein, mittelst welchem die letzten Verschiebungen von *B'* controlirt wurden. Waren aber bei der höchsten Glühtemperatur die Strahlungen gleich, dann konnte ich das Platinblech beliebig in seiner Temperatur variiren, die Wirkungen blieben nach beiden Seiten immer dieselben, kleine unvermeidliche Schwankungen der Galvanometernadel abgerechnet, die mehr oder weniger bei jeder genaueren Spiegelablesung auftreten werden. Durch Abblenden einer Seite des Platinbleches konnte man sich leicht überzeugen, dass diese Schwankungen ein verschwindendes Procent der Gesammtstrahlung ausmachte.

Ich hatte so die Überzeugung gewonnen, dass in den beobachteten Fällen die Strahlungswirkungen gleich sind. Da aber die Reflexion bei einem blanken Platinblech gewiss sehr gross ist, und da diese Reflexion bei verschiedenen Temperaturen sich gewiss auf die einzelnen Wellenlängen verschieden vertheilen wird, glaubte ich zunächst für obige Resultate den Grund darin zu sehen, dass die angewandten pulverförmigen Körper alle Wellenlängen ziemlich gleichmässig absorbiren; denn dann werden auch sehr verschieden zusammengesetzte Strahlungen in gleicher Weise absorbirt werden.

Es wurde nun die Versuchsanordnung so getroffen: Auf die eine Seite des Platinbleches kam eine gewöhnliche Thermosäule, auf die andere Seite legte ich eine horizontale 1430^{mm} lange Blechröhre, deren vorderes Ende mit einer Steinsalzplatte verschlossen werden konnte und an deren hinterem Ende eine Thermosäule so eingekittet war, dass ihre eine Fläche durch die Röhre und das Steinsalz hindurch gegen das glühende Platinblech sah. Beide Thermosäulen waren in entgegengesetztem Sinne in dieselbe Leitung eingefügt, in welche auch zwei Galvanometer eingeschaltet waren. Die Röhre konnte mit verschiedenen Gasen und Dämpfen gefüllt werden. Zunächst wurde das Platinblech in sehr hohe Gluth versetzt, und dann die freie Thermosäule mittelst eines Tyndall'schen[1] Schirmes soweit abgeblendet,

[1] A. o. O., p. 000.

dass zuerst am groben und schliesslich auch am empfindlicheren Galvanometer kein Strom auftrat; dann wurde der Ausschlag der Galvanometernadel beobachtet, wenn die Intensität der Strahlung des blanken Platinbleches immer mehr vermindert wurde.

Bei Leuchtgas, Kohlensäure und Kohlenoxyd blieb die Strahlungswirkung gleich. Bei CO_2 und CO aber schien es, als ob die Durchstrahlung bei tieferen Temperaturen etwas leichter vor sich ginge, doch waren die Änderungen zu geringe, um daraus irgend welche Schlüsse ziehen zu können.

Hingegen trat bei den Dämpfen von Alkohol und Äther entschieden eine Änderung der Absorption mit der Temperatur ein; nur waren diese Abweichungen geringer als nach den Messungen von Tyndall. Ich fand, dass bei einer Temperatur, wo das Platinblech eben noch sichtbar war, bei C_2H_6O der Ausschlag 15^{mm} und bei $(C_2H_5)_2O$ 30^{mm} betrug. Stellte ich vor die Röhre einen Schirm, so war der Ausschlag in derselben Richtung in beiden Fällen über 500^{mm}. Diese Dämpfe lassen also von der Strahlung eines bei 500° C. glühenden Platinbleches weniger durch, als von der Strahlung desselben Bleches, wenn dessen Temperatur über 1000° C. liegt.[1] Es ist dies meiner Meinung nach dahin aufzufassen, dass zwar die wirkliche Strahlung des Platins bei allen Temperaturen dieselbe Vertheilung in Bezug auf die einzelnen Wellenlängen aufweist, dass aber die Reflexion sich mit der Temperatur ändert und so auch das scheinbare Ausstrahlungsvermögen beeinflusst. Um das aber zu bemerken, bedarf es eines Körpers, der ein sehr elektives Absorptionsvermögen besitzt.

Wenn ich aber das Platinblech mit einer dünnen Graphitschichte überzog, konnte ich dasselbe zwar nicht mehr so hoch erhitzen, ich brachte dasselbe der vermehrten Ausstrahlung wegen nur zu mässiger Rothgluth, dagegen blieb aber das Absorptionsvermögen viel constanter als vorher innerhalb derselben Temperaturgrenzen.

---

[1] Obige Messungen sind nur Beispiele; ich habe dieselben bei verschiedenen Dichten der untersuchten Substanzen und bei verschiedenen Strahlungstemperaturen untersucht. Ich gebe keine genauen Zahlen, weil selbstverständlich jede Temperaturbestimmung illusorisch wäre. Der Sinn der Resultate war immer derselbe.

Noch auffallender fand ich diesen Unterschied zwischen der Strahlung eines blanken und eines geschwärzten Platinbleches, wenn ich als zu durchstrahlende Substanz eine Lösung von Jod in Schwefelkohlenstoff anwandte. Dieselbe war in einem Steinsalzgefäss verschlossen, welches ich demjenigen, das Tyndall anwandte[1] nachgebildet habe.

Ich stellte mein gefülltes Steinsalzgefäss unmittelbar vor die Röhre und wenn bei einer höheren Temperatur Gleichgewicht zwischen der directen und der durch Jod gegangenen Strahlung bewirkt war, zeigte bei tieferen Temperaturen der Galvanometerausschlag, dass dann durch das Jod ein relativ grösseres Strahlungsbetrag durchging als früher. Dies trat jedoch in viel weniger auffallender Weise auf, wenn ich das Platinblech mit Graphit schwärzte. Graphit ist immer noch etwas glänzend; bei einem vollkommen schwarzen Körper müsste die Strahlungswirkung in allen betrachteten Fällen immer nach beiden Seiten gleich gewesen sein.

Versuche über Abkühlungsgeschwindigkeit. Bevor ich dieses Gebiet der Wärmestrahlung verlasse, muss ich noch kurz von den Versuchen von Dulong und Petit[2] einerseits und von Prevostaye und Desains[3] andererseits sprechen. Innerhalb des beobachteten Temperaturintervalles gelangten diese französischen Experimentatoren, was die oben ausgesprochenen Ideen betrifft, zu einander entgegengesetzten Resultaten. Während die ersteren schliessen, dass das Ausstrahlungsvermögen des Silbers mit steigender Temperatur rascher zunimmt, als das des Glases, haben Prevostaye und Desains aus ihren Beobachtungen gefolgert, dass für Metalle eine schwache Abnahme des Verhältnisses der Ausstrahlungen beim Steigen der Temperatur eintritt. Doch halten sie selbst die Ausdehnung ihrer Experimente für zu beschränkt, um darüber Bestimmtes sagen zu können.

All' diese Versuche hat in neuerer Zeit Stefan[4] discutirt, welcher sich in seiner Abhandlung unter Anderem auch eines

---

[1] A. o. O. p.

[2] Ann. de chim. et de phys. VII.

[3] Ann. de chim. et de phys. (3) XVI. Pogg. Ann. 68. 69.

[4] „Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur." Diese Berichte LXXIX.

Salzes bedient, wonach: „für die Geschwindigkeit der Abkühlung eines Körpers in einer Hülle das kleinere der Emissionsvermögen von den beiden massgebend“ sei.[1]

Das heisst in dem Eingangs betrachteten Falle der sich einschliessenden Kugelhüllen

$$\alpha_2 F(t_1) - f(t_2) = f(t_1) - f(t_2)$$

oder

$$\alpha_1 F(t_2) - f(t_1) = f(t_2) - f(t_1)$$

woraus sofort folgt mit Bezug auf Gleichung (1)

$$\alpha_2 = \frac{f(t_1)}{F(t_1)} = \alpha_1 = \frac{f(t_2)}{F(t_2)}$$

Diese Beziehung, und daher auch obiger Satz sind aber, wie glaube, nur insoweit richtig, als eine eventuelle Änderung des Reflexionsvermögens nicht von störendem Einflusse ist.

Wenn überhaupt die Strahlung eines schwarzen Körpers z. B. proportional der vierten Potenz der absoluten Temperatur ist, so gilt eben dasselbe auch bei einem anderen Körper ganz ebenso von dem wirklichen Ausstrahlungsvermögen, nur angenähert aber von dem scheinbaren Ausstrahlungsvermögen und zwar mit um so grösserer Annäherung, je geringer die Änderungen des Reflexionsvermögens oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen Fresnel's, je geringer die Änderungen der Brechungsexponenten mit der Temperatur sind.

b) Photometrische Versuche.

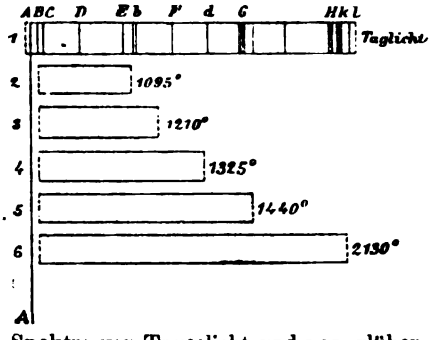
Die Arbeiten Draper's. — Es wird gewiss schon aufgefallen sein, dass die allgemein herrschende Ansicht, dass ein Körper bei immer höher steigender Temperatur zuerst rothes, dann gelbes u. s. w. Licht ausstrahlt, unhaltbar geworden. Es müsste, soferne das Maximum der Lichtausstrahlung irgend eines Körpers im Gelb liegt, das bei allen Temperaturen der Fall sein. Als Beispiel der gewöhnlichen Auffassung diene folgender Satz

[1] p. 27.

„Der Werth von *e* ist zunächst von Null verschieden für das rothe Licht, dann tritt bei einer höheren Temperatur zu dem rothen das gelbe, dann das grüne, blaue und so fort.“ [1] Als Autor dieser Meinung gilt Draper. Da Gelehrte allerersten Ranges obige Ansicht theilen,[2] muss ich sehr betonen, dass Draper dergleichen nie behauptet hat. Seine diesbezüglichen Worte lauten vielmehr.

„Ein Platinstreifen wurde vor einen Spalt gestellt, welcher das Spectrum 1 geliefert hatte, und seine Temperatur wurde dann durch das Hindurchsenden eines Voltai'schen Stromes erhöht. Obgleich man das Metall mit blossem Auge deutlich sehen konnte, wenn die Temperatur ungefähr 1000° F. erreichte, war doch der Verlust beim Passiren des Prismas und Fernrohres, so gross, dass es nothwendig war, die Temperatur auf 1210° zu bringen, bevor man eine zufriedenstellende Beobachtung machen konnte. Dann erstreckte sich das Spectrum von der Linie *B* im Roth bis nach *F* im Grün ..... Die zuerst in diesem Instrumente sichtbaren Farben können also bezeichnet werden, als Roth und Grünlichgrau.“ Ein anderes Mal sieht Draper mit blossem Auge durch das Prisma, welches dem Drahte sehr nahegebracht wurde „und fand, dass man denselben schon bei einer Temperatur von 1095° deutlich sehen konnte. Bei solchen Umständen, konnte die ganze Länge nicht durch directe Messungen mit anderen Beobachtungen verglichen werden und das in 2 gegebene Resultat ist so correct, als es überhaupt erhalten werden kann. Die Farben waren roth und grünlichgrau.“ ..... „Der

Fig. 7.



Spektra von Tageslicht und von glühendem Platin bei verschiedenen Temperaturen.
Nach Draper.

[1] *e* bedeutet das scheinbare Ausstrahlungsvermögen. Wüllner, Exp. Physik. 1875. II, p. 254.

[2] Z. B. Kirchhoff, Pogg. Ann. 109, p. 292.

Schluss, dass, wenn die Temperatur eines Körpers steigt, derselbe Strahlen von wachsender Brechbarkeit ausstrahlt, muss offenbar mit einer gewissen Einschränkung genommen werden. Anstatt dass zuerst Roth, dann Orange, dann Gelb etc. aufeinanderfolgend sichtbar würden, für welchen Fall das Spectrum an Länge regelmässig wachsen würde, sowie die Temperatur steigt, finden wir hier, dass dasselbe im allerersten Moment, wo es dem Auge sichtbar ist, von *B* bis gegen *F* reicht, d. h. es ist ungefähr gleich zwei Drittel der ganzen Länge eines Diffractionsspectrums, und beinahe die Hälfte eines prismatischen Spectrums.“ [1]

Diese merkwürdige Thatsache ist meiner Meinung nach ungemein wichtig. Als ich das Experiment zum ersten Male machte, war ich im gewöhnlichen Glauben befangen, als hätte Draper eine andere Ansicht und ich war sehr angenehm überrascht, beim näheren Eingehen in die Schriften Draper's einen so mächtigen Bundesgenossen gefunden zu haben.

Noch mehr. Wenn ich obige Experimente mit einem Diffractionsgitter anstellte, war das auftretende Roth verschwindend blass gegen das nebenstehende, immer gleichzeitig auftretende Graulichgrün.[2]

Was die in diesem Gebiete oft citirten Arbeiten Becquerel's anbelangt, so sind seine Resultate lange nicht so eindeutig, wie sie gewöhnlich angegeben werden. Dass alle Körper bei gleicher Temperatur anfangen, in einer für das Auge gleichen Weise Strahlen auszusenden, dem widerspricht Becquerel direct, „wenn z. B. Gase, welche sehr wenig leuchtend sind, verglichen werden mit festen Körpern, welche es sehr stark sind.“ [3] Ebenso muss man unterscheiden zwischen Metallen, welche nicht oxydbar

---

[1] Draper, Scientific memoirs, London 1878, p. 33. Hingegen fehlt in diesem Werke jene Tabelle, welche Becquerel (La Lumière. Paris 1867. T. I, p. 88) gibt. Ebenso fehlt dieselbe im Originaltexte Phil. Mag. XXX.

[2] Auch Draper findet, dass die von „einem eben sichtbar werdenden Platin ausgesandten graulich grünen Strahlen intensiver sind, als die rothen.“

[3] A. o. O. p. 74. — Siehe überdies für feste Körper die Versuche von Desains C. R. LX. Pogg. Ann. 126. Ebenso Prevostaye und Desains C. R. T. XXXVIII. Pogg. Ann. 93.

sind, wie das Platin und Palladium und anderen, wie Kupfer und Eisen.[1] Es sind also, abgesehen von dem Umstande, dass Becquerel nicht mittelst Brechung oder Beugung, sondern nur durch Zwischensetzen farbiger Gläser bestimmte (?) Wellenlängen herausgriff, seine Gleichungen meiner Meinung nach nur für den untersuchten Fall, für Platin und Palladium giltig. Allgemeine Schlüsse oder gar Messmethoden darauf zu basiren, wie das z. B. Crova[2] gethan hat, halte ich für unberechtigt.

Ich glaube daher, und zwar zum Theil mit Rücksicht auf die Arbeiten Draper's sagen zu können:

Schon bei den tiefsten Temperaturen, wo wir überhaupt sehen können, liegt das Lichtmaximum ziemlich am selben Platze, wo es bei den höchsten Temperaturen liegt. Das wird ganz genau sein, wenn sich nicht das Reflexionsvermögen eines Körpers mit der Temperatur ändert. Dieser Satz ist eigentlich schon Seite 26 ausgesprochen worden, als ich sagte, dass die spectrale Vertheilung der ausgestrahlten Energie von der Temperatur unabhängig sei.

Damit wir in unserem Auge Licht empfinden, muss die Intensität der Wellenbewegung des Äthers eine gewisse untere Grenze überschreiten. Diese Grenze wird im Allgemeinen für die verschiedenen Wellenlängen eine verschiedene sein; die Lösung dieser physiologischen Frage soll mich hier nicht weiter beschäftigen. Hingegen kann man sehr schön von der Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes sich dadurch überzeugen, dass man die Spectra ein und desselben Körpers bei verschiedenen Temperaturen vergleicht. Diese Spectra sollen den entwickelten Ideen zufolge relativ gleich sein.

Die Versuche von Nichols und eigene Experimente. Wenn man das Spectrum eines schwach rothglühenden Platindrathes vergleicht mit dem eines beliebig höher erhitzten Platindrathes, so sind in der That beide Spectra identisch bis zu einer Temperatur des heisseren Drathes, wo er dem Schmelzpunkte sehr nahe ist. Nichols hat die Zahlenwerthe für die relative spectrale Vertheilung in diesem Falle gegeben. Nach

---

[1] A. o. O. p. 79.

[2] Siehe später, Seite 488.

diesen Versuchen ist bei höheren Temperaturen eine leise Verschiebung der relativen Lichtvertheilung gegen das Violett hin, bemerkbar.[1] Das rührt meiner Meinung nur von der Änderung des Reflexionsvermögens her. So findet z. B. Nichols selbst den scheinbaren Absorptionscoëfficienten des heissen Platindrahtes 0·759, während derselbe bei tieferen Temperaturen 0·323 ist.

Es sind aber auch die Änderungen des Spectrums im Violett nicht bedeutend. Ich nahm zwei Platinstreifen, welche mittelst eines elektrischen Stromes erhitzt wurden. Die Spectra wurden in einem Glan'schen Spectrophotometer[2] unmittelbar übereinander gebracht und durch entsprechende Drehung des Nicols der rothe Theil des Spectrums oben und unten gleich gemacht. Der eine Platinstreifen war stets schwach rothglühend, der andere hatte eine höhere Temperatur und so wie das Roth gleich gemacht war, zeigte auch das andere Spectrum vollkommene Identität. Erst bei sehr hohen Temperaturen treten oben violette Strahlen auf, die unten im Spectrum des tiefer temperirten Platins nicht sichtbar sind. Nun ändert sich aber in der Nähe des Schmelzpunktes gewiss das Reflexionsvermögen des Platins auch in Bezug auf die einzelnen Wellenlängen sehr verschieden. Dass das der Fall, dafür spricht eine Beobachtung Violle's, wonach bei etwa 1775° c. $^1/_4$ der Wärmestrahlung durch Steinsalz und Alaun geht,[3] während nach Desains bei etwas tieferer Temperatur nur unmerkliche Spuren leuchtender Wärme da sind.[4]

Um ungefähr von dem Einflusse der Temperatur auf das Reflexionsvermögen mich zu überzeugen, machte ich folgenden

---

[1] Wied. Beibl. III. Die Art der Temperaturbestimmung, Verlängerung eines Platindrahtes, ist gewiss ungenau. Wir finden Temperaturen bis zu 1930° C. angegeben, während nach Violle (C. R. LXXXVIII.) *Pt* bei 1775° C. schon schmilzt.

[2] Pogg. Ann. 161. Das von mir benützte Instrument aus der Werkstätte von Schmidt und Haensch in Berlin war nicht à vision directe eingerichtet. Statt dieses Apparates kann man auch ein gewöhnliches Spectroskop verwenden, wenn man nur vor die heissere Lichtquelle einen zusammenschiebbaren Spalt bringt, durch dessen Verkleinerung die Lichtintensität beliebig geschwächt werden kann.

[3] C. R. LXXXVIII.

[4] Wied. Beibl. III.

Versuch. Ich brachte vor dem Glan'schen Apparate ein blankes spiegelndes Platinblech so an, dass es der totalreflectirenden Fläche jenes kleinen Glasprismas parallel war, welches unmittelbar vor dem Spalt befestigt ist und dazu dient, die Strahlen der seitlichen Lichtquelle in den Collimator hinein zu reflectiren. Man sieht dann im Spectroskope von dieser seitlichen Lichtquelle, in unserem Falle eine Gasflamme, zwei Spectra; das eine rührt her von dem am Glase, das andere von den am Platinblech reflectirten Strahlen. Hinter dem Platinbleche hatte ich ein kleines Gasgebläse, um die Temperatur dieser reflectirenden Fläche durch Annäherung der Flamme beliebig zu variiren. Die Spectra der vom Glas und Platin reflectirten Strahlen wurden im rothen Theil des Spectrums durch Drehen des Ocularnicols gleichgemacht dann zeigten die vom Platin reflectirten violetten Strahlen eine etwas geringere Intensität als die vom Glasprisma reflectirten. Dieser Unterschied wurde prägnanter, sobald die Temperatur, des Platinbleches auf etwa 500° C. stieg, während im rothen beide Spectra gleich waren. Höher erhitzen konnte ich das Platinblech nicht, weil es sonst selbst angefangen hätte, Strahlen auszusenden.[1] Andere Metalle durfte ich zur Reflexion nicht verwenden, weil sich an der Oberfläche beim Erhitzen Oxydschichten bildeten. Aus diesem Experimente schliesse ich, dass die Veränderung des Reflexionsvermögens mit der Temperatur zwischen 0° und 500° C. sehr gering ist, dass sich aber trotzdem diese Änderung für Roth anders ergibt als für Violett. Wenn die innerhalb dieses niedrigen Temperaturintervalles schon sichtbare Tendenz bei höheren Temperaturen noch vorhanden bleibt, dürfte im Allgemeinen das Violett bei einer höheren Temperatur im Verhältniss zu Roth weniger stark reflectirt werden.

Dann ergibt sich aber das leise Überwiegen des Violetts in der relativen spectralen Vertheilung jenes Lichtes, welches ein seinem Schmelzpunkte naher Platindraht ausstrahlt, daraus, dass bei diesen Temperaturen die violette Strahlung leichter aus dem Körper herausgelangt, als die rothe.

---

[1] Prevostaye u. Desains, C. R. XXVIII. Pogg. 78 zeigten zuerst, dass „verschiedene Wärmearten" an Metallen verschieden reflectirt werden.

Um einen weniger reflectirenden Körper als Platin zu untersuchen, verwandte ich zunächst Drummond'sches Kalklicht. Je nach dem stärkeren oder geringeren Zufluss von Sauerstoff glüht der Kalkcylinder in höherem oder geringerem Grade. Wenn man wieder die Spectra zweier solcher verschieden temperirter Kalkcylinder im Glan'schen Apparate über einander brachte, und den rothen Theil des Spectrums gleich machte, dann war die Ausdehnung und relative Vertheilung des ganzen Spectrums gleich. Erst bei sehr grossen Temperaturintervallen überwiegt die heissere Strahlung um einen kaum merklichen Betrag im Violett. Es ist also hier der Einfluss des Reflexionsvermögens ein sehr geringer.

Man kann dieses Experiment auch sehr leicht objectiv machen.[1] Es wurden die Strahlen zweier verschieden glühender Kalkcylinder mittelst eines totalreflectirenden Glasprismas in eine Richtung gebracht und so gebrochen, dass zwei Spectra unmittelbar übereinander fielen. Der eine Kalkcylinder wurde möglichst heiss gemacht, der andere schwach roth glühend erhalten und trotzdem konnte man durch Verengerung des Spaltes der ersten Lichtquelle stets vollkommene Identität und gleiche Länge beider Spectra erhalten. Durch Verengerung des Spaltes werden alle Wellenlängen gleichmässig geschwächt.

Am beweisendsten jedoch scheint mir ein Experiment, wo ich als Lichtquellen elektrische Incandescenslampen benütze. Es wurde der Strom einer grösseren Bunsenbatterie oder der Strom einer Gramme'schen Maschine durch Kohlen geleitet, welche ich mir durch Glühen von dünnen Bambusfasern herstellte[2] und die ich in luftleeren oder mit Leuchtgas gefüllten Glaskölbchen befestigte. Das Spectrophotometer zeigte hier vollkommene Gleichheit der Spectra in Bezug auf die relative Vertheilung der einzelnen Farben. Die eine Kohle erhielt ich auf schwacher Rothgluth, während der andere Kohlenfaden bis zu einer Lichtstärke von etwa 10 Kerzen erhitzt wurde. Das Experiment gelang

---

[1] Ich zeigte dasselbe in einer Versammlung der chem. phys. Gesellschaft in Wien, am 10. Jänner 1882.

[2] Ich hielt mich so sehr als möglich an die Art, wie Edison die Fabrication seiner Lampen beschreibt.

aber weniger rein, wenn der Glaskolben vollkommen luftdicht ausgepumpt war; in diesem Falle ist das Violett etwas dominirend, sobald eine sehr intensive Weissgluth erreicht ist. Der Grund liegt darin, dass sich die Kohle in der Hitze zusammenzieht und weisslich, fast metallisch glänzend wird, so dass wieder ein gewisses Reflexionsvermögen auftritt. Glüht die Kohle aber in einer nur etwas Sauerstoff enthaltenden Umgebung, so tritt eine ununterbrochene Oxydirung ein; die Kohle erscheint auch nach mehrmaligem Erhitzen dunkelschwarz. Ebenso bleibt auch in einer Atmosphäre von Leuchtgas die Kohle schwach reflectirend; nur aus einem entgegengesetzten Grunde wie früher, es schlagen sich feine Kohlentheilchen nieder, der glühende Faden wird immer dicker.[1]

Wenn es also gelingt, eine wirklich schwarze Kohle bis zur Weissgluth zu erhitzen, ohne dass sich in der höheren Temperatur die Farbe der Kohle verändert, (welche Veränderung man natürlich erst nach der Abkühlung sehen kann), dann kann man auch experimentell zeigen, dass die spectrale Vertheilung des ausgesandten Lichtes unabhängig ist von der Temperatur.

Wenn ich also durch ein gewöhnliches Spectroskop einen heiss glühenden schwarzen Körper ansehe, dessen Temperatur immer mehr abnimmt, dann sehe ich (ähnlich wie die Figur auf Seite 41) ein Zusammenziehen des Spectrums gegen Roth, so dass die schliessliche Ausdehnung von Roth bis gegen Grün reicht; weiter schrumpft dasselbe nicht zusammen, es verblasst vielmehr in einer, verschiedenen Augen verschieden erscheinenden, jedoch ziemlich gleichförmigen Weise. Genau dasselbe tritt aber ein, wenn ich die Weissgluth des Körpers gleichförmig fortbestehen lasse und durch Zusammenziehen des Spaltes sämmtliche Wellenlängen gleichmässig schwäche.

Nachdem aber zerlegtes Licht ein solches Verhalten zeigt, muss auch das ursprüngliche Lichtbüschel sich dementsprechend verhalten. Ein heisser, schwarzer Körper verschwindet dem Auge beim Abkühlen mit einer schwach rothen Farbe. Wenn ich daher

---

[1] Auch tritt bei längerer Dauer des Versuches zunächst eine Trübung und schliesslich vollkommene Schwärzung des Glaskolbens ein.

einen weissglühenden schwarzen Körper durch zwei Nicols ansehe und durch allmäliges Kreuzen die Strahlung schwäche, so bleibt die relative spectrale Vertheilung immer dieselbe, der Körper müsste auch jetzt mit einer schwach rothen Färbung verschwinden. Das fand ich jedoch nicht ganz bestätigt. Die Strahlen der leuchtenden Incandescenslampe erschienen zwar durch die gekreuzten Nicols röthlich, doch ist die Farbennuance etwas anders als beim directen Anblick eines schwach glühenden Kohlenfadens. Es ist also die subjective Mischung verschiedener Farben viel empfindlicher zur Vergleichung von Farbencomplexen als die directe Vergleichung der einzelnen Bestandtheile. Ferner zeigt dieses Experiment, dass auch bei schwarzen Kohlen ein gewisses, wenn auch sehr kleines Reflexionsvermögen vorhanden ist.

Um daher meine Ansicht noch weiter zu prüfen, verwendete ich einen Spectralapparat mit fluorescirendem Oculare, dessen sämmtliche dioptrischen Bestandtheile aus Quarz verfertigt waren. Da die fluorescirenden Strahlen von Glas sehr stark absorbirt werden, brachte ich meine Bambuskohlenfäden in Glasgefässe, welche ich nach einer Seite mit Quarzplatten verschloss. Am Ocular wurde als fluorescirende Substanz Uranglas verwendet. Es zeigte sich, dass auch hier die Ausdehnung der Spectra eines sehr heissen und eines rothglühenden Kohlenfadens, sobald das Roth egal gemacht wurde, im Ultravioletten gleich lang war.

Versuche Crova's. Nach dem Gesagten glaube ich die auch von Nichols[1] schon angezweifelte Messmethode Crova's[2] für hohe Temperatur nicht mehr ausführlich besprechen zu müssen. Der Grundsatz, von welchem Crova ausgeht, lautet: „Die Temperatur eines Körpers lässt sich ermitteln aus dem Verhältniss der Lichtintensität einer bestimmten Strahlung λ' die in dem Spectrum der zu untersuchenden Quelle genommen ist, zu der Intensität derselben Strahlung in dem Spectrum einer Quelle von bekannter Temperatur, vergleichen mit dem Ver-

---

[1] Wied. Beibl. III.

[2] Die verschiedenen Arbeiten sind zusammengestellt: Ann. de chim. (5), T. 19.

hältniss der Helligkeiten einer anderen Strahlengattung λ in beiden Lichtquellen".[1] Zwei Spectra werden im Roth gleich gemacht, dann gibt das Intensitätsverhältniss der violetten Strahlungen ein Mittel zur Bestimmung der Temperaturunterschiede der beiden Lichtquellen.[2]

Nun hat Zöllner[3] und Wüllner[4] eine überaus einfache Anschauungsweise einzuführen gesucht, wonach es zwischen einem Banden- oder Linien- und einem continuirlichen Spectrum keinen scharfen Unterschied gibt, die Strahlung eines jeden Körpers muss bei allmäliger Änderung der Dicke der strahlenden Schichte aus dem einen Spectrum allmälig ins andere übergeführt werden können. Gemäss der im ersten Capitel, Seite 19, gegebenen Anschauungen wäre hier nur noch die Einschränkung hinzuzufügen, dass die spectrale Vertheilung selbst bei unendlicher Dicke des strahlenden Mediums nicht mit dem Spectrum eines total schwarzen Körpers identisch werden kann, weil das Reflexionsvermögen sich gewiss auf die verschiedenen Wellenlängen verschieden vertheilt.

Dann aber wäre eine spectrophotometrische Methode, welche von vorneherein Spectra mit wechselnden Maximis und Minimis ausschliesst,[5] eine sehr precäre, weil es keinerlei Grenze für die Anwendbarkeit der Methode gibt. Man könnte nun glauben, und Crova selbst ist dieser Ansicht, dass besonders bei schwarzen Körpern sein Spectropyrometer anwendbar sei. Nach den Ideen, wie ich sie in vorliegender Arbeit auseinandergesetzt habe, wird sich aber gerade bei schwarzen Körpern das Willkürliche seiner Annahme zeigen.

Crova stützt sich auf die alte Anschauung, dass im Auftreten neuer Wellenlängen gegen das Violett hin ein gewisses, im eigentlichen Wesen der Strahlung begründetes und für sämmtliche Körper identisches Gesetz ausgedrückt wird.

---

[1] C. R. LXXXVII. Citirt nach Eilhardt Wiedemann. Beib. II. 656.
[2] C. R. LXXXX. Beib. IV. 363.
[3] Pogg. Ann. 142.
[4] Exper. Phys. 1875. II.
[5] Ann. de chim. (5), T. 19, p. 547.

Ich hingegen erblicke in der Verschiebung der Strahlung gegen das Violett, wie dieselbe bei reflectirenden erhitzten Körpern auftritt, nur den Einfluss der Änderung des Reflexionsvermögens mit der Temperatur, welche Änderung ihrer absoluten Grösse nach sehr verschieden für verschiedene Körper ist; man kann daher für einen oder den anderen Körper eine der Crova'schen ähnliche rein empirische Temperaturbestimmung vornehmen, wobei jedoch jeder anders reflectirende Körper eine eigene Reductionsscala erfordern würde.

Wien, physikalisches Institut.

Das Additionstheorem derjenigen Functionen, welche bei der Entwicklung von e^{xxi} nach den Näherungsnennern regulärer Kettenbrüche auftreten.

Von **Leopold Gegenbauer.**

In einer früheren Abhandlung: „Über die Functionen $C_n^{\nu}(x)$" (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 75. Band, II. Abtheilung, pag. 891 ff.) habe ich gezeigt, dass die Functionen:

$$2^{\nu} i^{\lambda} \Pi(\nu-1)\,(\lambda+\nu)\,\alpha^{-\nu} J_{(\alpha)}^{\lambda+\nu} \quad (\lambda = 0, 1, 2\ldots)$$

wo $J_{(\alpha)}^{\lambda+\nu}$ die Bessel'sche Function erster Art ist, die Coëfficienten der Entwicklung von $e^{\alpha x i}$ nach den Functionen $C_{\lambda}^{\nu}(x)$ sind. Die Functionen $C_{\lambda}^{\nu}(x)$ sind aber die mit gewissen Constanten multiplicirten Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung der hypergeometrischen Reihe $x^{-1} F\left(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right)$.

Es werden demnach gewisse Eigenschaften der Bessel'schen Functionen erster Art nicht nur diesen speciellen Functionen, sondern allen Functionen, welche als Coëfficienten der Entwicklung von $e^{\alpha x i}$ nach den Näherungsnennern regulärer Kettenbruchentwicklungen auftreten, zukommen. Eine solche, allen erwähnten Entwicklungscoëfficienten gemeinsame Eigenschaft wird, wie sofort gezeigt werden soll, durch die von mir abgeleitete Relation:

$$J_{(\alpha+\beta)}^{\nu} = \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)^{\nu} \frac{2^{\nu+1}\Pi(\nu)}{\Pi(2\nu)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \frac{\Pi(2\nu+\lambda-1)}{\Pi(\lambda)} J_{(\alpha)}^{\lambda+\nu} J_{(\beta)}^{\lambda+\nu} \qquad 1)$$

ausgedrückt, welche zeigt, wie eine Function der Summe zweier Argumente sich mit Hilfe von Functionen der einzelnen Argumente darstellen lässt.

Bezeichnet man die Näherungsnenner und Restfunctionen der regulären Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f(x)$, deren Theilzähler sämmtlich gleich -1 sind, mit $\psi_\lambda(x)$ und $f_\lambda(x)$, so hat man die Relationen:

$$\psi_\lambda(x) = (\alpha_\lambda x + \beta_\lambda)\,\psi_{\lambda-1}(x) - \psi_{\lambda-2}(x)$$
$$f_{\lambda+1}(x) = (\alpha_\lambda x + \beta_\lambda) f_\lambda(x) - f_{\lambda-1}(x)$$

wo $\alpha_\lambda \gtrless 0$ ist. Für jede Function, welche sich in eine nach den Näherungsnennern $\psi_\lambda(x)$ fortschreitende Reihe entwickeln lässt, soll nur eine Entwicklung existiren und es soll innerhalb eines gewissen Bereiches die Gleichung:

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \alpha_{\lambda+1} f_{\lambda+1}(y)\,\psi_\lambda(x)$$

bestehen.

Hat man die in einem gewissen Bezirke giltige Entwicklung:

$$F(\alpha, x) = \sum_\lambda A_\lambda(\alpha)\,\psi_\lambda(x)$$

so ist, wie ich gezeigt habe:

$$A_\lambda(\alpha) = \alpha_{\lambda+1}\,[F(\alpha, x) f_{\lambda+1}(x)]_{x^{-1}}.$$

Setzt man:

$$F(\alpha, x) = e^{\alpha x i},$$

multiplicirt sodann die Gleichung:

$$e^{\alpha x i} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} A_\lambda(\alpha)\,\psi_\lambda(x)$$

mit $e^{\beta x i} f_{\nu+1}(x)$ und bestimmt den Coëfficienten von x^{-1} auf beiden Seiten dieser Gleichung, so erhält man:

$$A_\nu(\alpha+\beta) = \alpha_{\nu+1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} A_\lambda(\alpha)\,[e^{\beta x i}\psi_\lambda(x) f_{\nu+1}(x)]_{x^{-1}}.$$

Da die Determinante:

$$\begin{vmatrix} f_{\lambda+1}(x), & f_{\nu+1}(x) \\ \psi_\lambda(x), & \psi_\nu(x) \end{vmatrix}$$

nur positive Potenzen von x enthält, so müssen die Coëfficienten der Glieder mit negativen Potenzen von x in den Entwicklungen der beiden Producte $\psi_\lambda(x) f_{\nu+1}(x)$ und $\psi_\nu(x) f_{\lambda+1}(x)$ übereinstimmen.

Man hat daher:

$$A_\nu(\alpha+\beta) = \alpha_{\nu+1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} A_\lambda(\alpha) \left[e^{\beta x i} \psi_\nu(x) f_{\lambda+1}(x)\right]_{x-} .$$

Setzt man speciell $\nu = 0$, so verwandelt sich diese Gleichung, da $\psi_0(x) = 1$ ist, in die folgende:

$$A_0(\alpha+\beta) = \alpha_1 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{A_\lambda(x)\, A_\lambda(\beta)}{\alpha_{\lambda+1}} \qquad 2)$$

Diese Formel enthält als speciellen Fall die oben erwähnte für die Bessel'schen Functionen erster Art giltige Relation 1).

Es lässt sich übrigens auch die Function

$$\left[e^{\beta x i} \psi_\nu(x) f_{\lambda+1}(x)\right]_{x-1}$$

durch die Functionen $A_\rho(\beta)$ ausdrücken.

Aus der Gleichung:

$$A_\rho(\beta) = \alpha_{\rho+1} \left[e^{\beta x i} f_{\rho+1}(x)\right]_{x-1}$$

folgt durch Differentiation:

$$\frac{dA_\rho(\beta)}{d\beta} = \alpha_{\rho+1} i \left[e^{\beta x i} x f_{\rho+1}(x)\right]_{x-1}$$

$$= i\{\left[e^{\beta x i} f_{\rho+2}(x)\right]_{x-1} + \left[e^{\beta x i} f_\rho(x)\right]_{x-1} -$$

$$- \beta_{\rho+1} \left[e^{\beta x i} f_{\rho+1}(x)\right]_{x-1}\}$$

oder:

$$\frac{dA_\rho(\beta)}{d\beta} = i\left\{\frac{A_{\rho+1}(\beta)}{\alpha_{\rho+2}} + \frac{A_{\rho-1}(\beta)}{\alpha_\rho} - \frac{\beta_{\rho+1}}{\alpha_{\rho+1}} A_\rho(\beta)\right\} \quad [\rho > 0].$$

Für $\rho = 0$ erhält man:

$$\frac{dA_0(\beta)}{d\beta} = i\left\{\frac{A_1(\beta)}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} A_0(\beta)\right\}.$$

Aus diesen zwei Relationen ergibt sich sofort, dass $\frac{d^\mu A_\rho(\beta)}{d\beta^\mu}$ sich als eine lineare homogene Function der Grössen $A_{\rho+\mu}(\beta)$, $A_{\rho+\mu-1}(\beta), \ldots, A_{\rho-\mu}(\beta)$ darstellen lässt, bei welcher Darstellung

selbstverständlich nur solche Functionen $A_\sigma(\beta)$ vorkommen können, deren Index eine ganze positive Zahl oder Null ist. Nun ist:

$$[e^{\beta x i} x^\mu f_{\lambda+1}(x)]_{x^{-1}} = \frac{1}{i^\mu \alpha_{\lambda+1}} \frac{d^\mu A_\lambda(\beta)}{d\beta^\mu}$$

und daher:

$$[e^{\beta x i} \psi_\nu(x) f_{\lambda+1}(x)]_{x^{-1}} = c_{\nu,\lambda} A_\nu(\beta) + \sum_{\rho=1}^{\rho=\nu} \{\beta_{\nu,\lambda,\rho} A_{\lambda+\rho}(\beta) + \gamma_{\nu,\lambda,\rho} A_{\lambda-\rho}(\beta)\},$$

wo die Coëfficienten $c_{\nu,\lambda}$, $\beta_{\nu,\lambda,\rho}$, $\gamma_{\nu,\lambda,\rho}$ leicht bestimmbare Functionen der Grössen α_λ und β_λ sind und alle Constanten $\gamma_{\nu,\lambda,\rho}$ für $\lambda < \rho$ den Werth Null haben. Es ist demnach:

$$A_\nu(\alpha+\beta) = \alpha^{\nu+1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} A_\lambda(\alpha) [c_{\nu,\lambda} A_\nu(\beta) + \sum_{\rho=1}^{\rho=\nu} \{\beta_{\nu,\lambda,\rho} A_{\lambda+\rho}(\beta) + \gamma_{\nu,\lambda,\rho} A_{\lambda-\rho}(\beta)\}]. \quad 3)$$

In dieser Formel ist die von Herrn L. Schläfli für die Bessel'schen Functionen erster Art mit ganzzahligem Index aufgestellte Gleichung:

$$J^n_{(\alpha+\beta)} = \sum_\lambda J^{n-\lambda}_{(\alpha)} J^\lambda_{(\beta)} \quad 4)$$

als specieller Fall enthalten.

Es seien nun die Functionen $A_\mu(x)$ so beschaffen, dass innerhalb eines gewissen Bereiches die Entwicklung:

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} B_\mu(y) A_\mu(x)$$

besteht, sowie dass für jede Function, welche sich in eine nach den Functionen $A_\mu(x)$ fortschreitende Reihe entwickeln lässt, nur eine einzige Entwicklung existirt. Man sieht sofort, dass die Functionen $B_\mu(y)$ in einer analogen Beziehung zu $\frac{1}{y}$ stehen, wie die Functionen $A_\mu(x)$ zu $A_0(x)$. Für die Functionen $B_\mu(y)$ lässt

sich nun ebenfalls ein dem eben aufgestellten analoges Additionstheorem entwickeln.

Es ist:

$$\frac{1}{y-x-z} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} B_\mu(y)\, A_\mu(x+z)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \alpha_{\mu+1} B_\mu(y) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu(x)\left[e^{zu}\psi_\mu(u) f_{\nu+1}(u)\right]_{u=1}.$$

Man hat aber auch anderseits:

$$\frac{1}{y-x-z} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} B_\mu(y-z)\, A_\mu(x)$$

und daher wegen der über die Natur der Functionen $A_\mu(x)$ gemachten Voraussetzungen:

$$B_\mu(y-z) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \alpha_{\lambda+1} B_\lambda(y)\left[e^{zu}\psi_\mu(u) f_{\lambda+1}(u)\right]_{u=1}$$

oder:

$$B_\mu(y-z) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \alpha_{\lambda+1} B_\lambda(y)\left\{c_{\mu,\lambda} A_\mu(z) + \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu} \left[\beta_{\mu,\lambda,\rho} A_{\mu+\rho}(z) + \gamma_{\mu,\lambda,\rho} A_{\mu-\rho}(z)\right]\right\}. \qquad 5)$$

Für $\mu = 0$ erhält man:

$$B_0(y-z) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} B_\lambda(y)\, A_\lambda(z). \qquad 6)$$

In diesen Formeln ist das von mir früher auf einem anderen Wege für die Bessel'schen Functionen zweiter Art $O_{(x)}^{(n)}$ abgeleitete Additionstheorem:

$$O^{(n)}(y+z) = O^{(0)}(y)\, J^n(z) + \sum_{\rho=0}^{\rho=\infty} \left[J^{n-\rho-1}(z) + (-1)^{\rho+1} J^{n+\rho+1}(z)\right] O^{(\rho+1)}(y)$$

als specieller Fall enthalten („Zur Theorie der Bessel'schen Functionen zweiter Art", Sitzungsberichte der kais. Akademie der

Wissenschaften, mathem.-naturw. Classe, 64. Band, II. Abtheilung, Juli-Heft 1872).

Die Bessel'schen Functionen erster Art besitzen aber ausser dem, durch die Gleichung 1) dargestellten Additionstheoreme noch ein allgemeineres, welches sich auf das Argument:

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\varphi}$$

bezieht. Für die Bessel'schen Functionen von der Ordnung $\frac{1}{2}$ findet sich dieses allgemeinere Additionstheorem schon in der Abhandlung des Herrn A. Clebsch: „Über die Reflexion an einer Kugelfläche" (Journal für die reine und angewandte Mathematik von Borchardt, 61. Band); Herr Carl Neumann hat dasselbe für die Bessel'sche Function von der Ordnung Null in seiner interessanten Schrift: „Theorie der Bessel'schen Functionen" aufgestellt; endlich hat Herr E. Heine in der Abhandlung: „Die Fourier-Bessel'sche Function" (Journal für die reine und angewandte Mathematik von Borchardt, 69. Band) einen neuen Beweis des Clebsch'schen und Neumann'schen Theorems mitgetheilt und zugleich das Additionstheorem für alle Bessel'schen Functionen erster Art, deren Index ein Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist, abgeleitet. In der Abhandlung: „Über die Bessel'schen Functionen" (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. mathem.-naturw. Classe, 69. Band, II. Abtheilung, pag, 124 ff.) habe ich das erwähnte allgemeine Additionstheorem für die Bessel'schen Functionen aller Ordnungen mit Hilfe der Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher dieselben genügen, abgeleitet. In der eben angeführten Abhandlung werden die Functionen $C_n^\nu(\cos\vartheta)$ als die Coëfficienten der Entwicklung der Function $(1 - 2\alpha\cos\vartheta + \alpha^2)^{-\nu}$ nach steigenden Potenzen von α definirt. Für $\nu = 0$ verwandelt sich die Function $\frac{1}{\nu} C_n^\nu(\cos\vartheta)$ in $\frac{2}{n}\cos n\vartheta$, wie sich unmittelbar aus der Betrachtung der Coëfficienten derselben ergibt. Es können demnach diese Functionen für $\nu = 0$ als die Coëfficienten der Entwicklung von

$$-\log(1 - 2\alpha\cos\vartheta + \alpha^2)$$

nach steigenden Potenzen von α angesehen werden. Die von mir mitgetheilte Formel enthält daher, auch wenn die Functionen $C_n^\nu(x)$ als Entwicklungscoëfficienten definirt werden, die Neumann'sche Formel als speciellen Fall. Die von mir bewiesene Formel hat später Herr Sonine in der Arbeit: „Recherches sur les fonctions cylindriques“ (Mathematische Annalen, 16. Band) neuerdings abgeleitet. In neuester Zeit hat endlich Herr Eugenio Beltrami in seiner Abhandlung: „Sulle funzioni cilindriche“ (Atti della R. Accademia di Torino 1881) einen eleganten Beweis des Neumann'schen Additionstheorems geliefert.

Der Umstand, dass die Bessel'schen Functionen erster Art ausser dem allen Entwicklungscoëfficienten von $e^{\alpha x i}$ nach den Näherungsnennern regulärer Kettenbruchentwicklungen gemeinsamen Additionstheoreme 2) ein anderes, allgemeineres besitzen, welches sich auf das Argument $\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi}$ bezieht, zeigt, dass eine besondere Eigenschaft der Functionen $C_n^\nu(x)$ die Ursache der Existenz dieses allgemeineren Theorems ist. Diese Eigenschaft der Functionen $C_n^\nu(x)$ ist das von mir aufgestellte Additionstheorem derselben, welches durch die Gleichung:

$$C_n^\nu(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi)=\Pi(2\nu-2)\left[\frac{2^n\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(\nu-1}\right]^2\sum_{\rho=0}^{\rho=n}(-1)^\rho\frac{2\nu+2\rho-1}{\Pi(n-\rho)\,\Pi(2\nu+n+\rho-1)}\cdot$$
$$C_n^{\nu,\rho}(\cos\alpha)\,C_n^{\nu,\rho}(\cos\beta)\,C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi), \qquad 7)$$

wo:

$$C_n^{\nu,\rho}(x)=\frac{\Pi(n-\rho)\,\Pi(\nu+\rho-1)}{2^{n-\rho}\,\Pi(n+\nu-1)}\,C_{n-\rho}^{\nu+\rho}(x)$$

ist, ausgedrückt wird.

Setzt man nämlich in der Gleichung:

$$C_n^{\nu,\rho}(x)=\frac{\Pi(\rho)\,\Pi(2\nu-2)\,\Pi(n-\rho)\,\Pi(2\nu+\rho+n-1)}{2^{n+2\nu-1}\,\Pi(n)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(2\nu+\rho-2)}\int_0^\pi(x+\cos\vartheta\sqrt{x^2-1})^n C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta)\sin^{2\nu-1}\vartheta\,d\vartheta$$

$x = \cos\frac{\chi}{n}$ und bestimmt den Werth des Productes $\frac{2^n}{n^\nu} C_n^{\nu,\rho}\left(\cos\frac{\chi}{n}\right)$ für unendlich wachsende n, so erhält man:

$$\lim._{n=\infty} \frac{2^n}{n^\nu} C_n^{\nu,\rho}\left(\cos\frac{\chi}{n}\right) =$$

$$= \frac{\Pi(\rho)\,\Pi(2\nu-2)}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi(2\nu+\rho-2)} \int_0^\pi e^{i\chi\cos\vartheta} C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta)\sin^{2\nu-1}\vartheta\, d\vartheta$$

oder:

$$\lim._{n=\infty} \frac{2^n}{n^\nu} C_n^{\nu,\rho}\left(\cos\frac{\chi}{n}\right) = \frac{i^\rho\sqrt{\pi}}{2^{\frac{2\nu-1}{2}}}\,\chi^{-\frac{2\nu-1}{2}} J^{\rho+\frac{2\nu-1}{2}}(\chi).$$

Schreibt man nun in der Gleichung 7) für $\nu : \nu + \frac{1}{2}$, für α und β, beziehungsweise $\frac{\alpha}{n}$ und $\frac{\beta}{n}$, multiplicirt sodann mit $\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{n^{2\nu}\sqrt{\pi}}$ und geht zur Grenze für unendlich wachsende n über, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die Gleichung:

$$(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^{-\frac{\nu}{2}} J^\nu\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi}\right) =$$
$$= 2^\nu\Pi(\nu-1)\sum_{\rho=0}^{\rho=\infty}(\rho+\nu)(\alpha\beta)^{-\nu}J^{\rho+\nu}(\alpha)J^{\rho+\nu}(\beta)C_\rho^\nu(\cos\varphi), \qquad 8)$$

welche das oben erwähnte allgemeine Additionstheorem der Bessel'schen Functionen erster Art ausdrückt.

Will man Grenzübergänge vermeiden, so kann man zunächst mit Hilfe der Gleichung 7) die Formel:

$$\int_0^\pi e^{\alpha i\cos\varphi\cos\psi} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\alpha\sin\varphi\sin\psi) C_n^\nu(\cos\varphi)\sin^{\frac{2\nu+1}{2}}\varphi\, d\varphi =$$
$$= i^n\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}\left[\frac{2^{2\nu}\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\Pi(\nu)}{\Pi(2\nu)}\right]^2 \cdot \sin^{\frac{2\nu+1}{2}}\psi\, C_n^\nu(\cos\psi) J^{n+\nu}(\alpha) \qquad 9)$$

beweisen. Setzt man in dieser Formel:

$$n = 0, \quad \alpha\cos\psi = x, \quad \alpha\sin\psi = y,$$

so verwandelt sich dieselbe in:

$$\int_0^{\pi} e^{x i \cos\varphi} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(y\sin\varphi)\sin^{\frac{2\nu+1}{2}}\varphi d\varphi =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi y}}\left[\frac{2^{2\nu}\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\Pi(\nu)}{\Pi(2\nu)}\right]^2\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^{\nu} J^{\nu}(\sqrt{x^2+y^2}). \qquad 10)$$

Multiplicirt man nun die Gleichung 9) mit $e^{-\beta i\cos\psi}\sin^{\frac{2\nu+1}{2}}\psi d\psi$ und integrirt in Bezug auf ψ von 0 bis π, so erhält man unter Berücksichtigung der Relation 10) die Formel:

$$\int_0^{\pi}(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi})C_n^{\nu}(\cos\varphi)\sin^{2\nu}\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{2^{\nu+1}\nu\Pi(\nu)\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)}\cdot\left[\frac{2^{\nu}\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu)}\right]^2 (\alpha\beta)^{-\nu} J^{n+\nu}(\alpha) J^{n+\nu}(\beta) \qquad 11)$$

aus welcher sich sofort die Gleichung 8) ableiten lässt.

Es soll nun gezeigt werden, dass ein dem eben für die Bessel'schen Functionen erster Art abgeleiteten ähnliches Additionstheorem für alle Functionen besteht, welche bei der Entwicklung von e^{azi} nach solchen Näherungsnennern regulärer Kettenbruchentwicklungen auftreten, für welche ein dem Additionstheoreme der Functionen $C_n^{\nu}(x)$ analoges Theorem existirt.

Die Näherungsnenner und Restfunctionen der regulären Kettenbruchentwicklungen der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Functionen $f(x)$ und $\overline{f}(x)$ seien beziehungsweise $\psi_\lambda(x)$, $f_\lambda(x)$ und $\overline{\psi}_\lambda(x)$, $\overline{f}_\lambda(x)$, die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilnennern α_λ und $\overline{\alpha}_\lambda$ und es bestehe die Relation:

$$\psi_\lambda\{x x_1 + z\vartheta(x)\vartheta(x_1)\} = \sum_{\rho=0}^{\rho=\lambda} c'_{\lambda,\rho}\,\psi_{\lambda,\rho}(x)\psi_{\lambda,\rho}(x_1)\bar{\psi}_\rho(z) \qquad 12)$$

wo:

$$\psi_{\lambda,0}(y) = \psi_\lambda(y)$$

sein soll, und aus den Relationen:

$$\alpha x_1 = p$$
$$\alpha \vartheta(x_1) = q$$

sich die Gleichung:

$$\alpha = \omega(p, q)$$

ergeben möge.

Man hat:

$$\overline{A}_\mu(\alpha \vartheta(x)\vartheta(x_1)) = \bar{\alpha}_{\mu+1}\left[e^{\alpha x i \vartheta(x)\vartheta(x_1)}\overline{f}_{\mu+1}(z)\right]_{z=1}$$

und daher:

$$\left[e^{\alpha x x_1 i}\overline{A}_\mu(\alpha \vartheta(x)\vartheta(x_1))\, f_{\nu+1}(x)\right]_{x=1} =$$
$$= \bar{\alpha}_{\mu+1}\left[f_{\nu+1}(x)\left[e^{\alpha i\{x x_1 + z\vartheta(x)\vartheta(x_1)\}}\overline{f}_{\mu+1}(z)\right]_{z=1}\right]_{x=1}$$

Nun ist aber:

$$e^{\alpha i\{x x_1 + z\vartheta(x)\vartheta(x_1)\}} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} A_\lambda(\alpha)\psi_\lambda\{x x_1 + z\vartheta(x)\vartheta(x_1)\}$$

und daher nach dem durch die Relation 12) ausgedrückten Additionstheoreme der Functionen $\psi_\lambda(x)$:

$$\bar{\alpha}_{\mu+1}\left[e^{\alpha i\{x x_1 + z\vartheta(x)\vartheta(x_1)\}}\overline{f}_{\mu+1}(z)\right]_{z=1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c'_{\lambda,\mu} A_\lambda(\alpha)\psi_{\lambda,\mu}(x)\psi_{\lambda,\mu}(x_1).$$

Es ist also:

$$\left[e^{\alpha x x_1 i}\overline{A}_\mu(\alpha \vartheta(x)\vartheta(x_1))f_{\nu+1}(x)\right]_{x=1} =$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c'_{\lambda,\mu} A_\lambda(\alpha)\psi_{\lambda,\mu}(x_1)\left[\psi_{\lambda,\mu}(x)f_{\nu+1}(x)\right]_{x=1}$$

Setzt man in dieser Formel $\mu = 0$ und beachtet, dass:

$$[\psi_\lambda(y)f_{\nu+1}(y)]_{y=1} = \delta_{\lambda,\nu}\,(\delta_{\lambda,\nu} = 0, \lambda \gtrless 0;\ \delta_{\lambda,\lambda} = 1)$$

ist, so erhält man:

$$\left[e^{\alpha x x_1 i}\overline{A}_0(\alpha \vartheta(x)\vartheta(x_1))f_{\nu+1}(x)\right]_{x=1} = c'_{\nu,0} A_\nu(\alpha)\psi_\nu(x_1). \qquad 13)$$

Für $\nu = 0$ verwandelt sich diese Gleichung, falls man:

$$\alpha x_1 = p$$
$$\alpha \vartheta(x_1) = q$$

setzt, in die folgende:

$$\left[e^{xpi}\overline{A}_0(q\,\vartheta(x))f_1(x)\right]_{x^{-1}} = c'_{0,0}A_0\{\omega(p,q)\}. \qquad 14)$$

Aus 13) erhält man, wenn man mit $e^{\beta i x_1}f_1(x_1)$ multiplicirt und den Coëfficienten von x_1^{-1} bestimmt, die Relation:

$$\left[e^{\beta i x_1}f_1(x_1)\left[e^{\alpha i x x_1}\overline{A}_0(\alpha\,\vartheta(x)\vartheta(x_1))f_{\nu+1}(x)\right]_{x^{-1}}\right]_{x_1^{-1}} =$$

$$= c'_{\nu,0}A_\nu(\alpha)\left[e^{x_1\beta i}\psi_\nu(x_1)f_1(x_1)\right]_{x_1^{-1}}$$

oder wegen der Relation:

$$\left[y^\tau\psi_\nu(y)f_1(y)\right]_{y^{-\sigma}} = \left[y^\tau\psi_0(y)f_{\nu+1}(y)\right]_{y^{-\sigma}}$$

$$\left[f_{\nu+1}(x)\left[e^{x_1 i\{\alpha x+\beta\}}\overline{A}_0(\alpha\,\vartheta(x)\vartheta(x_1))f_1(x_1)\right]_{x_1^{-1}}\right]_{x^{-1}} =$$

$$= \frac{c'_{\nu,0}}{\alpha_{\nu+1}}A_\nu(\alpha)\,A_\nu(\beta).$$

Nach 14) ist aber:

$$\left[e^{x_1 i\{\alpha x+\beta\}}\overline{A}_0\{\alpha\,\vartheta(x)\vartheta(x_1)\}f_1(x_1)\right]_{x_1^{-1}} = c'_{0,0}A_0\{\omega(\alpha x+\beta,\,\alpha\vartheta(x))\}$$

und daher verwandelt sich die letzte Gleichung in:

$$\left[A_0\{\omega(\alpha x+\beta,\,\alpha\vartheta(x))\}f_{\nu+1}(x)\right]_{x^{-1}} = \frac{c'_{\nu,0}}{c'_{0,0}\alpha_{\nu+1}}A_\nu(\alpha)A_\nu(\beta).$$

Man hat daher die Entwicklung:

$$A_0\{\omega(\alpha x+\beta,\,\alpha\vartheta(x))\} = \frac{1}{c'_{0,0}}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}c'_{\nu,0}A_\nu(\alpha)A_\nu(\beta)\psi_\nu(x). \qquad 15)$$

Diese Formel, welche das allgemeine Additionstheorem der Functionen $A_0(\alpha)$ ausdrückt, enthält, wie man sofort sieht, das oben mitgetheilte allgemeinere Additionstheorem der Bessel'schen Functionen erster Art als speciellen Fall.

Ist x_0 eine Wurzel der Gleichung:

$$\vartheta(x) = 0$$

so erhält man aus 15), indem man $x = x_0$ setzt:

$$A_0\{\omega(\alpha x_0+\beta,0)\} = \frac{1}{c'_{0,0}}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}c'_{\nu,0}A_\nu(\alpha)A_\nu(\beta)\psi_\nu(x_0).$$

Nun ist aber:

$$\omega(\alpha x, \alpha \vartheta(x)) = \alpha$$

also:

$$\omega(\alpha x_0, 0) = \alpha$$

und daher hat man schliesslich für jede Wurzel x_0 der Gleichung $\vartheta(x) = 0$ die Formel:

$$A_0\left(\alpha + \frac{\beta}{x_0}\right) = \frac{1}{c'_{0,0}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C'_\nu A_\nu(\alpha) A_\nu(\beta) \qquad 16)$$

wo:

$$C'_\nu = c'_{\nu,0} \psi_\nu(x_0)$$

ist.

Über Potenzsummen rationaler Zahlen.

Von **Otto Schier**,
Bürgerschul-Fachlehrer in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Jänner 1882.)

Die Untersuchung der Möglichkeit, durch Summirung n^{ter} Potenzen wieder eine n^{te} Potenz zu erhalten, beschränkte sich bisher auf zwei und drei Zahlen. Es erscheint daher nothwendig, allgemein festzustellen, für welche Exponenten und für wie viel Summanden die Gleichung $a^n+b^n+\ldots+m^n = M^n$ überhaupt bestehen könne.

Die Durchführung des allgemeinen Falles ist jener für die speciellen Fälle analog, basirt auf dem binomischen Lehrsatze und der Congruenz der Zahlen, und soll auch wieder der Kürze wegen $V(N)$ das Symbol für ein Vielfaches von N bedeuten.

Ehe jedoch zur eigentlichen Untersuchung geschritten werden kann, ist es nothwendig, einen Hilfssatz vorauszuschicken.

Es sei n eine ungerade Primzahl und $a, b, c \ldots$ ganze Zahlen von solcher Beschaffenheit, dass sie keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen.

Die Reste dieser Zahlen nach n werden im Allgemeinen mit der Reihe $1, 2 \ldots (n-1)$ übereinstimmen, wobei jedoch nicht ausgeschlossen ist, dass sich einige Reste wiederholen, andere wegfallen.

Die Summe der vollständigen Restreihe

$$\Sigma(r) = r_1+r_2+\ldots+r^{n-1} = 1+2+\ldots+(n-1)$$

ist immer durch n theilbar, denn die Reihe ist eine arithmetische Progression erster Ordnung, deren Summe $\Sigma(r) = n.\frac{n-1}{2}$ ein Multiplum von n ist.

Die Theilbarkeit durch n wird aufgehoben, wenn eine ungerade Anzahl von Gliedern fehlt oder dazukommt, bleibt jedoch erhalten, wenn eine gerade Anzahl fehlt oder dazukommt, derart, dass je zwei vom ersten und letzten Gliede gleichweit abstehen, oder, wenn sich neben der vollständigen Reihe ein Rest $n$mal wiederholt.

Die Summe der n^{ten} Potenzen aller Reste $\Sigma(r^n)$ ist ferner ein Vielfaches von n^2, denn

$$\Sigma(r^n) = 1^n + 2^n + \ldots + (n-2)^n + (n-1)^n.$$

Wegen n als ungerader Zahl heben sich 1^n, $2^n \ldots$ gegenseitig auf, und alle anderen Summanden enthalten n^2. Nach dem Herausheben dieses Factors bleiben

$$1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}$$

ohne n, während die anderen Zahlen noch mit n multiplicirt erscheinen, und da jedes dieser Glieder $\equiv 1 \pmod{n}$ ist, so folgt, dass eine weitere Theilbarkeit durch n nicht bestehen kann.

Bezüglich des Fehlens oder Dazutretens von Gliedern in dieser Reihe gilt das oben Gesagte, nur ist bei $n$maliger Wiederholung eines Gliedes die Summe kein Vielfaches von n^2, sondern erst dann, wenn sich neben der vollständigen Reihe ein und derselbe Rest n^2mal wiederholt.

Durchlaufen die Reste nicht alle Werthe von 1 bis $(n+1)$ und ist ihre Summe doch $V(n)$, so bleibt in der Reihe ihrer n^{ten} Potenzen nach dem Herausheben von n^2 ein durch n weiter nicht theilbarer Rest, der mit jenem Factor übereinstimmt, mit dem n multiplicirt werden muss, um die Summe der Reste in der ersten Potenz zu geben. Ist demnach $\Sigma(r) = n.\sigma$, so ist

$$\frac{\Sigma(r^n)}{n^2} \equiv -\sigma \bmod (n).$$

Bereits bei der Untersuchung der Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = U^n$$

(LXXXII. Bd. d. Sitzb. 1880) wurde gezeigt, dass für eine ungerade Primzahl n die Gleichung nur dann bestehen kann, wenn U ein $V(n)$ ist.

Es lässt sich nun darthun, dass bei einer grösseren Anzahl von Summanden dieselbe Forderung besteht, und wird der Beweis hiefür strenge erbracht sein, wenn man die Nothwendigkeit für vier Zahlen erweisen kann, auf Grund von Relationen, die auch bei einer grösseren Anzahl für die Lösung massgebend sind.

Es seien u, x, y, z und Z von einander unabhängige Zahlen, die der Bedingung entsprechen sollen:

$$u^n + x^n + y^n + z^n = Z^n, \qquad 1)$$

so ist nach dem für Primzahlen bestehenden Gesetze

$$u^n + x^n + y^n + z^n - Z^n = u + x + y + z - Z \bmod (n)$$

und da die linke Seite der Congruenz $=0$, daher auch $\equiv 0$ mod (n) ist, so muss auch

$$u + x + y + z - Z \equiv 0 \bmod (n)$$

sein, was bei dem Umstande, dass $u + x + y + z > Z$ nur für

$$u + x + y + z = Z + n\delta \qquad 2)$$

möglich ist.

Werden auf der linken Seite je zwei Glieder zu einem Binome vereinigt, und auf beiden Seiten zur n^{ten} Potenz erhoben

$$[(u+x)+(y+z)]^n = (Z+n\delta)^n,$$

entwickelt

$$u^n + \binom{n}{1}u^{n-1}x + \ldots + \binom{n}{1}ux^{n-1} + x^n + \binom{n}{1}(u+x)^{n-1}(y+z) + \ldots$$
$$+ \binom{n}{1}(u+x)(y+z)^{n-1} + y^n + \binom{n}{1}y^{n-1}z + \ldots + \binom{n}{1}yz^{n-1} + z^n =$$
$$= Z^n + \binom{n}{1}Z^{n-1}n\delta + \ldots + \binom{n}{1}Zn^{n-1}\delta^{n-1} + n^n\delta^n.$$

Wegen (I verschwinden u^n, x^n, y^n, z^n und Z^n, und alle anderen Glieder lassen sich durch n kürzen, wodurch nach Zusammenziehung der Glieder mit gleichen Coëfficienten die Gleichung die Form bekommt:

$$ux(u^{n-2} + x^{n-2}) + \frac{n-1}{2}u^2x^2(u^{n-4} + x^{n-4}) + \ldots +$$
$$+ (u-x)(y+z)[(u+x)^{n-2} + (y+z)^{n-2}] + \frac{n-1}{2}(u+x)^2(y+z)^2 \cdot$$
$$[(u+x)^{n-4} + (y+z)^{n-4}] + \ldots + yz(y^{n-2} + z^{n-2}) + \ldots +$$
$$+ \frac{n-1}{2}y^2z^2(y^{n-4} + z^{n-4}) + \ldots =$$
$$= Z^{n-1}n\delta + \ldots + Zn^{n-1}\delta^{n-1} + n^{n-1}\delta^n. \qquad 3)$$

Die rechte Seite der Gleichung enthält nochmals den Factor n, es muss ihn daher auch die linke Seite nochmals haben, was aber nur dann möglich ist, wenn $(u+x)$ und $(y+z)$ durch n theilbar sind. Diese Theilbarkeit findet statt, wenn: 1. jede der Zahlen n enthält, oder 2. wenn u und x, y und z gleiche, aber entgegengesetzt bezeichnete Reste nach n geben.

Enthielte jede der Zahlen n, wäre also

$$(n\alpha)^n+(n\beta)^n+(n\gamma)^n+(n\varepsilon)^2 = (n\varphi)^n,$$

so erhielte man

$$\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\varepsilon^n = \varphi^n \qquad 4)$$

eine Gleichung, bei deren Analyse man wieder zu dem Resultate käme, dass jede der Zahlen ein $V(n)$ sein müsse u. s. w. Demnach eine Reihe von Forderungen, denen nicht entsprochen werden kann, und die die Gleichung unmöglich machen.

Es muss demnach angenommen werden, dass die Summe $u+x+y+z = nk$ ist, wodurch wegen (II auch Z als ein $V(n)$ erscheint.

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man in der Entwicklung von (II nicht je zwei Glieder zusammenfasst, sondern drei vereinigt und eines allein lässt, oder das Polynom als solches zur n^{ten} erhebt etc.

Weiter ist auch bei mehr als vier Summanden für die Möglichkeit der Gleichung die Nothwendigkeit ersichtlich, dass die Summe der ersten Potenzen ein Multiplum von n sei, und findet, bei der Annahme theilerfremder Zahlen, diese Forderung dadurch den allgemeinsten Ausdruck, dass angenommen wird, die Zahlen geben nach n Reste, die sich zu einem $V(n)$ ergänzen.

Es seien $a, b \ldots . m$ relative Primzahlen, und es soll untersucht werden, ob für eine ungerade Primzahl n

$$a^n+b^n+\ldots .+m^n = M^n$$

sein könne.

Nach dem Vorausgeschickten ist

$$a = \alpha n+r_1 \quad b = \beta n+r_2 \ldots . \quad m = \mu n+r_m, \quad M = nP$$

und

$$r_1+r_2+\ldots .+r_m = V(n), \qquad 6)$$

daher

$$(\alpha n+r_1)^n+(\beta n+r_2)^n+\ldots+(\mu n+r_m)^n = n^n P^n$$

und entwickelt und die Glieder nach n geordnet:

$$n^n(\alpha^n+\beta^n+\ldots+\mu^n)+\binom{n}{1}n^{n-1}(\alpha^{n-1}r_1+\beta^{n-1}r_2+\ldots+$$
$$+\mu^{n-1}r_m)+\ldots+\binom{n}{1}n(\alpha r_1^{n-1}+\beta r_2^{n-2}+\ldots+\mu r_m^{n-1})+$$
$$+(r_1^n+r_2^n+\ldots+r_m^n) = n^n P^n \qquad 7)$$

In dieser Gleichung muss die linke Seite durch n^{n-1} theilbar sein, und sind hiefür hauptsächlich jene Glieder massgebend, in denen der Factor n in den niedrigeren Potenzen erscheint.

Durch n^2 sind alle Glieder theilbar, da nach dem Hilfssatze $\Sigma(r^n) = V(n^2)$ ist; die Theilbarkeit durch n^3 hängt von den beiden letzten Gliedern ab.

Im vorletzten Gliede haben die Glieder innerhalb der Klammer die Factoren r_1^{n-1}, $r_2^{n-1}\ldots$, von denen jedes einzelne $\equiv 1$ mod (n) ist, daher ist

$$\alpha r_1^{n-1}+\beta r_2^{n-1}+\ldots+\mu r_m^{n-1} \equiv \alpha+\beta+\ldots+\mu \bmod (n).$$

Ferner ist, wenn $\Sigma(r) = n.\sigma$ ist, $\frac{\Sigma(r^n)}{n^2} \equiv -\sigma \bmod (n)$, es muss also, um die Summe der beiden letzten Glieder durch n^3 theilbar zu machen

$$\alpha+\beta+\ldots+\mu \equiv \sigma \bmod (n) \text{ sein.}$$

Hiedurch erfährt jedoch 6) eine Änderung, die mit der Annahme im Widerspruch steht, denn es ist dann

$$a+b+\ldots+m = n(\alpha+\beta+\ldots+\mu)+(r_1+r_2+\ldots+r_m) =$$
$$= n(np-\sigma)+n\sigma = n^2 p$$

und würde $(a+b+\ldots+m)^n = (n^2p)^n$ ähnlich wie 3) entwickelt, so könnte der Gleichung nur durch solche Werthe von $a, b\ldots$. Genüge geleistet werden, in denen $r_1\, r_2\ldots.0$ werden und man käme zu einem Resultate, dessen Unhaltbarkeit bereits in 4) dargethan wurde.

Mit Rücksicht auf diese Consequenzen ist der Widerspruch nur dadurch zu beheben, dass angenommen wird, n^{n-1} fällt mit n^2 zusammen; hiedurch wird $n = 3$, und die Möglichkeit der Gleichung $a^n+b^n+\ldots+m^n = M^n$ beschränkt sich nur auf die ungerade Primzahl drei.

In der Gleichung $a^3+b^3+\ldots\ldots+m^3=M^3$ können nur Zahlen erscheinen, die nach 3 die Reste 1 und 2 (oder -1) haben, eine von ihnen kann auch den Rest 0 besitzen, immer müssen sie jedoch so angenommen werden, dass ihre Summe ein $V(3)$ ist.

Am wichtigsten ist die Untersuchung jenes Falles, wo sich die Restreihe zweimal wiederholt, weil das für diesen Erwiesene auch bei öfterer Wiederholung gilt. Es sei

$$a=3\alpha-1,\quad b=3\beta+1,\quad c=3\gamma-1,\quad d=3\delta+1,\quad M=3P,$$

so ist

$$(3\alpha-1)^3+(3\beta+1)^3+(3\gamma-1)^3+(2\delta+1)^3=3^3P^3.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn $\alpha+\beta+\gamma+\delta=V(3)$ wird, wodurch sich der oben behandelte Fall wiederholt und die Summe der ersten Potenzen nicht als Vielfaches von 3, sondern als ein solches von 3^2 gefordert wird, wodurch die Gleichung unmöglich wird.

Für die Primzahl 2 ist der Fall so einfach, dass eine eingehende Behandlung überflüssig erscheint, denn es ist auf den ersten Blick zu erkennen, dass es nicht 3 oder mehr relative Primzahlen geben kann, deren Quadrate zusammen wieder ein Quadrat geben.

Mit Bezugnahme auf die in den zwei früheren Abhandlungen (LXXXI. Bd. und LXXXII. Bd. der Sitzb. 1880) gefundenen Resultate lassen sich demnach über die Potenzsummen ganzer Zahlen folgende Lehrsätze aufstellen:

1. Die Summe zweier Quadrate kann wieder ein Quadrat geben.
2. Die Summe dreier Cuben gibt in einem einzigen Falle wieder einen Cubus.
3. In keinem anderen Falle ist die Summe zweier oder mehrerer n^{ter} Potenzen wieder eine n^{te} Potenz.

VII. SITZUNG VOM 9. MÄRZ 1882.

Herr Dr. L. J. Fitzinger führt als Alterspräsident den Vorsitz.

Herr Dr. Emil Holub übermittelt ein Exemplar seines in Gemeinschaft mit Herrn August v. Pelzeln, Custos des k. k. zoologischen Hofcabinetes, herausgegebenen Werkes: „Beiträge zur Ornithologie Südostafrikas."

Das w. M. Herr Prof. E. Hering in Prag übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Beiträge zur allgemeinen Nerven- und Muskelphysiologie aus dem physiologischen Institute zu Prag. IX. Mittheilung. Über Nervenreizung durch den Nervenstrom."

Das c. M. Herr Prof. E. Weyr in Wien übersendet eine Abhandlung: „Über Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen Curve."

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Th. Ritter v. Oppolzer übersendet eine Abhandlung des Herrn Robert Schram, Observator der k. k. Gradmessung in Wien, betitelt: „Hilfstafeln für Chronologie."

Der Secretär legt eine Abhandlung: „Über quadratische Verwandtschaftsbeziehungen in einem durch fünf Bedingungen fixirten Kegelschnitte und eine hieraus gefolgerte Axenconstruction bei gegebenen conjugirten Bestimmungsstücken", von Herrn Wilhelm Binder, Professor an der n.-ö. Landes-Oberreal- und Maschinenschule in Wiener Neustadt, vor.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine vorläufige Mittheilung über eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn L. Haitinger „Über Glutaminsäure und Pyrrol."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 2e série, 46e année. Tome XI. Nrs. 5—9, Paris, 1882; 8°.

— Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique: Annuaire, 1882. 48e année. Bruxelles, 1882; 8°.

— — Bulletin. 50e année, 3e série, tome 2. Nr. 12. Bruxelles, 1881; 8°.

— de science royale: Öfversigt af Förhandlingar. 38de Arg. 1881. N: ris 60. 7. Stockholm, 1881; 8°.

Accademia, R. delle Scienze di Torino: Atti. Vol. XVII, Disp. 1a (Novembre-Dicembre 1881) Torino; 8°.

— Gioenia di scienze naturali in Catania: Atti. Serie terza — tomo XIII. Catania, 1879; 4°. — Tomo XIV. Catania, 1879; 4°. — Tomo XV. Catania, 1881; 4°.

Akademie der Wissenschaften, königl. Preussische zu Berlin: Monatsbericht. December, 1881. Berlin, 1882; 8°.

— — Der Tempel der Athena Polias zu Pergamon von Richard Bohn. Berlin, 1881; 4°. — Ueber ein chinesisches Mengwerk, nebst einem Anhang linguistischer Verbesserungen zu zwei Bänden der Erdkunde Ritters von W. Schott. Berlin, 1881; 4°. Über die Weddas von Ceylon und ihre Beziehungen zu den Nachbarstämmen von R. Virchow. Berlin, 1881; 4°. — Ueber die Messung psychischer Vorgänge von E. Zeller. Berlin, 1881; 4°.

— — k. b. zu München: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe, 1882. Heft I. München, 1882; 8°.

— der Wissenschaften zu Krakau: Lud. Ser. XIV, 6. Heft. Krakow, 1881; 8°.

— — Katalog rękopisów biblijoteki universytetu Jagiellońskiego. Zeszyt 7 & 8 i ostatni. Krakow, 1881; 8°.

— — Pamiętnik. Tom szósty. W Krakowie, 1881; 4°.

Apotheker-Verein, allg. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XX. Jahrgang Nr. 7. Wien, 1882; 8°.

British Museum: Catalogue of the birds. Vol. VI. London, 1881; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VI, Nr. 10. Cöthen, 1882; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCIV. Nr. 8. Paris, 1882; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. III. Jahrgang 1882. II. Heft. Berlin, 1882; 4°.

Gesellschaft, astronomische: Vierteljahrsschrift. XVI. Jahrgang. 4. Heft, Leipzig, 1881; 8°. — XVII. Jahrgang. 1. Heft. Leipzig, 1882; 8°.

— Deutsche chemische: Berichte. XV. Jahrgang Nr. 3. Berlin, 1882; 8°.

— deutsche entomologische: Zeitschrift. XXVI. Jahrgang (1882) I. Heft. Berlin, London, Paris, 1882; 8°.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXV. (n. F. XV.) Nr. 1. Wien, 1882; 8°.

— Festschrift aus Veranlassung der fünfundzwanzigjährigen Jubelfeier im December 1881 von Dr. J. Chavannne. Wien, 1881; 8°.

— der Wissenschaften zu Leipzig: Uber die peripolaren Coordinaten Nr. V von C. Neumann. Leipzig, 1880; 4°. Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte Nr. VI von C. Neumann. Leipzig, 1880; 4°. — Supplement zur Abhandlung über die Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. Nr. II*a* von W. Scheibner. Leipzig, 1880; 4°.

— Berichte, 1880. I. u. II. Leipzig, 1880—81: 8°.

— Oberhessische für Natur- und Heilkunde. XX. Bericht. Giessen, 1881; 8°.

Governo, J. R. marittimo in Trieste e Governo R. marittimo in Fiume: Annuario marittimo per l'anno 1882. XXXII. Annata. Trieste, 1882; 8°.

Hydrographisches Amt k. k.: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Vol. X Nr. 1 & 2. Pola, 1882; 8°.

Instituto geografico y estadistico; Memorias. Tomo III. Madrid, 1881; 8°.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie für 1880. II. Heft. Giessen, 1881; 8°.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band 25, 3. Heft. Leipzig 1882; 8°.

— the American of Otology. Vol. IV. Nr. 1, January, 1882. Boston; 8°.

Journal the American of Science. 3d séries. Vol. XXIII. Nr. 134. February 1882. New. Haven 1882; 8°.

Kriegsmarine, k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und hydrographische Nachrichten. Jahrgang 1882. Heft 1. Pola. 1882; 8°.

Militär Comité, technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Jahrgang 1882. I. Heft. Wien, 1882; 8°.

Moniteur scientifique du Dr. Quesneville: Journal mensuel. 26e année, 3e série. Tome XII. 482e et 483e. livraisons. Fevrier et Mars 1882. Paris; 8°.

Nature. Vol. XXV. Nr. 644. London, 1882; 8°.

Observatory, The: A monthly review of astronomy. Nrs. 58 & 59. London, 1882: 8°.

Société botanique de France: Bulletin. Tome XXVIII. Comptes rendus des séances. 5. Paris, 1881; 8°. — Revue bibliographique D. Paris, 1881; 8°.

— mathematique de France: Bulletin. Tome IX, Nr. 5. Paris, 1881; 8°.

— des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux, 4e série, 34e année, 12e cahier. Paris, 1881; 8°.

— Impériale des Naturalistes de Moscou: Nouveaux Mémoires. Tome XIV. Livraison 2. Moscou 1881; 4°.

— — Bulletin. Année 1881. Nr. 2. Moscou, 1881; 8°.

Society, the American geographical of New-York: Journal. Vol. XI & XII. New-York, 1879 & 1880; 8°.

— — Bulletin. 1881. Nr. 2. New-York 1881; 8°.

— the literary and philosophical of Liverpool: Proceedings during the sixtyseventh session 1877—78. Nr. XXXII. London, Liverpool, 1878; 8°.

— the royal microscopical: Journal: Ser. II. Vol. II. Part 1. February 1882. London and Edinburgh; 8°.

Verein entomologischer in Stockholm: Entomologisk Tidskrift. Band I. 1881. Heft 3 & 4, Stockholm, 1881—82; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXII. Jahrgang, Nr. 9. Wien, 1882; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. III. Jahrgang Nr. 5. Wien, 1882; 8°. Ausserordentliche Beilagen Nr. 1 & 2. Wien, 1882; 8°. — Jahresbericht 1881—82. Wien, 1882; 8°.

Über Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen cubischen Curve.

Von Emil Weyr.

1. Wenn auf einer Raumcurve dritter Ordnung C_3 eine Punktinvolution n-ten Grades und erster Stufe gegeben ist, so ist der Ort der Verbindungslinien je zweier einer und derselben Gruppe der Involution angehörigen Punkte eine Regelfläche $2(n-1)$-ter Ordnung, für welche die Raumcurve eine $(n-1)$-fache Curve darstellt und welche man als die der Involution entsprechende oder zugehörige Involutionsfläche bezeichnen kann. Die Erzeugenden der Involutionsfläche ordnen sich in $\frac{n(n-1)}{2}$-elementige Gruppen, wie sie eben aus den einzelnen Gruppen der Involution entstehen; $2(n-1)$ Erzeugende der Fläche sind Tangenten der Raumcurve C_3 und berühren sie in den $2(n-1)$ Doppelpunkten der Involution. Die $(n-2)$ Erzeugenden, welche in einer Verzweigungsgruppe die Verzweigungselemente mit dem Doppelelemente verbinden, sind singuläre Erzeugende und die Verzweigungspunkte treten als Cuspidalpunkte der Involutionsfläche auf; solcher Cuspidalpunkte hat man somit $2(n-1)(n-2)$ auf C_3 und durch jeden geht eine singuläre Erzeugende hindurch.

Da zwei Sekanten einer Raumcurve dritter Ordnung, welche sich schneiden, durch denselben Punkt der Curve gehen müssen, so sieht man sofort, dass die Curve C_3 die einzige mehrfache Linie der Involutionsfläche sein wird. Die ebenen Schnitte dieser Fläche sind somit Curven $2(n-1)$-ter Ordnung mit drei $(n-1)$-fachen Punkten (auf C_3 gelegen) und somit vom Geschlechte $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

Die Ebenen, welche man durch je drei einer und derselben Gruppe angehörige Punkte der Involution legen kann, umhüllen

eine Raumcurve $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$-ter Classe, die Involutionscurve. Jede Schmiegungsebene der Involutionscurve schneidet C_3 in einem Tripel der Involution, dessen Verbindungslinien drei Erzeugende der Involutionsfläche darstellen; diese Fläche wird somit von jener Schmiegungsebene noch in einer Curve $(2n-5)$-ter Ordnung geschnitten, welche auf C_3 drei $(n-3)$-fache Punkte besitzt. Hieraus folgt, dass jede Schmiegungsebene der Involutionscurve eine dreifache Tangentialebene der Involutionsfläche ist. Da jede Erzeugende der Involutionsfläche in $(n-2)$ Punktetripeln der Involution vorkommt, so kann man durch jede solche Erzeugende $(n-2)$ dreifach berührende Ebenen der Involutionsfläche legen. Es liegen somit in jeder Schmiegungsebene der Involutionscurve $3(n-2)$ Punkte der Berührungscurve der Involutionsfläche mit der von jenen Schmiegungsebenen gebildeten Developpablen.

Für $n = 2$ ist die Involutionsfläche ein durch C_3 hindurchgehendes Hyperboloid und umgekehrt ist jedes durch C_3 hindurchgelegte Hyperboloid eine Involutionsfläche, da die eine Schaar seiner Erzeugenden auf C_3 eine quadratische Punktinvolution bestimmt.

Für $n = 3$ ist die Involutionsfläche von der vierten Ordnung; die Involutionscurve ist eine Gerade, die Axe des Ebenenbüschels, dessen Ebenen C_3 in den Punkttripeln der cubischen Involution schneiden. Diese Ebenen sind die dreifachen Tangentialebenen der Involutionsfläche.

Wenn auf C_3 statt einer Punktinvolution eine Involution von Schmiegungsebenen gegeben ist, so bestimmen je zwei einer Gruppe angehörigen Ebenen eine Schnittlinie (Axe von C_3) und alle diese Schnittlinien erfüllen eine Regelfläche $2(n-1)$-ter Classe die Involutionsfläche, welcher die Developpable von C_3 $(n-1)$-fach umschrieben ist. Die Schnittpunkte je dreier Ebenen einer und derselben Gruppe der Involutionen erfüllen eine Raumcurve $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$-ter Ordnung, die Involutionscurve u. s. w.

Da man zwei Gruppen einer Involution beliebig wählen kann, so sind die $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ Ebenen irgend zweier einer cubischen Raumcurve eingeschriebener n-Ecke immer Schmie-

gungsebenen einer Raumcurve $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$-ten Classe und die $n(n-1)$ Seiten der beiden n-Ecke sind Erzeugende einer durch die Raumcurve dritter Ordnung $(n-1)$-mal hindurchgehenden Regelfläche $2(n-1)$-ter Ordnung.

2. Für $n = 4$ haben wir auf C_3 eine biquadratische Punktinvolution; jede Gruppe derselben enthält vier Punkte $x_1 x_2 x_3 x_4$, welche ein der Curve C_3 eingeschriebenes Tetraëder bilden. Die Kanten aller dieser Tetraëder erfüllen die Involutionsfläche F_6, welche von der sechsten Ordnung ist mit C_3 als dreifachen Curve. Die Ebenen aller der Tetraëder sind Schmiegungsebenen einer Curve dritter Classe J_3, der Involutionscurve.

Dass durch einen beliebigen Punkt o des Raumes drei Ebenen hindurchgehen, von denen jede ein Punktetripel der biquadratischen Involution enthält, erkennt man in folgender Weise. Die durch den Punkt o gehenden Ebenen bestimmen auf C_3 Punktetripel, welche eine cubische Involution zweiter Stufe bilden; nun hat aber eine solche Involution mit einer conlocalen biquadratischen Involution immer drei gemeinschaftliche Elemententripel,[1] wodurch obige Behauptung und damit der Charakter der Involutionscurve erwiesen ist.

Jede Schmiegungsebene von J_3 schneidet C_3 in einem Punktetripel $x_1 x_2 x_3$ der biquadratischen Involution und der das Quadrupel ergänzende Punkt x_4 erscheint als Schnittpunkt der drei übrigen durch x_1, x_2, x_3 gehenden Schmiegungsebenen von J_3. Es bilden somit die Ebenenquadrupel der Tetraëder $x_1 x_2 x_3 x_4$ eine biquadratische Involution von Schmiegungsebenen der Curve J_3 und C_3 ist die Involutionscurve und F_6 die Involutionsfläche dieser Involution. Die beiden Curven $C_3 J_3$ haben somit die folgende gegenseitige Beziehung: C_3 ist Träger einer biquadratischen Punktinvolution, für welche J_3 Involutionscurve und F_6 Involutionsfläche ist und J_3 ist Träger einer biquadratischen Ebeneninvolution, für welche C_3 Involutionscurve und dieselbe Fläche F_6 Involutionsfläche ist. Die Punkte von C_3 sind dreifache Punkte von F_6 und die Schmiegungsebenen von J_3 sind dreifache

[1] Siehe: „Über Projectivitäten und Involutionen auf rationalen ebenen Curven dritter Ordnung." Sitzungsber. v. 22. Jänner 1880. Art. 22.

Tangentialebenen von F_6; jede Erzeugende von F_6 ist Bisekante von C_3 und Axe (Schnitt zweier Schmiegungsebenen) von J_3.

Die Curven $C_3 J_3$ sind projectivisch auf einander bezogen. Denn, ist x irgend eine Ecke des durch ein Quadrupel der Involution auf C_3 dargestellten Tetraëders und ξ die gegenüberliegende Ebene dieses Tetraëders, so ist x ein Punkt von C_3 und ξ eine Schmiegungsebene von J_3 und man erkennt aus dem eindeutigen Entsprechen von x und ξ sofort die Projectivität des Punktsystemes x mit dem Ebenensysteme ξ.

3. Sobald die biquadratische Involution auf C_3 gegeben ist, erscheint auch J_3 bestimmt; nun ist aber eine Involution vierten Grades und erster Stufe eindeutig bestimmt:[1] *a)* durch zwei Elementenquadrupel, *b)* durch ein Elementenquadrupel, ein Elemententripel und ein Elementenpaar, *c)* durch ein Quadrupel und drei (nicht einem Tripel angehörige) Elementenpaare und schliesslich *d)* durch drei Elemententripel.

Ein Punktepaar der Involution auf C_3 liefert eine Axe der J_3, die Verbindungslinie jenes Punktepaares; ein Tripel der Involution auf C_3 liefert eine Schmiegungsebene der J_3, die Ebene jenes Tripels und ein Axendreiseit der J_3, das Dreiseit der Verbindungslinien jenes Tripels; eine ganze Gruppe (Quadrupel) der Involution liefert ein Schmiegungsebenentetraëder von J_3 und zugleich ein Axentetraeder (sechs Axen) von J_3.

Die Involutionscurve J_3 ist folglich eindeutig bestimmt:

a) durch irgend zwei der Curve C_3 eingeschriebene Schmiegungsebenentetraëder (Axentetraëder);

b) durch ein der C_3 eingeschriebenes Schmiegungsebenen-(Axen)tetraëder, ein der C_3 eingeschriebenes Axendreiseit (eine Schmiegungsebene) und eine Axe, welche Sekante von C_3 ist;

c) durch ein der C_3 eingeschriebenes Schmiegungsebenen-(Axen)tetraëder und drei Axen, welche Sekanten von C_3 sind;

d) durch drei der C_3 eingeschriebene Axendreiseite (durch irgend drei Schmiegungsebenen).

[1] Siehe: „Über biquadratische Involutionen erster Stufe," Sitzungsber. v. 10. Februar 1881, Nr. V.

Aus der letzten Art der Bestimmung ergibt sich die Grundeigenschaft des ganzen Systemes der einer Trägercurve C_3 entsprechenden Involutionscurven: „irgend drei Ebenen des Raumes sind Schmiegungsebenen einer einzigen vollkommen bestimmten Curve J_3."

Zugleich ergibt sich aus der zuletzt angezogenen Stelle: „Zwei beliebige Ebenen als Schmiegungsebenen und zwei Sekanten von C_3 als Axen bestimmen zwei Involutionscurven J_3; durch eine Ebene als Schmiegungsebene und durch vier Sekanten von C_3 als Axen und ebenso durch sechs Sekanten von C_3 als Axen ist die Curve J_3 mehrdeutig bestimmt."

4. Die Erzeugenden der Involutionsfläche sechster Ordnung F_6 erscheinen in Paare geordnet. Ist nämlich X irgend eine Erzeugende von F_6, so ist dieselbe als Verbindungslinie zweier Punkte einer und derselben Gruppe $x_1 x_2 x_3 x_4$ der Involution auf C_3 entstanden; die beiden übrigen Punkte derselben Gruppe verbunden, liefern ebenso eine Erzeugende X' von F_6, welche offenbar mit X gepaart erscheint. Zugleich sieht man, dass die Erzeugenden von F_6 in Sextupel geordnet sind, wie sie als Kanten der einzelnen Tetraëder $x_1 x_2 x_3 x_4$ auftreten und jedes Sextupel enthält drei Erzeugendenpaare, die drei Gegenkantenpaare des betreffenden Tetraëders. Man kann leicht einsehen, dass sich die Geradenpaare XX' so verhalten, wie die Paare eines Systems conjugirter Pole einer Curve dritter Ordnung, während die Erzeugendensextupel von F_6 dem diesem Systeme angehörigen Systeme der der cubischen Curve eingeschriebenen vollständigen Vierseite entsprechen.

Es schneiden nämlich die sämmtlichen Schmiegungsebenen der Curve J_3 irgend eine von ihnen z. B. ξ in den Tangenten eines Kegelschnittes ξ_2, auf welchem offenbar eine biquadratische Tangenteninvolution erster Stufe entstehen wird, wenn man nämlich die vier Tangenten, welche durch die Ebenen des Tetraëders $x_1 x_2 x_3 x_4$ auf ξ bestimmt werden, als ein Quadrupel betrachtet. Die Involutionscurve der auf ξ_2 so entstehenden Tangenteninvolution ist eine ebene Curve dritter Ordnung K_3, offenbar die Schnittcurve der Ebene ξ mit der Fläche F_6. Jedes Tetraëder $x_1 x_2 x_3 x_4$ schneidet ξ in einem der K_3 eingeschriebenen vollständigen Vierseite und je zwei Gegenkanten XX' des

Tetraëders schneiden ξ in zwei correspondirenden Punkten von K_3. Es sollen daher XX' als zwei correspondirende Erzeugende der Fläche sechster Ordnung F_6 bezeichnet werden.

Wählt man auf einer C_3 drei beliebige Punktetripel $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$, $c_1c_2c_3$ als drei Tripel einer biquadratischen Involution, so schneiden sich die drei Ebenen $\alpha\beta\gamma$, welche durch die drei Tripel bestimmt erscheinen, in drei Geraden ABC respective welche durch einen Punkt laufen und Axen der Involutionscurve J_3 sind; dem Dreieck $a_1a_2a_3$ (dessen Seiten auch Axen von J_3 sind) ist ein Kegelschnitt A_2 eingeschrieben, welcher auch B und C berührt; ebenso gibt es einen Kegelschnitt B_2, welcher dem Dreieck $b_1b_2b_3$ eingeschrieben ist und C und A berührt und schliesslich einen Kegelschnitt C_2, welcher A und B und die Seiten des Dreiecks $c_1c_2c_3$ zu Tangenten hat. Jeder dieser Kegelschnitte wird durch seine Ebene aus der Developpablen von J_3 ausgeschnitten.

„Wenn man also diese drei Kegelschnitte in den Ebenen irgend eines Triëders $\alpha\beta\gamma$ bezüglich der Curve C_3 construirt, so besitzen sie alle drei eine gemeinschaftliche Developpable dritter Classe, welche der Involutionscurve J_3 entspricht, die durch die drei Ebenen $\alpha\beta\gamma$ als Schmiegungsebenen nach Artikel 3, *d)* bestimmt erscheint.“

Hierin ist auch eine Art der Vervollständigung der durch irgend drei Elemententripel $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$, $c_1c_2c_3$ bestimmten biquadratischen Involution erster Stufe enthalten.

5. Betrachten wir irgend eine Schmiegungsebene ξ der Involutionscurve J_3, sie schneidet C_3 in einem Punktetripel $x_1x_2x_3$ der Involution vierten Grades, welches mit einem bestimmten Punkte x_4 ein Quadrupel bildet; ξ ist dreifache Tangentialebene der Involutionsfläche F_6 und die drei Berührungspunkte $x'x''x'''$ derselben sind die dritten Schnittpunkte der Geraden x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 mit der Curve K_3, welche ξ noch mit F_6 gemeinschaftlich hat. Je zwei correspondirende Erzeugende von F_6 schneiden ξ in zwei correspondirenden Punkten von K_3 und umgekehrt gehören die durch zwei correspondirende Punkte von K_3 gehenden Sekanten von C_3 einem der Tetraëder $x_1x_2x_3x_4$ als Gegenkanten an. Durch den Punkt x''' geht die Sekante x_1x_2, so dass der zu x'' correspondirende Punkt von K_3 der Schnitt von ξ mit x_3x_4, d. h.

der Punkt x_3 sein muss; ebenso ist x'' zu x_2 und x' zu x_1 correspondirender Punkt. Es sind folglich $x'x_1$, $x''x_2$, $x'''x_3$ die drei Gegeneckenpaare eines der K_3 eingeschriebenen vollständigen Vierseits, d. h. $x'x''x'''$ liegen in einer und derselben Geraden:

„Die drei Berührungspunkte einer dreifachen Tangentialebene der Involutionsfläche F_6 liegen in gerader Linie."

Die Gerade, welche die Punkte $x'x''x'''$ enthält, ist offenbar die in der Ebene ξ liegende Tangente der Involutionscurve J_3; denn die Developpable der J_3 ist der Fläche F_6 dreifach umschrieben und die in einer Ebene ξ liegende Tangente von J_3 muss somit die drei Berührungspunkte von ξ mit F_6 enthalten, so wie die drei Tangentialebenen der F_6 in irgend einem Punkte x_1 der dreifachen Curve C_3 jene Ebenen sind, welche durch die Tangente der Curve C_3 in x_1 und durch die drei Geraden x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4 hindurchgehen, welche den Punkt mit den mit ihm ein Quadrupel bildenden Punkten verbinden.

Der der Fläche F_6 aus irgend einem Punkte des Raumes umschriebene Kegel ist von der sechsten Classe und besitzt die drei durch den Punkt gehenden Schmiegungsebenen der Curve J_3 zu dreifachen Tangentialebenen. Liegt der Kegelscheitel in einem Punkte x_1 der Curve C_3, so zerfällt der Kegel in die drei Ebenenbüschel, deren Axen x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4 sind und in einen Kegel dritter Classe, welcher die durch x_1 gehenden Ebenen des Tetraëders $x_1x_2x_3x_4$ berührt; die durch die Tangente von x_1 gehenden drei Tangentialebenen des Kegels verbinden diese Tangente mit den Geraden x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4. Man sieht auch sofort, dass sich sowohl die Punkte eines ebenen Schnittes von F_6, als auch die Ebenen eines dieser Fläche umschriebenen Kegels in Paare correspondirender Punkte respective Ebenen ordnen, wie sie aus den Paaren correspondirender Erzeugenden hervorgehen.

6. Jedes die Curve C_3 enthaltende Hyperboloid schneidet F_6 in drei Erzeugenden; die Erzeugenden des einen Systemes des Hyperboloides sind zweipunktige Sekanten von C_3 und bestimmen auf C_3 eine quadratische Punktinvolution, welche mit der biquadratischen drei Punktepaare gemeinschaftlich hat, deren Verbindungslinien Erzeugende sowohl der Fläche F_6, als auch des Hyperboloides sind. Der Gesammtschnitt von F_6 mit dem Hyper-

boloide ist von der zwölften Ordnung und besteht aus der dreimal zu zählenden Curve C_3 und jenen drei Erzeugenden, so dass ausser C_3 und den drei Erzeugenden keine weiteren Bestandtheile des Schnittes auftreten.

Ebenso besteht die gemeinschaftliche Developpable der Fläche F_6 und eines der Developpablen von J_3 eingeschriebenen Hyperboloides aus der dreimal zu zählenden Developpablen von J_3 und aus drei Ebenenbüscheln, deren Axen drei Erzeugende von F_6 sind.

Das Tripel der der Fläche F_6 und irgend einem durch C_3 hindurchgehenden (J_3 eingeschriebenen) Hyperboloide gemeinschaftlichen Erzeugenden ist durch zwei derselben vollkommen bestimmt.

Denn sind X, Y irgend zwei Erzeugende von F_6, so gibt es nur ein Hyperboloid, welches C_3, X und Y enthält, und welches somit F_6 noch in einer ganz bestimmten Erzeugenden Z schneiden muss; ebenso gibt es nur ein einziges und zwar dasselbe Hyperboloid, welches der J_3 eingeschrieben ist und XY enthält und dann noch eine dritte Axe Z von J_3 enthalten muss.

Wenn man drei solche Erzeugende XYZ als ein Tripel bezeichnet, so ist also ein Tripel durch zwei seiner Erzeugenden bestimmt und das durch ein Tripel von Erzeugenden bestimmte Hyperboloid enthält C_3 und ist der J_3 eingeschrieben. Jede der drei Erzeugenden eines Tripels ergänzt das Paar der beiden übrigen. Man sieht auch sofort, dass sich die Erzeugendentripel der F_6 ebenso verhalten, wie die in geraden Linien liegenden Punktetripel einer ebenen Curve dritter Ordnung oder die durch die einzelnen Punkte gehenden Tangententripel einer ebenen Curve dritter Classe.

In der That schneidet jedes Erzeugendentripel XYZ jede dreifache Tangentialebene von F_6 (d. h. jede Schmiegungsebene von J_3) in drei Punkten, die in gerader Linie liegen, welche dem durch das Tripel bestimmten Hyperboloide als Erzeugende der zweiten Schaar angehört und aus jedem dreifachen Punkte (d. h. aus jedem Punkte von C_3) projicirt sich das Tripel durch drei Ebenen, die eine Gerade gemeinsam haben, nämlich eine Erzeugende desselben Hyperboloides.

Hieraus ergibt sich, dass man alle Sätze, welche die geraden Punktetripel einer ebenen Curve dritter Ordnung betreffen, sofort auf die Fläche F_6 übertragen kann.

Durch je zwei unendlich nahe Erzeugende von F_6 und C_3 (oder J_3) ist ein F_6 berührendes Hyperboloid bestimmt, welches F_6 in noch einer Erzeugenden schneidet, die offenbar dieselbe Rolle spielt, wie der Tangentialpunkt bei den ebenen Curven dritter Ordnung und desshalb auch Tangentialerzeugende genannt werden könnte. Die den drei Erzeugenden eines Tripels XYZ entsprechenden Tangentialerzeugenden von F_6 bilden wieder ein Tripel. Es gibt neun osculirende Hyperboloide, welche C_3 enthalten und der Curve J_3 eingeschrieben sind. Die neun Berührungserzeugenden bilden zwölf Tripel. Durch jede Erzeugende von F_6 gehen vier berührende Hyperboloide, welche C_3 enthalten und constantes Doppelverhältniss besitzen u. s. w.

Wenn man das durch zwei Erzeugende XY von F_6 und durch C_3 (respective J_3) bestimmte Hyperboloid mit (XY) bezeichnet, so kann man aus je zwei Paaren correspondirender Erzeugenden XX', YY' ein drittes Paar ZZ' ableiten; das Hyperboloid (XY') schneidet F_6 in Z und das Hyperboloid $(X'Y)$ schneidet F_6 in Z'

Die sämmtlichen Paare correspondirender Erzeugenden ZZ' erhält man aus einem Paare XX', wenn man durch die verschiedenen Erzeugenden Y die Hyperboloide (YX), (YX') legt und sie mit F_6 in Z respective Z' zum Schnitte bringt oder mit anderen Worten: „Sind XX' zwei Gegenkanten eines der Tetraëder $x_1x_2x_3x_4$ und Y eine Kante eines zweiten solchen Tetraëders, so schneiden die Hyperboloide (XY), $(X'Y)$ die Fläche F_6 in zwei Geraden ZZ', welche Gegenkanten eines dritten solchen Tetraëders sind.

Die durch eine Erzeugende Y und die Paare correspondirender Erzeugenden XX' hindurchgehenden Hyperboloide (YX), (YX') bilden ein involutorisches Hyperboloidenbüschel, welches projectivisch ist mit dem durch die correspondirende Erzeugende Y' und dieselben Paare bestimmten involutorischen Hyperboloidenbüschel $(Y'X)$, $(Y'X')$. Die Fläche F_6 ist das Erzeugniss der beiden projectivischen Hyperboloideninvolutionen. Hiebei entspricht sich das beiden Büscheln gemeinschaftliche Hyperboloid (YY') selbst.

Zwei correspondirende Erzeugende XX' haben dieselbe Tangentialerzeugende, welche correspondirend ist zu der das Paar XX' zu einem Tripel ergänzenden Erzeugenden.

7. Ist F_6 eine Fläche sechster Ordnung, welche eine cubische Raumcurve C_3 zur dreifachen Curve besitzt, so muss es immer eine Regelfläche sein, da die durch irgend einen Punkt der Fläche hindurchgehende zweipunktige Sekante der C_3 ganz der Fläche angehören muss, indem sie mit ihr sieben Punkte gemeinschaftlich hat. Durch jeden Punkt von C_3 gehen drei Erzeugende von F_6, so dass die Erzeugenden der Fläche auf C_3 ein symmetrisches Punktsystem dritten Grades bestimmen. Ein solches ist durch neun beliebige Punktepaare bestimmt, woraus wir schliessen, dass eine F_6, welche C_3 zur dreifachen Curve hat, vollkommen bestimmt ist, durch C_3 und neun Sekanten von C_3 als Erzeugende von F_6, oder, was dasselbe ist, durch C_3 und neun beliebige Punkte von F_6. Da ein symmetrisches Elementensystem zur Involution wird, wenn in einer ganzen Elementengruppe vollkommene Vertauschungsfähigkeit herrscht, so ist jede Fläche sechster Ordnung, welche eine cubische Raumcurve C_3 dreimal enthält und durch die sechs Kanten eines der Curve eingeschriebenen Tetraëders hindurchgeht, eine Involutionsfläche, d. h. eine solche, deren Erzeugende sich zu Sextupeln gruppirend auf C_3 eine biquadratische Involution bestimmen.

Dies gilt auch allgemein: jede Fläche $2m$-ter Ordnung, welche C_3 zur m-fachen Curve hat, ist eine Regelfläche und wenn sie die sämmtlichen $\frac{m(m+1)}{2}$ Verbindungslinien von $(m+1)$ beliebigen Punkten der C_3 enthält, so muss sie eine Involutionsfläche sein; d. h. ihre Erzeugenden gruppiren sich in $\frac{m(m+1)}{2}$-elementige Gruppen, auf C_3 eine Involution $(m+1)$-ten Grades bestimmend.

Die früher erörterten Sätze gelten zum grössten Theil auch für die allgemeine Fläche sechster Ordnung mit einer dreifachen cubischen Raumcurve C_3. Jeder durch C_3 gehende Hyperboloid schneidet F_6 in drei Erzeugenden; durch jede Erzeugende gehen vier die Curve C_3 enthaltende Berührungshyperboloide von constantem Doppelverhältniss. Die Fläche besitzt neun osculirende,

durch C_3 gehende Hyperboloide u. s. w. Auch von correspondirenden Erzeugenden und zwar von drei Systemen kann man im Allgemeinen sprechen, wenn man zwei solche Erzeugende, welche eine gemeinschaftliche Tangentialerzeugende besitzen, als correspondirende bezeichnet. Nur gruppiren sich die Erzeugenden im allgemeinen Falle nicht in Sextupel.

8. „Wenn die auf C_3 befindliche biquadratische Involution eine Gruppe mit zwei Doppelpunkten enthält, so besitzt die Fläche F_6 die Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte zur Doppelerzeugenden und wird eine rationale Fläche sechster Ordnung."

Es seien dd' die beiden eine Gruppe der Involution bildenden Doppelpunkte auf C_3 DD' die Tangenten von C_3 in dd' und Δ die Verbindungslinie dd' und $\delta\delta'$ die durch Δ und D und D' gehenden Ebenen. Dann sind $\delta\delta'$ zwei Schmiegungsebenen von J_3 und bilden jede als Doppelebene aufgefasst, eine Gruppe der biquadratischen Schmiegungsebeneninvolution auf J_3; $DD'\Delta$ sind Erzeugende von F_6. Jede Schmiegungsebene von ξ schneidet die übrigen in Tangenten des Kegelschnittes ξ_2, welche zu einer biquadratischen Tangenteninvolution verbunden erscheinen, deren Erzeugniss die Curve K_3 ist, in welcher F_6 von ξ geschnitten wird. Die Ebenen $\delta\delta'$ schneiden ξ in zwei Tangenten von ξ_2, welche als Doppelelemente eine Gruppe der biquadratischen Tangenteninvolution auf ξ_2 bilden, so dass ihr Schnittpunkt, d. h. der Punkt, in welchem Δ die Ebene ξ schneidet, ein Doppelpunkt von K_3 wird. Jede K_3 hat also auf Δ einen Doppelpunkt, so dass die Gerade Δ eine Doppelgerade der Fläche F_6 ist. Die Rationalität der Fläche folgt aus jener der ebenen Schnitte K_3 oder aus der Bemerkung, dass jedes durch C_3 und Δ gelegte Hyperboloid die Fläche F_6 in einer Erzeugenden schneiden muss. Die Hyperboloidenpaare, welche durch $C_3\Delta$ und die Paare correspondirender Erzeugenden XX' gelegt werden können: (ΔX), $(\Delta X')$ bilden ein involutorisches Büschel. Es gibt nur drei osculirende Hyperboloide, welche C_3 enthalten; die Berührungserzeugenden derselben liegen auf einem durch C_3 gehenden Hyperboloide und sind alle drei reell, wenn Δ eine ideelle Sekante von C_3 ist, dagegen ist nur eine reell, wenn Δ eine eigentliche Sekante ist. Wenn Δ in eine Tangente von C_3 übergeht, so bleibt nur ein

einziges reelles Osculationshyperboloid, welches C_3 enthält, übrig; alle Punkte von Δ sind in diesem Falle Cuspidalpunkte.

9. „Besitzt die auf C_3 befindliche biquadratische Punktinvolution zwei nur Doppelpunkte enthaltende Gruppen, so zerfällt die Fläche F_6 in ein Hyperboloid und in eine Regelfläche vierten Grades F_4, welche C_3 zur Doppelcurve hat und deren Erzeugende sich zu Quadrupeln gruppiren."

Es seien dd' die beiden eine Gruppe bildenden Doppelpunkte und $d_1 d_1'$ die beiden die andere Gruppe bildenden Doppelpunkte der Involution; $\Delta\Delta_1$ seien die Geraden dd', $d_1 d_1'$, $DD' D_1 D_1'$, $\delta\delta' \delta_1 \delta_1'$ seien die Tangenten respective Schmiegungsebenen der Curve C_3 in den Punkten $dd' d_1 d_1'$. Eine Involution vierten Grades, welche zwei nur Doppelelemente enthaltende Gruppen besitzt, besteht aus involutorischen Paaren einer quadratischen Involution, welcher die beiden Paare dd', $d_1 d_1'$ als sich selbst entsprechende angehören. (Siehe: „Über Ausartungen biquadratischer Involutionen und über die sieben Systeme der eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte. Sitzung vom 7. April 1881.) Es wird somit die Fläche F_6 zerfallen in das Hyperboloid ($\Delta\Delta'$), welches durch C_3 und Δ, Δ' bestimmt erscheint und eine Fläche vierter Ordnung F_4, deren Erzeugende sich zu Quadrupeln ordnen. Sind nämlich XX' irgend zwei Erzeugende des Hyperboloides ($\Delta\Delta'$), welche mit den Erzeugenden $\Delta\Delta'$ ein harmonisches System bilden und sind $x_1 x_3$ die auf C_3 liegenden Punkte von X und $x_2 x_4$ jene Punkte von X', welche auf C_3 liegen, so bilden die Punkte $x_1 x_2 x_3 x_4$ eine Gruppe der biquadratischen Involution und die vier Geraden $x_1 x_2$, $x_2 x_3$, $x_3 x_4$, $x_4 x_1$, d. i. die Seiten des einfachen windschiefen Vierecks $x_1 x_2 x_3 x_4$ sind die ein Quadrupel von F_4 bildenden Erzeugenden. Die Berührungspunkte der beiden C_3 berührenden Erzeugenden des Hyperboloides ($\Delta\Delta'$) stellen den fünften und sechsten Doppelpunkt der biquadratischen Involution auf C_3 vor. Aus den am angeführten Orte bewiesenen Sätzen folgt sofort:

„Eine Regelfläche vierten Grades mit gegebener Doppelcurve dritten Grades ist, wenn sie unendlich viele der Doppelcurve eingeschriebene (windschiefe) Vierseits enthalten soll, durch vier ausserhalb der Doppelcurve liegende Punkte, jedoch nicht eindeutig bestimmt."

Durch die Curve C_3, einen der Punkte dd', einen der Punkte $d_1 d_1'$ und zwei beliebige Punkte des Raumes sind zwei Flächen F_4 bestimmt.

Durch C_3, einen der Punkte $dd'd_1d_1'$ und drei beliebige Punkte des Raumes sind drei Flächen F_4 bestimmt. Durch C_3 eine der Geraden $\Delta\Delta'$ und zwei beliebige Punkte des Raumes ist eine Fläche F_4 bestimmt.

(Vergleiche: „Notiz über Regelflächen mit rationalen Doppelcurven.“ Sitzung vom 13. October 1881.)

10. Enthält die biquadratische Involution auf C_3 drei nur Doppelpunkte aufweisende Gruppen, so zerfällt sie in drei quadratische Involutionen und F_6 dem gemäss in drei durch C_3 hindurchgehende Hyperboloide.

Die Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte mittelst reciproker Flächenbündel.

Von Dr. G. v. Escherich.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. März 1882.)

Ich erlaube mir im Folgenden der k. Akademie die Grundzüge eines allgemeinen Verfahrens zur Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte vorzulegen und dessen Anwendung zur Herstellung der Flächen der III. bis V. Ordnung anzudeuten. Seine ausführliche, alle Einzelheiten erörternde Darlegung behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor.

I.

Das gefundene Verfahren beruht auf den Ergebnissen meiner Untersuchungen über die Erzeugung algebraischer Flächen durch reciproke Flächenbündel, welche ich in der Abhandlung „die reciproken linearen Flächensysteme“ (Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. in Wien. Bd. LXXV.) niedergelegt habe.

Ich habe dort gezeigt, dass jede algebraische Fläche auf mehrfache Weise durch reciproke Flächenbündel erzeugt werden kann und für die Construction der Fläche aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte die Maximalzahl derselben ermittelt, welche in die Basis der beiden herzustellenden reciproken Bündel aufgenommen werden darf. Doch steht es nur scheinbar in unserem Belieben, eine dieser Maximalzahl gleiche Anzahl von Knotenpunkten auch wirklich den gegebenen Punkten zu entnehmen oder nicht, da hier ein Paradoxon auftritt, das bei der Construction der algebraischen Curven aus projectivischen Curvenbüscheln gänzlich übersehen worden zu sein scheint, und dessen speciellen

Fall bei der Construction der Flächen der II. Ordnung durch zwei reciproke Strahlenbündel schon Herr Schroeter[1] aufgewiesen hat. Die Lösung desselben, die sich ohne Schwierigkeit durch Betrachtung des Gleichungssystems ergibt, aus welchem die Unbekannten des Problems zu berechnen sind, zeigt, dass diese Maximalzahl von Knotenpunkten den gegebenen Punkten entnommen werden muss. In sehr vielen Fällen — und nur solche habe ich hier in Betracht gezogen — ist nun diese Zahl grösser oder gleich der Anzahl der Knotenpunkte, aus denen die Basis des einen der beiden erzeugenden Bündel besteht, wie z. B. stets, wenn der eine von ihnen ein Strahlenbündel ist.

Diesen Fall will ich nun näher erörtern und um einen bestimmten vor Augen zu haben, etwa annehmen, die Fläche $(n+p)^{\text{ter}}$ Ordnung lasse sich durch einen Bündel n^{ter} und einen zu ihm reciproken p^{ter} Ordnung erzeugen und es sei die Maximalzahl der verfügbaren Knotenpunkte $\geqq$ als die Zahl der Knotenpunkte in der Basis des Bündels p^{ter} Ordnung, wir seien also im Stande, diesen Bündel auch wirklich herzustellen. Um die Fläche zu erzeugen, haben wir also dann nur noch einen Flächenbündel der n^{ten} Ordnung zu construiren, dessen Basis den Rest der verfügbaren Knotenpunkte enthält und der zu dem ersten derart reciprok ist, dass jeder der durch einen der übrigen gegebenen Punkte gehenden $C^{p,p}$ dieses Bündels eine durch denselben Punkt gehende F^n des zweiten entspricht. Beziehen wir nun den Flächenbündel p^{ter} Ordnung collinear auf einen Strahlenbündel, so ersieht man, dass die Construction der Fläche auf das Problem zurückkommt:

Zu einem gegebenen Strahlenbündel einen reciproken F^n-Bündel zu construiren, wenn von dessen Basis eine Anzahl Knotenpunkte — die auch 0 sein kann — bekannt ist und jede Fläche, welche einem von einer Reihe gegebener Strahlen entspricht, durch einen ihr zugewiesenen Punkt gehen soll.

---

[1] Journal f. Math. Bd. LXII.

II.

Diese Aufgabe löse ich durch ein stufenförmiges Verfahren, welches ein Satz nahelegt, der zur Construction von Curven und Flächen aus gegebenen Bestimmungsstücken äusserst verwendbar und in seiner Einschränkung auf Curven- und Flächenbüschel wohl bekannt ist. [1] Ich will hier diesen Satz, der sich auf beliebige projectivische collineare Curven- und Flächensysteme erstreckt, dem vorliegenden Zwecke gemäss für collineare Flächenbündel derselben Ordnung aussprechen.

Es seien im Raume drei collineare Flächenbündel derselben Ordnung gegeben, die sich also durch drei Gleichungen von der Form darstellen lassen

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = o \equiv F_\lambda,$$
$$m_1\lambda_1 F'_1 + m_2\lambda_2 F'_2 + m_3\lambda_3 F'_3 = o \equiv F'_\lambda,$$
$$n_1\lambda_1 F''_1 + n_2\lambda_2 F''_2 + n_3\lambda_3 F''_3 = o \equiv F''_\lambda.$$

Je drei entsprechende Flächen dieser Bündel bestimmen einen neuen Bündel, wie z. B. die drei vorstehenden den Bündel

$$\rho F_\lambda + \rho' F'_\lambda + \rho'' F''_\lambda = o \equiv \Phi_{\lambda,\rho}.$$

Dann findet sich zu jeder Fläche irgend eines dieser Bündel in jedem anderen Bündel eine Fläche derart, dass alle diese Flächen wieder einen Bündel bilden, der zu jedem ursprünglichen collinear ist in Hinsicht der Flächen, welche beide mit demselben derivirten Bündel gemein haben. Sind etwa $\Phi_{\lambda,\rho} = 0$, $\Phi_{\mu,\sigma} = 0$, $\Phi_{\nu\tau} = 0$ die drei in Betracht gezogenen derivirten Bündel und ist $\Phi_{\lambda,\alpha} = 0$ die im Bündel $\Phi_{\lambda,\rho} = 0$ angenommene Fläche, so bildet sie mit $\Phi_{\mu\alpha} = 0$ und $\Phi_{\nu\alpha} = 0$ den gesuchten Bündel. Es sind also hienach die derivirten Bündel der ersten Reihe selbst zu einander collinear in Ansehung der Flächen, die sie mit demselben ursprünglichen oder derivirten Bündel der zweiten Reihe gemein haben. Die Collineation zwischen diesen Bündeln ist, wie die Gleichungen der entsprechenden Flächen

---

[1] Bei Chasles, Cremona, Jonquières, Kortum.

$\Phi_{\lambda\alpha} = 0$; $\Phi_{\mu\alpha} = 0$; $\Phi_{\nu\alpha} = 0$ zeigen, von specieller Art und ist durch die Zuordnung blos dreier Paare von Flächen als einander entsprechende bestimmt.

Die Anwendung dieses Satzes zur Lösung unseres obigen Problems (I) ist wohl ohne weiters klar. Kennt man nämlich ein Verfahren, um zu einem gegebenen Strahlenbündel einen reciproken Flächenbündel p^{ter} Ordnung zu construiren, dessen Basis B gegebene Punkte enthält und in dem die Flächen, welche den n-Strahlen $s_1, s_2 \ldots s_n$ entsprechen, bezüglich durch die Punkte $P_1, P_2 \ldots P_n$ gehen, so hat es keine Schwierigkeiten vermöge des obigen Satzes einen zu dem Strahlenbündel reciproken Flächenbündel p^{ter} Ordnung herzustellen, dessen Basis blos $(B-1)$ gegebene Punkte enthält und in dem jede weiteren i-Strahlen, wo i die Zahl 3 nicht übersteigen darf, entsprechende Fläche ebenfalls durch einen ihr zugewiesenen Punkt geht.

Ich löse zunächst die Aufgabe: „Es ist durch $(B-1)$ gegebene Knotenpunkte ein Flächenbündel zu legen, derart, dass die den Strahlen $s_1, s_2 \ldots s_3\ s_n, s_{n+1}$ entsprechenden Flächen bezüglich durch die Punkte $1, 2, \ldots n, (n+1)$ gehen."

Mittelst des als bekannt angenommenen Verfahrens können zunächst $(n+1)$ der Aufgabe genügende Flächenbündel construirt werden und zwar dadurch, dass stets einer der gegebenen Punkte $1, 2 \ldots (n+1)$ in die Basis einbezogen wird. Ich will irgend drei der so entstandenen Bündel, etwa jene, wo bezüglich die Punkte i, k, l zur Ergänzung der Basis zu B Punkten verwendet wurden, näher in Betracht ziehen.

$$\left.\begin{array}{l} F_1^i,\ F_2^i \ldots F_{n+1}^i \ldots F_x^i \\ F_1^k,\ F_2^k \ldots F_{n+1}^k \ldots F_x^k \\ F_1^l,\ F_2^l \ldots F_{n+1}^l \ldots F_x^l \end{array}\right\} \quad \text{I)}$$

seien die in den drei Bündeln bezüglich den Strahlen $s_1, s_2 \ldots s_{n+1} \ldots s_x$ entsprechenden Flächen. Vermittelst dieser drei Bündel können nun nach dem obigen Satze neue Bündel abgeleitet werden, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Irgend drei Bündel, die aus entsprechenden Flächen von (I) gebildet werden, geben nämlich einer neuen Reihe derartiger Bündel Entstehung. Denn sind etwa

$$\left.\begin{matrix} F^i_\rho & F^k_\rho & F^l_\rho \\ F^i_\sigma & F^k_\sigma & F^l_\sigma \\ F^i_\tau & F^k_\tau & F^l_\tau \end{matrix}\right\} \qquad \text{II)}$$

diese drei Bündel, so existirt zu jeder Fläche f_ρ des ersten, eine f_σ des zweiten und f_τ des dritten Bündels, welche einen Bündel constituiren, der mit jedem Bündel $(F^i_\lambda, F^k_\lambda, F^l_\lambda)$ eine Fläche f_λ gemein hat und mit jedem der ursprünglichen (II) collinear ist in Hinsicht der Flächen, die denselben unteren Index besitzen.

Da nun die Knotenpunkte aller gesuchten Bündel eine Fläche bilden müssen, so ist klar, dass die durch die obigen drei Bündel erhaltenen Systeme $f_1, f_2 \ldots$ die sämmtlichen sind, was übrigens auch unmittelbar aus der Folge des Gegentheils erhellt, dass sonst die gegebenen Stücke nicht mehr unabhängig von einander wären.

Sind somit

$$F_1 \; F_2 \ldots F_{n+1} \ldots F_x$$

die Flächen irgend eines den Bedingungen der Aufgabe genügenden Bündels, so gehört F_x dem Bündel $F^i_x F^k_x F^l_x$ an, und dieser ist collinear zu $F_p F^i_p F^k_p F^l_p$ hinsichtlich der Flächen, welche denselben oberen Index tragen. Es bilden also die sämmtlichen Flächen der verschiedenen, den Bedingungen des Problems genügenden Bündel, welche demselben Strahle des Strahlenbündels entsprechen, selbst einen Bündel und alle diese Bündel sind collinear in Ansehung der Flächen, welche demselben gesuchten Bündel entstammen. Da nun von vornherein $(n+1)$ Bündel, welche den Forderungen genügen, gegeben sind, so ist damit auch die collineare Beziehung zwischen den verschiedenen, den einzelnen Strahlen des Strahlenbündels zugehörigen Bündel gegeben und man ist somit im Stande, zu jeder Fläche eines dieser Bündel die übrigen zu finden, welche mit ihr einen der gesuchten Bündel erfüllen.

Mittelst der eben gelösten Aufgabe ist es nun möglich, das Problem nächst höherer Stufe zu lösen, in dem zu den früheren Forderungen die weitere hinzugefügt wird, dass auch die dem Strahle s_{n+2} zugehörige Fläche durch einen gegebenen Punkt P_{n+2} gehe.

Denn die Flächen, welche s_{n+2} in dem vorhergehenden Probleme angehören, bilden einen Bündel und es constituiren somit alle Flächen desselben, die durch P_{n+2} gehen, einen Flächenbüschel. Diesem Flächenbüschel entspricht dann in jedem der einem anderen Strahle zugehörigen collinearen Bündel der aus den entsprechenden Flächen gebildete Flächenbüschel und jedes System einander entsprechender Flächen dieser Büschel bildet nach dem Vorhergehenden einen gesuchten Bündel.

In diesem Vereine von Flächen bilden also die irgend einem Strahle des Strahlenbündels zugehörigen Flächen einen Flächenbüschel und diese Flächenbüschel sind zu einander collinear in Ansehung der Flächen, welche demselben gesuchten Bündel angehören. Legen wir nun durch einen weiteren Punkt P_{n+3} die Fläche des s_{n+3} zugehörigen Büschels, so bildet diese mit ihren in den anderen collinearen Büscheln entsprechenden Flächen einen Bündel. Hiemit wäre also auch das Problem gelöst: „Zu einem gegebenen Strahlenbündel einen reciproken Flächenbündel zu construiren, dessen Basis $(B-1)$ gegebene Knotenpunkte enthält und in dem die den Strahlen $s_1 \ldots s_n$, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3} entsprechenden Flächen bezüglich durch die Punkte $P_1 \ldots P_n$, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3} gehen."

Aus diesen Erörterungen ist also ersichtlich, dass das in I) angegebene Problem zurückkommt auf das einfache:

Einen durch seine Basis gegebenen Flächenbündel derart reciprok auf einen gegebenen Strahlenbündel zu beziehen, dass jede Fläche, welche irgend einem von acht gegebenen Strahlen des letzteren entspricht, durch einen ihr zugewiesenen Punkt gehe.

Diese Aufgabe kommt wieder, indem man irgend einen Strahlenbündel collinear auf den Flächenbündel bezieht, auf die einfache zurück:

Zu einem gegebenen Strahlenbündel um einen gegebenen Punkt einen reciproken zu construiren, dergestalt, dass jede Ebene des letzteren, welche einem von acht gegebenen Strahlen des ersteren entspricht, durch einen ihr zugewiesenen Punkt gehe.

Dieses Problem, das ebenfalls mit Hilfe des obigen Satzes in höchst einfacher Weise gelöst werden könnte, ist schon von Herrn Schroeter a. a. O. erledigt worden.

III.

Es bedarf wohl nicht der ausdrücklichen Bemerkung, dass das hier angegebene Constructionsverfahren in seiner Allgemeinheit nicht mit blosser Hilfe des Lineals oder des Lineals und Cirkels durchführbar ist. Denn seine Anwendung setzt die Lösbarkeit der beiden Aufgaben voraus:

1. die Fläche eines Flächenbüschels herzustellen, die durch einen gegebenen Punkt geht;
2. die zwei Flächenbüscheln desselben Flächenbündels gemeinsame Fläche zu construiren.

Indem ich nun die weitere Bedingung stelle, dass alle erforderlichen Constructionen blos mittelst Lineal und Cirkel ausführbar seien, zeigt sich, dass unter dieser Beschränkung das Verfahren in folgenden Fällen anwendbar ist.

Eine Fläche der III^{ten} Ordnung, die durch nur 18 gegebene Punkte gehen soll, kann ausser in der von mir schon angegebenen Weise (l. c.) noch auf zwei andere Arten mittelst des obigen Verfahrens hergestellt werden, indem von den sieben verfügbaren Knotenpunkten entweder alle in die Basis des F^2-Bündels verlegt werden, oder blos sechs und einer zum Mittelpunkt des Strahlenbündels bestimmt wird. Es hat nun keine Schwierigkeiten, in dem durch die 18 Punkte bestimmten F^3-Büschel die Fläche zu bestimmen, welche durch einen gegebenen 19ten Punkt geht, d. h. die beiden diese Fläche erzeugenden reciproken Bündel festzulegen.

Die Fläche der IV^{ten} Ordnung kann aus 34 Punkten durch zwei reciproke F^2-Bündel construirt werden, indem man zunächst den F^4-Büschel construirt, der durch 33 dieser Punkte bestimmt wird und hierin die Fläche festlegt, welche durch den ausgeschiedenen Punkt hindurchgeht. Eine Fläche dieses Büschels wird mittelst des obigen Verfahrens erhalten, indem von den 33 Punkten acht derart in die Basis der beiden erzeugenden Bündel verlegt werden, dass aus sieben die Basis des einen Bündels gebildet und der achte der des anderen Bündels zugewiesen wird.

Aus 55 Punkten kann unter den obigen Bedingungen nach dem auseinandergesetzten Verfahren ein F^4-Bündel und ein zu ihm reciproker Strahlenbündel hergestellt werden, deren Erzeugniss die durch diese Punkte bestimmte Fläche der Vten Ordnung ist.

Von den 26 verfügbaren Knotenpunkten wird einer als Mittelpunkt des Strahlenbündels und die übrigen werden für die Basis des F^4-Bündels verwendet.

Beitrag zur synthetischen Theorie der ebenen Curven III. Ordnung mit Doppelpunkt.

Von Prof. **Heinrich Drasch** in Steyr.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. März 1882.)

Bekanntlich hat Dr. E. Weyr in seiner Theorie der mehrdeutigen geometrischen Gebilde[1] die ebenen Curven III. Ordnung mit Doppelpunkt erzeugt durch zwei ein-zweideutige Büschel, und hat der eingehenden Theorie dieser Curven unter andern auch noch zahlreiche Constructionsaufgaben über dieselben angefügt. Da nun diese Curven nichts anders sind als Projectionen der Raumcurven III. Ordnung, so erscheint eine Behandlung derselben unter diesem Gesichtspunkte, wornach sie also als das Erzeugniss zweier projectivischer Strahlenbüschel, eines I. Ordnung und eines II. Ordnung, erscheinen, um so mehr gerechtfertigt, als sich schon in einer Abhandlung Schröter's[2] über das duale Erzeugniss III. Classe und IV. Ordnung der Weg hiezu angedeutet findet.

In vorliegender Abhandlung erlauben wir uns nun, der synthetischen Theorie dieser Curven, als Projectionen von Raumcurven III. Ordnung, einige vielleicht neue Betrachtungen hinzuzufügen, welchen in Hinsicht auf die constructive Behandlung derselben einige Beachtung zu Theil werden dürfte.

Die Projection einer Raumcurve III. Ordnung besitzt einen eigentlichen Doppelpunkt, einen isolirten oder einen Rückkehrpunkt, je nachdem sich vom Projectionscentrum aus eine eigentliche oder ideelle Secante, oder eine Tangente an die Raumcurve ziehen lässt; auf die Projectionsebene übertragen

[1] Dr. E. Weyr, Theorie der mehrdeutigen geometrischen Gebilde, 1869.

[2] Crelles Jornal, Bd. 54.

heisst dies, je nachdem der Träger des Strahlenbüschels I. Ordnung ausserhalb, innerhalb oder auf der Peripherie des Enveloppekegelschnittes des Strahlenbüschels II. Ordnung liegt.

Es sei nun Fig. 1, Taf. I der Kegelschnitt K die Enveloppe des Strahlenbüschels II. Ordnung und δ der Träger des ihm projectivischen Strahlenbüschels I. Ordnung.

Ist nun s ein beliebiger Punkt von K und werden aus ihm die Berührungspunkte des Tangentenbüschels (Strahlenbüschel II. Ordnung) projicirt, so wird der dadurch bestimmte Strahlenbüschel projectivisch mit dem Stralenbüschel δ und erzeugt mit ihm einen Kegelschnitt L, welcher K in noch weiteren drei Punkten I, II, III, schneiden wird, welche aus leicht begreiflichen Gründen der Curve angehören müssen. Es sind dies diejenigen drei Punkte von K, welche auf den ihnen entsprechenden Strahlen des Büschels δ liegen, woraus folgt, dass sie unabhängig von dem willkürlich gewählten Punkte s sind; ziehen wir in s die Tangente an K, so wird sie L in einem Punkte a der Curve treffen, woraus folgt, dass die fragliche Curve auch entsteht, wenn man durch vier feste Punkte I, II, III, δ, einen beliebigen Kegelschnitt L durchlegt und in dem vierten Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte K und L, d. i. in s, die Tangente zieht, welche L in einem Curvenpunkte a schneidet.

Die Ordnung der Curve lässt sich in folgender Weise bestimmen: ist G eine beliebige Gerade, so wird auf derselben durch den Büschel δ eine Punktreihe ausgeschnitten, welche mit derjenigen projectivisch ist, die der Tangentenbüschel auf irgend einer unter ihnen z. B. t bildet; diese zwei Punktreihen bilden einen Büschel II. Ordnung, welcher mit dem gegebenen ausser dem gemeinschaftlichen Strahle t noch drei solche besitzen muss, welche die Schnittpunkte von G und der Curve bestimmen werden; die Curve ist demnach von dritter Ordnung.

Da von δ zwei Tangenten an K gehen, so ist δ ein Doppelpunkt, dessen Tangenten die Strahlen δr und δr_1 sind, wenn sr und sr_1 den Kegelschnitt K in den Berührungspunkten t und t_1 der von δ aus an ihn gezogenen Tangenten schneiden.

Da die Curve von der dritten Ordnung ist, so wird jede Tangente z. B. die Tangente T die Curve ausser in h, als Schnittpunkt mit dem entsprechenden Strahle des Büschels δ, noch in

zwei weiteren Punkten schneiden müssen, deren Bestimmung sich in folgender Weise ergibt: der ursprüngliche Büschel II. Ordnung und der Büschel δ werden auf der Tangente T zwei projectivische Punktreihen einschneiden, deren Doppelpunkte offenbar die gesuchten sein werden; nehmen wir nun gleich den Kegelschnitt L als Constructionsunterlage und wählen wir zur Feststellung der Projectivität die drei festen Strahlen δI, δr und δr_1, welchen die Tangenten in I, t und t_1 entsprechen, so werden, wenn wir die sechs Schnittpunkte dieser Elemente mit der Tangente T suchen und dieselben behufs Bestimmung der Doppelpunkte aus δ in den Kegelschnitt L projiciren, fünf dieser Projectionen für jede Tangente constant bleiben, nämlich die Schnittpunkte der drei Strahlen δI, δr und δr_1 und die Schnittpunkte r' und r'_1 der den zwei letzteren Strahlen entsprechenden Tangenten, weil sie auch durch δ gehen. Die Gerade, welche die Doppelpunkte der beiden krummen, projectivischen Punktreihen auf L bestimmt, muss demnach durch den Schnittpunkt von r_1r' und rr'_1, das ist durch O gehen, welcher Punkt demnach fix ist. Der Punkt O muss übrigens auf der Polare des Punktes δ bezüglich K liegen, denn in dem Pascal'schen Sechsecke $r_1srr'_1\delta r'$ schneiden sich die Gegenseitenpaare r_1s und $r_1'\delta$ in t_1 und sr und $\delta r'$ in t, deren Verbindungslinie tt_1 die Polare von δ ist; folglich liegt der Schnittpunkt von rr_1' und $r'r_1$, d. i. O auch auf dieser Geraden.

In der Figur ist diese Doppelpunktsgerade die Verbindungslinie Ou, wobei u der Schnittpunkt von Ir_1' und $v'r_1$ ist; v' ist die Projection des Schnittpunktes v von der fixen Tangente in I und der beweglichen Tangente T, aus δ nach L; diese Doppelpunktsgerade, welche ausserdem auch noch durch den Schnittpunkt von Ir' und rv' d. i. durch w gehen muss, schneidet L in den Punkten 1 und 2, welche aus δ auf T projicirt, die gesuchten zwei Schnittpunkte n_1 und n_2 liefern.

Werden nun die Berührungspunkte der beweglichen Tangente aus s projicirt, so ist der dadurch entstehende Strahlenbüschel projectivisch mit dem Büschel O. Denn jener ist projectivisch mit dem Tangentenbüschel, dieser selbst perspectivisch mit der Punktreihe v auf der Tangente in I; diese Punktreihe wird der Construction gemäss aus δ nach L projicirt und diese krumme Reihe vom Punkte r aus wieder in die fixe Gerade Ir' projicirt,

welche Reihe endlich aus O durch den besagten Büschel O projicirt wird. Jeder Tangente entspricht nun eindeutig ein Strahl des Büschels O und umgekehrt und da man nun die übrigen zwei Schnittpunkte auf jeder Tangente erhält, wenn man die Doppelpunkte der betreffenden krummprojectivischen Punktreihen auf L aus δ projicirt, die Verbindungsgeraden dieser Doppelpunkte aber durch einen fixen Punkt O gehen, so folgt, weil δ auf L liegt, dass die Punktpaare, welche die Strahlen des Büschels II. Ordnung ausser dem Schnittpunkte mit dem entsprechenden Strahl des Büschels I. Ordnung auf der Curve noch bilden, aus dem Doppelpunkte durch einen involutorischen Büschel projicirt werden.[1]

Wir nennen den ersten, immer reellen Punkt „Hauptpunkt" und die zwei letzteren „Nebenpunkte"; es sind dies für die Tangente T die Punkte n_1 und n_2.

Die Büschel s und O erzeugen einen Kegelschnitt (K), mit Hilfe dessen und des Kegelschnittes K die dreipunktweise Erzeugung der Curve durch die bewegliche Tangente T zerfällt wird in eine Construction ersten und eine zweiten Grades; wir ziehen nämlich den beliebigen Strahl se, welcher K in e schneidet, ziehen die Tangente in e, so erhält man den Hauptpunkt h mit Hilfe des entsprechenden Strahles durch δ; um die zwei Nebenpunkte n_1 und n_2 zu erhalten, sucht man den Schnitt von se mit dem Kegelschnitt (K), welcher Punkt mit O verbunden, durch diese Verbindungsgerade auf den Kegelschnitt L zwei Punkte c und d liefert, welche mit δ verbunden die gesuchten Nebenpunkte n_1 und n_2 geben.

Dieser Kegelschnitt (K) schneidet den Kegelschnitt K ausser in s noch in drei Punkten, nämlich in I, II, III; denn wenn der bewegliche Strahl se durch I geht, so wird, wie aus dem Gange der Construction ersichtlich, auch der entsprechende Strahl des Büschels O durch I gehen; dass sich aber auch in II und III je zwei entsprechende Strahlen der Büschel s und O schneiden

[1] Eleganter ist unstreitig der Beweis von H. Schröter im 54. Band des Journals von Crelle für die duale Curve III. Classe und IV. Ordnung; doch gewinnen wir aus dieser Betrachtung alle übrigen Sätze mit grosser Leichtigkeit.

müssen, erhellt daraus, dass man unter Berücksichtigung der Beibehaltung eines fixen Elementes anstatt des Strahles δI eben so gut den Strahl δII oder δ *III* bei der projectivischen Zuweisung hätte annehmen können, und das für *I* Gesagte demnach auch für *II* und *III* Giltigkeit hat. Ausserdem folgt daraus, dass der Kegelschnitt K in *I*, *II* und *III* die Curve C^3 berühren muss, weil in jedem dieser drei Punkte nicht nur ein Hauptpunkt, sondern auch einer der zwei Nebenpunkte liegt, woraus folgt, dass der Enveloppekegelschnitt K die Curve C^3 dreifach berührt.

Die Punkte *II* und *III*, für welche eine Berührung zwischen C^3 und dem Kegelschnitt K stattfindet, sind hier in der Figur imaginär. Ausserdem sind auch von den acht gemeinsamen Tangenten zwischen C^3 und K ausser den eben angegebenen zwei Paaren zusammenfallender imaginärer Tangenten die noch fehlenden zwei imaginär, weil O innerhalb L liegt und demnach das Tangentenpaar aus O an L imaginär ist.

Zur Bestimmung der Classe der Curve schicken wir folgende Bemerkung voraus:

Jeder Strahl des Büschels δ bestimmt auf einer Geraden G einen Punkt, welchem in Bezug auf K eine Polare und im Büschel s ein Strahl projectivisch entspricht, folglich entspricht dem Strahlenbüschel δ projectivisch sowohl der Büschel der Polaren mit dem Pol von G bezüglich K als Träger, als auch der Büschel s. Der Polarenbüschel und der Büschel s sind demnach auch projectivisch und erzeugen einen Kegelschnitt, welcher K ausser in s noch in drei Punkten schneiden muss. Die Tangenten in diesen Punkten treffen die Gerade G offenbar in den gesuchten drei Durchschnittspunkten mit C^3. Mit Hilfe dieser Betrachtung lässt sich nun die Classe der Curve ermitteln, indem wir untersuchen, wie viele Tangenten durch einen beliebigen Punkt P gehen. Zu diesem Zwecke drehen wir um P einen beliebigen Strahl und suchen die jedesmaligen drei Durchschnittspunkte mit C^3. Mit Bezug auf das soeben Gesagte erhalten wir dieselben mittelst eines Kegelschnittes, welcher durch s geht und K in drei Punkten schneidet; jedem Strahle durch P entspricht auf diese Weise ein Kegelschnitt und dem Strahlenbüschel P entspricht ein Kegelschnittbüschel, was aus Folgendem erhellt; dem allen Strahlen

gemeinsamen Punkte P entspricht in jedem Polarenbüschel derselbe Strahl, nämlich die Polare von P, welcher ein und derselbe Strahl im Büschel s entspricht; sämmtliche Kegelschnitte müssen demnach durch den Schnittpunkt dieser Polare mit dem entsprechenden Strahle des Büschels s gehen; sie gehen ausserdem aber noch durch zwei feste Punkte, denn wenn wir den Büschel P mit einem beliebigen Strahle x des Büschels δ schneiden, so entspricht den einzelnen Schnittpunkten im Büschel s ein und derselbe Strahl x_1, welcher nämlich nach früher dem Strahle x entspricht, und in den betreffenden Polarenbüscheln Strahlen, welche sowohl durch die Pole der betreffenden Strahlen des Büschels P als auch durch den Pol des Strahles x gehen müssen; fällt nun der Pol von x in den entsprechenden Strahl x_1 von s hinein, so müssen die Strahlen, welche den Schnittpunkten von x mit den Strahlen des Büschels P entsprechen, alle den entsprechenden Strahl x_1 des Büschels s in diesem Pole treffen; dies tritt nun zweimal ein, denn die Pole der Strahlen des Büschels δ bilden auf der Polare von δ eine Punktreihe, projectivisch mit derjenigen, welche der Büschel s auf der nämlichen Polare einschneidet, wesshalb die Doppelpunkte dieser zwei projectivischen Reihen zwei Punkte liefern, durch welche sämmtliche Kegelschnitte gehen müssen, welche demnach ein Büschel bilden; jedes Individuum dieses Büschels schneidet K ausser in s noch in drei Punkten, deren Verbindungslinien einen Kegelschnitt R einhüllen;[1] fallen nun zwei dieser Punkte zusammen, d. h. wird eine dieser Verbindungslinien zur Tangente, so ist der diesem betreffenden Kegelschnitte entsprechende Strahl des Büschels P eine Tangente von C^3, weil zwei seiner Schnittpunkte mit C^3 zusammenfallen; die Kegelschnitte K und R besitzen nun vier gemeinsame Tangenten, wesshalb sich von P aus vier Tangenten an C^3 legen lassen und C^3 somit von der vierten Classe ist.[2]

---

[1] Steiner's Vorl. bearb. v. H. Schröter; II. Abth., pag. 242.

[2] Crelle's Journal für Mathematik, 54. Band, Schröter gelangt für die duale Curve C_3^4 auf anderem Wege zu dem Resultate, dass die Curve von der sovielten Ordnung ist, als es Kegelschnitte eines Büschels gibt, die einen anderen berühren, welcher durch einen der vier Grundpunkte des Büschels geht.

Zur weiteren Betrachtung der Beziehungen einer Geraden zur C_4^3 suchen wir für eine durch einen beliebigen Punkt X der Curve gehende Gerade G die fehlenden zwei Schnittpunkte. Ziehen wir durch X die Tangente t an K, welche nicht dem Strahle δX entspricht, so erhalten wir auf G und t zwei projectivische Punktreihen, wenn wir jedem Schnittpunkte von G mit einem Strahle des Büschels δ den Schnittpunkt von t mit der diesem Strahle entsprechenden Tangente zuweisen; diejenige Verbindungslinie entsprechender Punkte, welche K berührt, liefert einen der gesuchten Punkte auf G; nun sind die Reihen auf G und t aber perspectivisch, weil der Schnittpunkt X der Träger sich selbst entspricht, wesshalb die Tangenten an K aus dem perspectivischen Centrum der beiden Reihen die verlangten zwei Schnittpunkte liefern.

Zur Bestimmung dieses perspectivischen Centrums wählen wir im Büschel δ die fixen Strahlen T_1 und T_2, welchen die Tangenten δt und δt_1 entsprechen; den Schnittpunkten a und b von G mit T_1 und T_2 entsprechen dann die Schnittpunkte a' und b' von t mit δt und δt_1; aa' und bb' schneiden sich im perspectivischen Centrum Δ; die Tangenten aus Δ an K schneiden G in den gesuchten zwei Punkten A und B. Drehen wir nun die Gerade G um X und wählen wir wieder zur Bestimmung des perspectivischen Centrums Δ die fixen Strahlen T_1 und T_2, denen die fixen Punkte a' und b' auf t entsprechen, so beschreiben a und b zwei perspectivische Punktreihen auf T_1 und T_2, folglich sind die Strahlenbüschel, durch welche diese zwei Reihen aus a' und b' projicirt werden, projectivisch, aber auch perspectivisch, weil für die Lage t der beweglichen Geraden G die Verbindungslinie $a'b'$ ein sich selbst entsprechender Strahl wird; Δ beschreibt demnach eine Gerade, welche, wie leicht einzusehen, durch δ gehen muss; die Punktreihe Δ auf $\delta\Delta$ ist projectivisch zum Strahlenbüschel der Geraden G, wodurch wir auf $\delta\Delta$ zwei projectivische Punktreihen erhalten, deren Doppelpunkte δ und der Schnittpunkt C von $\delta\Delta$ mit C_4^3 sind. Nun sind die Punkte A und B auf den beiden Tangenten aus Δ Hauptpunkte, folglich, wenn G in t hineinfällt sowohl

---

[1] Man kann auf diesen Umstand die Construction der Wendetangente basiren.

C als auch D Hauptpunkte für die betreffenden Tangenten, folglich X und C Nebenpunkte für die Tangente t, wesshalb nach einem früheren Satze die Strahlen δX und δC den Kegelschnitt L in Punkten treffen müssen, deren Verbindungslinie durch O geht; die Strahlen δX und δC sind nämlich Strahlen der Involution, welche durch die bewegliche Tangente durch ihre zwei Nebenpunkte auf C_4^3 bestimmt wird. Um nun zu einem beliebigen Strahle G durch X die fehlenden zwei Schnittpunkte zu erhalten, suchen wir zuerst den dem Strahle δX entsprechenden Strahl δC, indem wir δX zum Schnitt bringen mit L und den Schnittpunkt d_1 mit O verbinden, welche Verbindungslinie L zum zweitenmale in d trifft; δd ist somit die Gerade, auf welcher das perspectivische Centrum Δ liegen muss, welches sich im Schnittpunkte der Geraden aa' bb' ergibt; die Tangenten aus Δ an K schneiden G in den gesuchten zwei Punkten A und B; nun müssen aber zufolge des ursprünglichen Erzeugungsgesetzes der Curve C_4^3 die Verbindungslinien δA und δB den Kegelschnitt L in zwei Punkten α und β schneiden, deren Verbindungslinien mit s den Kegelschnitt K in den zwei Berührungspunkten α_1 und β_1 der von Δ an K gelegten Tangenten schneiden müssen, wesshalb $\alpha_1\beta_1$ die Polare von Δ ist. Wir haben nun folgenden Zusammenhang: Jedem Strahle G durch X entspricht projectivisch ein Punkt Δ und diesem ein Strahl $\alpha_1\beta_1$ des Polarenbüschels, wesshalb $\alpha_1\beta_1$, eine Involution auf K bestimmen; der Strahlenbüschel, durch welchen α_1 und β_1 aus s projicirt werden, ist daher ein involutorischer und erzeugt auf L wiederum eine involutorische Reihe α, β, welche Punkte aus δ demnach auch durch einen involutorischen Büschel projicirt werden, woraus der Satz:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt X der C_4^3 Strahlen, welche die Curve in zwei weiteren Punkten schneiden, so werden diese Punktpaare aus δ durch einen involutorischen Strahlenbüschel projicirt; die den Punktpaaren entsprechenden Tangenten schneiden sich auf einem Strahle durch δ, welcher mit dem Strahle δX auch eine Involution bildet.

Jedem Punkte X gehört demnach ein involutorischer Büschel aus δ zu.[1] Für die Lage $X\delta$ der beweglichen Gerade G erhalten

[1] Es ist hiedurch die Identität dieser Curve mit dem Erzeugnisse einzweideutiger Büschel nach Dr. E. Weyr nachgewiesen.

wir demnach die zwei Doppelpunktstangenten T_1 und T_2 auch als entsprechende Strahlen der Involution. Dass umgekehrt durch einen involutorischen Büschel aus δ, in welchem T_1 und T_2 entsprechende Strahlen sind, auf C_4^3 Punktpaare ausgeschnitten werden, deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt gehen, folgt daraus, dass einerseits durch ein Strahlenpaar eine Gerade und folglich ihr dritter Schnittpunkt mit C_4^3, andererseits aber eine Involution durch zwei Elementenpaare bestimmt ist. Die leicht zu ziehenden Folgerungen, wenn A und B zusammenfallen und demnach der Strahl G zweimal zur Tangente wird, können wir, als bekannt, füglich übergehen [1] und erwähnen nur die Tangentenconstruction für einen Punkt X der C_4^3, welche sich ergibt, wenn A oder B nach X fällt.

Man bestimme den Schnittpunkt e der dem Punkte X entsprechenden Tangente mit dem Strahle δd, welcher dem Strahle δX in der durch O bestimmten Involution conjugirt ist, zieht von e die zweite Tangente an K, so ist der dieser Tangente entsprechende Punkt G der Tangentialpunkt von X.

Wenn weiters von einer Geraden G zwei Schnittpunkte mit C_4^3, z. B. A und B, schon bekannt sind, so findet man den dritten Schnittpunkt X, indem man die zu A und B gehörigen Tangenten zieht, welche sich im Punkte Δ schneiden; der dem Strahle $\delta\Delta$ durch O involutorisch zugeordnete Strahl δd_1 trifft C_4^3 im dritten Schnittpunkte X.

Diese Construction gestattet uns, einen der wichtigsten Sätze über Transversalen durch C_4^3 zu begründen. Es seien z. B. A, B, E, F vier beliebige Punkte auf C_4^3; suchen wir nun zu jedem Gegenseitenpaare dieses Viereckes die jedesmaligen dritten Schnittpunkte, so ziehen wir, wie eben bemerkt, die den Punkten A, B, E, F entsprechenden Tangenten, welche sich paarweise in $ab = \Delta$, eb, ae, af, bf und ef treffen; die dritten Schnittpunkte des Gegenseitenpaares AB, EF, werden durch zwei Gerade gefunden, welche die Punkte ab und ef aus δ projiciren, die dritten Schnittpunkte des Gegenseitenpaares AF, EB, werden durch zwei Strahlen gefunden, welche die Punkte af und eb aus δ projiciren und ebenso die dritten Schnittpunkte des Gegenseitenpaares AE, BF, durch zwei

[1] Wir verweisen diesbezüglich auf die Abhandlung Dr. E. Weyr's Über Punktsysteme auf Curven III. Ordnung. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 15. Jg. 5 H.

Strahlen, welche die Punkte *ae* und *bf* aus δ projiciren; nun bilden aber diese Strahlenpaare eine Involution, weil die Punkte *ae*, *bf*, ferner *ab*, *ef* und *af*, *eb* die Gegenecken eines vollständigen Vierseites sind, welche aus einem beliebigen Punkt δ der Ebene projicirt werden. Beachtet man nun, dass die dritten Schnittpunkte mit Hilfe dieser Strahlenpaare dadurch gefunden werden, dass man ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte L aus O wieder nach L projicirt und diese Projectionen mit δ verbindet, so folgt, dass diese Verbindungsstrahlen wieder einen involutorischen Büschel bilden müssen. In dieser Involution sind aber die Doppelpunktstangenten T_1 und T_2 entsprechende Strahlen, weil in der Involution, welche δ mit den Gegeneckenpaaren des früher besprochenen Vierseites bildet, die Tangenten des dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnittes K auch gehören, welchen Strahlen durch O die Doppelpunktstangenten zugewiesen werden. Die Verbindungslinien der dritten Schnittpunkte XY, X_1Y_1, (X_2Y_2 nicht mehr auf der Zeichnungsfläche) gehen demnach durch einen bestimmten Punkt H der Curve, woraus der Satz:

Die Gegenseitenpaare eines auf C_4^3 befindlichen Viereckes schneiden die Curve in Punktpaaren, deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt auf der Curve gehen, als dessen Folge der Satz entspringt:

Verbindet man die drei Schnittpunkte einer Geraden und C_4^3 mit den drei Schnittpunkten einer zweiten Geraden und C_4^3, so liegen die drei dritten Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit C_4^3 wieder auf einer Geraden.

Die angegebene Construction des dritten Schnittpunktes einer Geraden, wenn schon zwei bekannt sind, führt uns noch auf eine Tangentenconstruction und einige Eigenschaften der conjugirten Punkte. Sind nämlich auf G Fig. 1, Taf. I, die Schnittpunkte A und B mit C_4^3 bekannt, so wird der dritte Schnittpunkt zum Tangentialpunkt, wen A und B zusammenfallen; der Punkt Δ als Schnitt der den Punkten A und B entsprechenden Tangenten wird zum Berührungspunkt der entsprechenden zusammenfallenden Tangenten mit K; um nun z. B. für den Punkt P den Tangentialpunkt zu finden, verbinden wir den Berührungspunkt p mit δ, verbinden weiters O mit dem Schnittpunkte u von δp und L,

welche Gerade L zum zweitenmal in p_1 schneidet; δp_1 trifft C_4^3 im Tangentialpunkte R; nun trifft aber die Gerade δp den Kegelschnitt K noch in einem zweiten Punkte q, für welchen also die nämliche Construction gilt, wesshalb der der Tangente in q entsprechende Punkt Q von C_4^3 denselben Tangentialpunkt besitzen muss. Die Tangenten in p und q schneiden sich aber auf der Polare von δ bezüglich K, woraus der Satz folgt:

Zieht man von Punkten der Polare des Doppelpunktes bezüglich K Tangenten an K, so sind die diesen Tangenten entsprechenden Punktpaare auf C_4^3 conjugirt und werden aus dem Doppelpunkte durch Strahlenpaare einer Involution projicirt.

Letzteres ergibt sich, wenn man bedenkt, dass p und q auf K eine involutorische Punktreihe bilden, welche aus s auf den Kegelschnitt L projicirt wird und von hier aus δ durch einen involutorischen Büschel projicirt werden muss.

Auf ähnliche einfache Art ergeben sich auch die Sätze:

Projicirt man aus zwei conjugirten Punkten beliebige Curvenpunkte wieder in die Curve, so sind die Projectionen wieder conjugirte Punkte, und weiters:

Projicirt man aus zwei beliebigen Curvenpunkten sämmtliche Curvenpunkte wieder in die Curve, so werden die Projectionen aus δ durch zwei projectivische Büschel projicirt.[1]

Es erübrigt uns nun noch die Bestimmung der Wendepunkte, deren die Curve $3n(n-2)-6\delta-8k$ besitzt, welche Formel für $n=3$, $\delta=1$, $k=0$ den Werth drei liefert.

Für die constructive Bestimmung derselben eignet sich diejenige Definition am besten, nach welcher ein Wendepunkt der Curve derjenige einfache Punkt der Curve ist, dessen Tangentialpunkt mit ihm selbst zusammenfällt. Es sei hier ausdrücklich bemerkt, dass eigentlich erst durch die Bedingung „einfacher" Curvenpunkt der Wendepunkt strenge definirt ist, weil sonst der Doppelpunkt als Punkt, dessen Tangentialpunkt auch mit ihm zusammenfällt, auch in der Definition mit inbegriffen wäre. In der That liefert die nun folgende Construction conjugirter Punkte den

[1] Dr. E. Weyr, geometrische Mittheilungen, k. Ak. d. Wiss., 1870.

Beleg dafür. [: Denn jeder Strahl durch z schneidet den Kegelschnitt L in zwei Punkten, welche, aus δ nach C_4^3 projicirt, dort zwei conjugirte Punkte liefern. Die Tangenten aus z liefern auf diese Art zweimal den Doppelpunkt δ, und weil diesen Tangenten die Doppelpunktstangenten als Tangentialpunktsstrahlen entsprechen, so fallen auch die betreffenden Tangentialpunkte in den Doppelpunkt hinein. :]

Sämmtliche conjugirte Punkte werden nun aus dem Doppelpunkte durch eine Strahleninvolution projicirt, und man erhält zu einem Paare conjugirter Punkte Q, P, den dazugehörigen Tangentialpunkt R, indem man die entsprechenden Tangenten zieht, welche, wie bekannt, sich in einem Punkte m der Polare von δ bezüglich K schneiden müssen, wesshalb die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte pq durch δ gehen muss.

Diese Gerade schneidet nun den Kegelschnitt L in einem Punkte u, welcher mit O verbunden in L den Punkt p_1 bestimmt, der mit δ verbunden die Curve im gesuchten Tangentialpunkt R schneidet.

Jedem Strahlenpaare δP, δQ entspricht auf diese Weise durch Vermittlung des Punktes m projectivisch ein Strahl δR; die Strahlenpaare δP, δQ schneiden nun auf L Punktpaare einer Involution aus, deren Verbindungslinien somit durch einen festen Punkt z gehen müssen und ein Strahlenbüschel z bestimmen, welches mit dem Strahlenbüschel δR projectivisch ist. Der Kegelschnitt k^2 als Erzeugniss dieser beiden Büschel schneidet L ausser in δ noch in drei Punkten, für welche offenbar ein Strahl δR mit einem der Strahlen δP oder δQ zusammenfällt, somit auf C_4^3 einen Wendepunkt bestimmt. Die Curve besitzt somit drei Wendepunkte. Fällt m nach t oder t_1, so fallen die Punkte p und q zusammen und auch nach t und t_1; werden diese nun aus s nach L projicirt, so erhalten wir als Projectionen die Punkte r_1 und r, wesshalb die Tangenten in diesen Punkten in ihrem Schnitte den Punkt z liefern.

Dem Strahle zr_1 entspricht nun der Strahl δr, weil δt_1 den Kegelschnitt L in r_1', trifft, welcher Punkt mit O verbunden in L den Punkt r bestimmt; desgleichen entspricht dem Strahle zr der Strahl δr_1; die Schnittpunkte dieser entsprechenden Strahlenpaare seien II und I, so dass der Kegelschnitt k^2 durch die Punkte

δ, I, II, z geht. Um die Wendepunkte zu finden, wurde von diesem Kegelschnitte k^2 noch ein fünfter Punkt bestimmt und die Schnitte von k^2 und L ermittelt, welche aus δ projicirt die Curve in den gesuchten Wendepunkten treffen. Es sei nun w_1 ein immer reeller Schnittpunkt von k^2 und L, und W_1 der entsprechende Wendepunkt gefunden. Um nun die übrigen zwei Schnittpunkte w_2 und w_3 von L und k^2 zu finden, benützen wir die für diese Aufgabe bekannte Construction: Wir projiciren nämlich aus δ und w_1 die übrigen drei Punkte I, II und z in L hinein und suchen die Doppelpunkte dieser zwei projectivischen Reihen in L. Die Geraden δI, δII, δz, $w_1 I$, $w_1 II$, $w_1 z$ schneiden L in $1 = r_1$, $2 = r$, z_1 und $1'$, $2'$, z'; die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden $\overline{12'}$ und $\overline{21'}$, $\overline{1z'}$ und $\overline{z_1 1'}$, $\overline{2z'}$ und $\overline{z_1 2'}$ liegen in einer Geraden H, welche den Kegelschnitt L in den gesuchten Doppelpunkten schneidet; diese Gerade H geht, wie wir gleich begründen werden, durch den Pol der Geraden $w_1 z$ und man schliesst daraus, dass die drei Wendepunkte in einer Geraden liegen müssen. Denn dem Wendepunkte W_1 entspricht, wie wir gesehen haben, eine bestimmte Involution, welche wir erhalten, wenn wir den Schnittpunkt von δW_1 mit L, d. i. w_1 mit O verbinden, welche Gerade L im Punkte y trifft; y mit δ verbunden liefert eine Gerade von der Eigenschaft, dass die Tangentenpaare an K aus Punkten derselben auf C_4^3 Punktpaare bestimmen, deren Verbindungslinien durch W_1 gehen; werden die Berührungspunkte dieser Tangentenpaare aus s in L projicirt, so bilden sie dort Punktpaare einer Involution, welche mit δ verbunden die Strahlen liefern, die nach Punkten der Curve gehen, deren Verbindungslinien eben durch W_1 gehen; werden die Schnittpunkte v und w von δy mit K aus s in L projicirt und in diesen Punkten die Tangenten gezogen, so liefert ihr Schnittpunkt das Involutionscentrum M für die Punktinvolution in L; alle Strahlen, welche durch M gehen, schneiden auf diese Weise den Kegelschnitt L in Punktpaaren, welche aus δ in die Curve projicirt, dort Punktpaare einschneiden, deren Verbindungslinien durch W_1 gehen. Nun liegen aber v und w mit δ in einer Geraden, wesshalb die Verbindungslinie ihrer Projectionen aus s nach L durch z gehen muss; sie muss aber auch durch w_1 gehen, weil die Art und Weise, wie sie gefunden wurde, die nämliche ist, als hätte es sich darum gehandelt, zu

dem Strahle δW_1 des Büschels δ den entsprechenden Strahl des Büschels z zu finden, wenn nämlich die Büschel δ und z den Kegelschnitt k^2 erzeugen.

Wenn nun noch begründet wird, dass die Gerade H durch M geht, so schneidet sie L in zwei Punkten, welche durch δ projicirt, auf C_3^3 zwei Punkte, die übrigen zwei Wendepunkte liefert, deren Verbindungslinie somit durch W_1 geht.

Es ist zunächst klar, dass die Lage der Geraden H nur abhängig ist von der Lage der fünf Punkte δ, I, II, z und w_1 und vom Kegelschnitte L; aus der Entstehungsweise der Punkte I und II folgt aber, dass, wenn L gegeben ist, die Construction von H nur abhängig ist von der Lage des Punktes δ, der Lage der zwei Doppelpunktstangenten T_1 und T_2, und der Lage des Punktes w_1. Denn der Punkt II ist der Schnitt von T_1 und der Tangente in r_1, der Punkt I ist der Schnitt von T_2 und der Tangente in r; z selbst ist der Schnitt der Tangenten in r und r_1. Es sei nun Fig. 2, Taf. I, L ein beliebiger Kegelschnitt und r, r_1, δ und w_1 seien vier beliebige Punkte auf demselben; die Tangenten in r und r_1 schneiden sich in z und δr trifft zr_1 in II, δr_1 die Gerade zr in I; diese Anordnung entspricht unserem Falle in der Fig. 1. Die Punkte δ, z, w_1, I und II seien fünf Punkte eines Kegelschnittes, dessen zwei übrige Schnittpunkte mit L gesucht werden sollen.

Wir projiciren die drei Punkte I, II und z sowohl aus δ als auch aus w_1 in den Kegelschnitt und erhalten die projectivischen Reihen $1 = r_1$, $2 = r$, z_1 und $1'\,2'\,z_1'$; die Verbindungslinien $z_1\overline{2'}$ und $\overline{2z_1'}$, $\overline{1z_1'}$ und $\overline{1'z_1}$, $\overline{21'}$ und $\overline{1z'}$, schneiden sich in den Punkten α, β, γ einer Geraden und es ist leicht nachzuweisen, dass die Punkte α und β auf den Tangenten r_1z und rz liegen müssen; denn $w_1z_1'r\delta z_1 2'$ ist ein Paskal'sches Sechseck mit der Paskal'schen Linie r_1z; und $w_1z_1'r_1\delta z_1 1'$ ist ein eben solches Sechseck mit der Paskal'schen Linie rz; folglich geht die Gerade $\alpha\beta$, wie die Construction zeigt, durch den Pol m der Geraden w_1z

Da nun aber die Punkte α und β durch einfaches Ziehen der Geraden rz_1' und r_1z_1' erhalten werden, so folgt, dass bei angenommener Lage der drei Punkte r, r_1, w_1 die Lage der Geraden $\alpha\beta$ von der Lage des Punktes δ ganz unabhängig ist. Diese Unabhängigkeit ergibt sich auch aus dem Umstande, dass, wenn wir $z\delta$ bei fixen z in Bewegung setzen, der Büschel w_1II und der

Büschel $w_1 z_1$ involutorisch sind, die Verbindungslinien entsprechender Punkte $z_1 2'$ daher immer durch den festen Punkt α auf der Geraden $r_1 z$ gehen muss; denn der Büschel rz_1 ist involutorisch zum Büschel rII, wesshalb der Büschel $w_1 II$ projectivisch ist zum Büschel rz_1 und folglich auch mit dem Büschel $w_1 z_1$; dass diese beiden Büschel auch involutorisch sind, ergibt sich aus der Vertauschbarkeit der Elemente, sobald $z\delta$ durch w_1 geht.

Kehren wir nun zu Fig. 1, Taf. I, zurück, so finden wir dieselben Verhältnisse wie in Fig. 2; in L sind die 3 Punkte r, r_1 und w_1 gegeben; die Tangenten in r und r_1 schneiden sich in z und die Gerade zw_1 trifft L in z'; die Geraden $z'r$ und $2'z_1$ schneiden sich im Punkte α der Tangente in r_1; die Gerade r1' d. i. $\bar{2}\bar{1}'$ und die Gerade $2'r_1$, d. i. $\bar{2}'\bar{1}$ schneiden sich in γ; die Verbindungslinie $\alpha\gamma = H$ geht sonach durch den Pol M von $w_1 z'$ bezüglich L, woraus der bekannte Satz: Die drei Wendepunkte liegen in einer Geraden. Die Gerade $z'\delta$ schneidet C_4^3 in einem Punkte W_1', für welchen W_1 Tangentialpunkt ist.

Sobald demnach die drei Punkte r, r_1, w_1 auf dem Kegelschnitte L gegeben sind, so ist dadurch unzweideutig die Lage der Geraden $\alpha\beta$ gegeben, und wenn wir ihre Schnittpunkte mit L betrachten, so können wir sagen, dass die Lagenbeziehung dieser fünf Punkte durch die drei r, r_1 und w_1 eine vollkommen bestimmte ist, dass diese fünf Punkte demnach durch einen beliebigen Punkt in L durch fünf projectivische Strahlen projicirt werden oder dass:

Wenn die Doppelpunktstangenten und ein Wendepunktstrahl bekannt sind, die zwei anderen Wendepunktstrahlen unzweideutig bestimmt sind.[1] Dass, sobald diese drei Strahlen gegeben sind, die Construction auch vom Kegelschnitte L ganz unabhängig ist, folgt einerseits daraus, weil wir den Punkt s auf k beliebig angenommen haben und es noch unendlich viele dreifach berührende Kegelschnitte gibt, andererseits aber auch aus folgender Betrachtung: Sind z. B. k und k_1 zwei beliebige Kegelschnitte, so geschieht die projectivische Zuweisung derselben durch drei beliebig angenommene Punkte auf jedem derselben; wird nun in jedem der beiden Kegelschnitte die Construction der Geraden $\alpha\beta$ in der angegebenen Weise durchgeführt, so müssen diese Geraden die Kegelschnitte in zwei

[1] Dr. E. Weyr, geometr. Mittheilungen, p. 736.

Punkten schneiden, die mit den drei ersten fünf Punkte liefern, welche in der collinearen Beziehung entsprechende Elemente sind, d. h. ein beliebiger Punkt auf k projicirt die fünf Punkte durch fünf Strahlen, welche mit den fünf Strahlen projectivisch sind, durch welche die entsprechenden fünf Punkte auf k_1 durch einen beliebigen Punkt auf k_1 projicirt werden. Da aber die Projectivität durch drei Elemente schon bestimmt ist, folgt obige Behauptung und es folgt demnach folgende Construction, wenn T_1 und T_2 und der Wendepunktstrahl W_1 gegeben sind:

Man lege Fig. 3, Taf I, durch δ einen beliebigen Kegelschnitt L, welcher T_1T_2 und W_1 in den Punkten t, t_1 und w_1 schneidet; in t und t_1 lege man die Tangenten an L, welche sich in z schneiden; w_1 mit z verbunden, liefert in L einen Punkt z'_1, welcher mit t und t_1 verbunden auf den Tangenten zwei Punkte α und β einer Geraden bestimmen. Diese schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten, die aus δ projicirt, die übrigen zwei Wendepunktstrahlen liefern.

Man sieht übrigens aus dieser Construction, dass, sobald t und t_1 zwei reelle Punkte sind, die Gerade $\alpha\beta$ den Kegelschnitt L nur in zwei imaginären Punkten schneiden kann, woraus der bekannte Satz folgt:

Eine C_i^3 mit reellen Doppelpunktstangenten besitzt nur einen reellen Wendepunkt.

Da die projectivische constante Beziehung zwischen Wendepunktsstrahlen und Doppelpunktstangenten durch drei Elemente bestimmt ist, so wollen wir auch die umgekehrte Aufgabe betrachten, wenn nämlich die drei Wendepunktsstrahlen gegeben sind, die Doppelpunktstangenten zu finden. Die Construction ergibt sich, wenn man bedenkt, dass die Tangente Fig. 3 im Punkte w_1 die Gerade tt_1 im Pole m von w_1z treffen muss, auf folgende Art: Es sei Fig. 4, Taf. I, δw_1 der reelle Wendepunktsstrahl und die beiden imaginären seien durch die sich trennenden Strahlenpaare $\delta a \delta a_1$ und $\delta b\ \delta b_1$ gegeben. Schlagt man um δ einen beliebigen Kegelschnitt L, bringt die Geraden aa_1bb_1 zum Schnitte O und sucht die Polare p von O bezüglich L, so schneidet p den Kegelschnitt L in den zwei Punkten, welche aus δ durch die imaginären Wendepunktsstrahlen projicirt werden; ziehen wir in w_1 die Tangente, welche p in m trifft, so ist die Verbindungslinie w_1O, welche L in

z' trifft, die Polare von m. Wir haben nun durch m einen Strahl mtt_1 so zu ziehen, dass, wenn wir in den Schnittpunkten tt_1 die Tangenten ziehen und aus z' die Punkte t und t_1 in dieselben hineinprojiciren, die Punkte α und β in der Geraden p liegen. Dieser Fall tritt dann ein, wenn die Punkte z und y mit z' und μ vier harmonische Punkte sind, wobei z von z' getrennt ist. Nun bilden z und y ein Punktsystem mit den Doppelpunkten w_1 und z' und wir haben dasjenige Paar zu suchen, welches obige Bedingung erfüllt. Zu diesem Zwecke weisen wir jedem Punkte z sowohl den ihm conjugirten y als auch denjenigen y' zu, welcher mit z, μ und z' vier harmonische Punkte gibt. Dadurch werden y und y' projectivisch und die Doppelpunkte liefern die Lösung der Aufgabe. Gelangt z nach μ, so gelangt y nach $O(=A)$ und y' nach $\mu(=A')$; gelangt z nach z', so fällt y und y' nach $z'(=BB')$ und gelangt z nach w_1, so kommt y nach $w_1(=C)$ und y' nach $O(=C')$.

Die Punktreihen y und y' sind demnach durch die drei Paare AA', BB', CC', wovon BB' ein Doppelpunkt ist, projectivisch auf einander bezogen und wir haben den zweiten Doppelpunkt zu suchen. Zu diesem Zwecke projiciren wir aus einem beliebigen Punkte x von L die sechs Punkte nach L, die Verbindungslinien AC' und $A'C$ schneiden sich im Punkte v, welcher mit B verbunden in L den Punkt d gibt; die Gerade AA' muss durch m gehen, welcher Umstand zur Genauigkeit der Construction beitragen kann; wird nun schliesslich d aus x nach y projicirt, so ist my der gesuchte Strahl und schneidet L in t und t_1, welche aus δ durch die zwei Doppelpunktstangenten projicirt werden.

Nun liegt m ausserhalb L, folglich sind z und y durch L getrennt; da aber z von z' getrennt sein muss, so darf es nicht innerhalb L liegen, sondern nur ausserhalb, folglich y innerhalb und folglich schneidet my den Kegelschnitt L in zwei reellen Punkten, woraus folgt, dass, wenn zwei Wendepunkte imaginär sind, die Doppelpunktstangenten reell sind.

Bezüglich der Constructionen für den Fall imaginärer Doppelpunktstangenten, wenn nämlich δ innerhalb des Enveloppekegelschnittes k liegt, können folgende Bemerkungen genügen.

Denken wir uns Fig. 1, Taf. I, z. B. den Punkt δ innerhalb des Kegelschnittes K liegend, so ist das Tangentenpaar von δ an

K imaginär und die Doppelpunktstangenten werden folglich auch imaginär, doch ergibt sich die Construction des Punktes O wie früher; O liegt nämlich auf der immer reellen Diagonale des imaginären Vierseites, dessen imaginäre Seiten sr_1, sr, $\delta r'$ und $\delta r_1'$ und dessen reelles Gegeneckenpaar δ und s ist; die reelle Diagonale ist die Polare des Punktes δ bezüglich K; ausserdem ist O ein Diagonalpunkt des imaginären Viereckes $rr_1r'r_1'$ mit dem einen reellen Gegenseitenpaar rr_1 und $r'r_1'$ und er liegt folglich auf der Polare des Schnittpunktes dieses Gegenseitenpaares bezüglich L.

Alle durch den Punkt O bisher gewonnenen Sätze übertragen sich demnach in voller Giltigkeit auch auf den Fall, in welchem die Doppelpunktstangenten imaginär werden.

Auf die Construction der zwei Wendepunktsstrahlen übergehend, wenn die Doppelpunktstangenten und ein Wendepunktsstrahl bekannt sind, so bemerken wir für den Fall imaginärer Doppelpunktstangenten, dass Fig. 3, Taf. I, das imaginäre Tangentenpaar den beliebigen Kegelschnitt L in einem imaginären Punktpaare schneidet, dessen Verbindungslinie jedoch reell ist; sie ergibt sich als die Polare des Involutionscentrums derjenigen Involution, welche durch das involutorische Strahlenbüschel auf L erzeugt wird, dessen imaginäre Doppelstrahlen die Doppelpunktstangenten sind. Der Punkt z wird der Pol dieser Geraden; verbinden wir z mit w_1, so erhalten wir in dem Pole dieser Geraden bezüglich L den Punkt m, durch welchen die Gerade $\alpha\beta$ gehen muss und welche erhalten wird, wenn wir eine Gerade durch m so ziehen, dass sie von der gefundenen Polare tt_1 durch die Punkte z und z_1' harmonisch getrennt ist.

Denn wenn die Punkte t und t_1 imaginär sind und aus den reellen Punkten z_1' und z projicirt werden, so haben wir ein imaginäres Vierseit mit dem reellen Gegeneckenpaar z_1' und z; die übrigen zwei Gegeneckenpaare t, t_1 und α, β sind imaginär, weil zwei imaginäre Gerade, die nicht durch denselben reellen Punkt gehen, einen imaginären Schnittpunkt geben,[1] doch sind alle drei Diagonalen reell und zwei derselben, nämlich tt_1 und $w_1z'_1$, schon bekannt.

[1] Staudt, Beiträge I., pag. 82.

Wir haben demnach folgende Construction:

Sind Fig. 5, Taf. I, die imaginären Doppelpunktstangente durch die zwei sich trennenden Strahlenpaare δa, δa_1 und δb, δb_1 und ausserdem noch der reelle Wendepunktsstrahl δw_1 gegeben so legen wir durch δ einen beliebigen Kegelschnitt L und erhalten im Schnittpunkte von aa_1 und bb_1 den Punkt z, dessen Polare die frühere Gerade tt_1 ist; z mit w_1 verbunden liefert in L den Punkt z_1' und der Pol der Geraden $w_1 z$ gibt den Punkt m; ist $\alpha z \perp P$ und verbinden wir α mit β, ferner γ mit z_1', welche Geraden sich in ε schneiden und verbinden ε mit λ, welche Gerade die $w_1 z$ in μ trifft, so ist μ von β durch z und z_1' harmonisch getrennt; die Gerade $m\mu$ schneidet den Kegelschnitt L in zwei Punkten $w_2 w_3$, welche aus δ durch die zwei Wendepunktsstrahlen δw_2, δw_3 projicirt werden.

Aus der Construction folgt, weil β ausserhalb L liegt, folglich μ innerhalb liegen muss, dass die Gerade $m\mu$ den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten schneiden muss, woraus der Satz:

Eine C_4^3 mit isolirtem Doppelpunkt besitzt drei reelle Wendepunkte.

Auch diese Construction lässt sich in der Weise umkehren, dass wir die drei reellen Wendepunktsstrahlen als gegeben ansehen und nach den Doppelpunktstangenten fragen und ergibt sich die Construction mit Berücksichtigung der Schlüsse Fig. 4, Taf. I, wie folgt:

Wir legen Fig. 6, Taf. I, durch δ einen beliebigen Kegelschnitt L, verbinden zwei der Schnittpunkte, z. B. w_2 und w_3, welche Verbindungslinie durch die Tangente in w_1 im Punkte z getroffen wird; in der Polaren von m erhalten wir die Gerade $w_1 z_1'$ und wir haben nun durch m eine Gerade so zu ziehen, dass sie mit ihrem Pole z und den Strahlen mz_1' und $m\mu$ vier harmonische Elemente liefert, wobei sie von μ durch z und z_1 getrennt ist.

In ähnlicher Weise wie früher erhalten wir wieder zwei projectivische Reihen AA', BB', CC'; um C' zu finden, welche Punkt durch μ und C von z_1' harmonisch getrennt sein muss, ziehen wir $z_1' w_3$ und $w_1 m$, welche Geraden sich in u schneiden, u mit w_2 verbunden liefert C'; zur Aufsuchung des Doppelpunktes projiciren wir die Reihen aus w_3 nach L; BC' und $B'C$ schneiden

Taf. I.

Fig. 3.

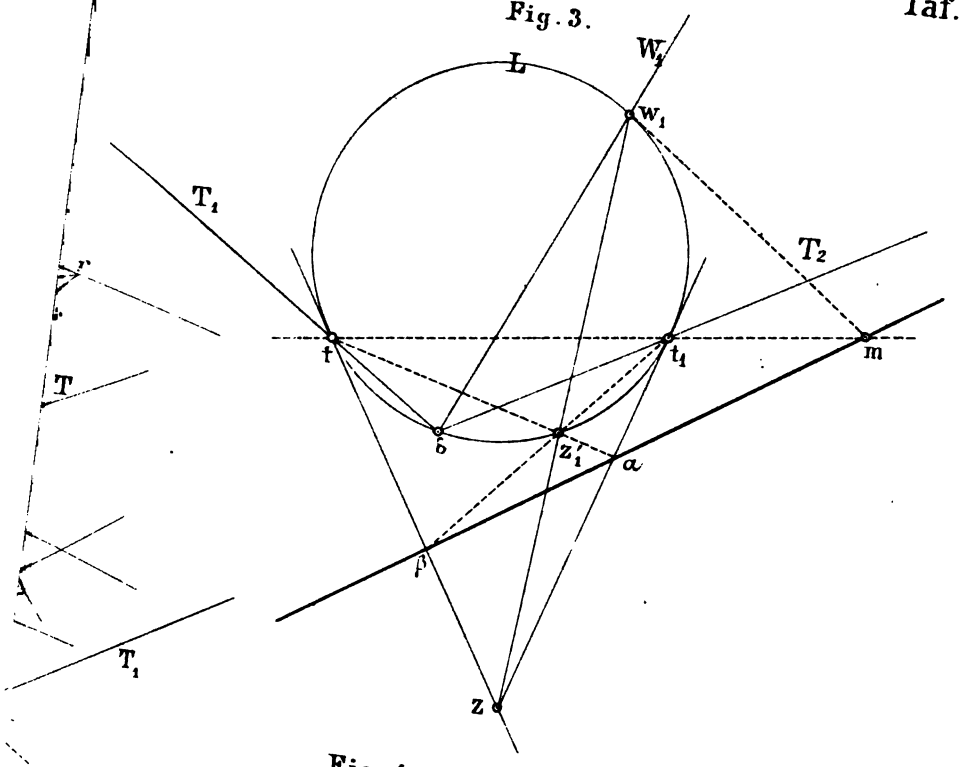
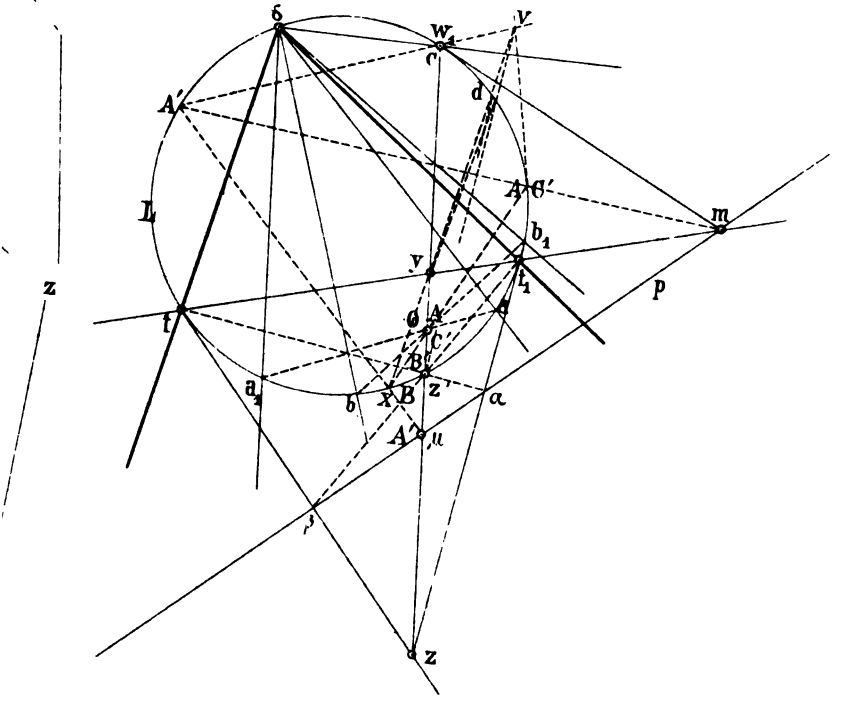


Fig. 4.



Druck v J Wagner Wien

Über Schwefelwasserstoffbildung aus Schwefel und Wasser.

Von **Josef Boehm.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. März 1882.)

Schon vor Jahren fiel es mir auf, dass Weidenzweige, welche in Verbindung mit Kautschuk unter Wasser cultivirt wurden, nach einiger Zeit zu Grunde gingen. Bei eingehender Untersuchung zeigte sich, dass dies durch Schwefelwasserstoff verursacht ist.

Im Jahre 1879 publicirte Miquel (Bull. chim. 2. Sem. t. 32) die Beobachtung einer reichlichen Schwefelwasserstoffbildung aus vulcanisirtem Kautschuk, dessen Schwefel, ähnlich dem der anderen organischen Substanzen, z. B. des Albumens, durch eine Bakterie in Form des genannten Gases abgeschieden werden soll. Bei meinen Versuchen erfolgte Schwefelwasserstoffentwicklung auch, wenn die Zweige mit Schwefelblumen bestreut wurden, und das Gleiche war der Fall, wenn statt frischer, gebrühte Stecklinge oder Leinwand verwendet wurden. Diese und andere Erscheinungen legten die alsbald auch bestätigte Vermuthung nahe, dass zur Schwefelwasserstoffbildung aus Wasser und Schwefel bei gewöhnlicher Temperatur die Anwesenheit einer organischen Substanz nicht nothwendig ist. Die Gasbildung stellt sich jedoch nur unter bestimmten Umständen ein, welche bestehen in dem Ausschlusse von Luft, in der Qualität des Wassers und in der Vorbehandlung des Schwefels.

Werden Schwefelblumen in gewöhnlichem Wasser geknetet, die aufschwimmenden entfernt und die untergesunkenen in einem offenen Gefässe nur von wenig Wasser bedeckt, so bildet sich Schwefelsäure. Werden die Blumen jedoch unter Quellwasser bei Luftabschluss aufbewahrt, so entsteht nach einiger Zeit Schwefelwasserstoff. Schwefelblumen, welche bei Luftabschluss in täglich gewechseltem Brunnenwasser während

vier Wochen oder länger digerirt wurden, erzeugen sofort Schwefelwasserstoff und nach einigen Tagen entsteht in dem betreffenden Wasser, wenn dessen Menge das Volumen der Blumen nicht sehr bedeutend übersteigt, mit kalischer Bleilösung ein schwarzer Niederschlag und mit Chlorbaryum eine mässige Trübung.[1] In geschlossenen Röhren wird besonders bei Versuchen mit zur Schwefelwasserstoffbildung nicht sehr geeigneten Blumen die Bildung des Gases schon durch eine geringe Menge von Luft dauernd gehindert. Dasselbe geschieht durch jede Säure, nur in mit Kohlensäure gesättigtem Quellwasser bildet sich nach längerer Zeit eine geringe Spur.

Ebenso wie durch Luft respective Schwefel- und andere Säuren wird die Schwefelwasserstoffbildung aus Schwefel und Quellwasser bei gewöhnlicher Temperatur verhindert durch Carbolsäure; durch Schwefelkohlenstoff vollständig nur dann, wenn die Blumen mit einigen Tropfen dieser Flüssigkeit gut gemengt wurden. Die so behandelten Blumen erhalten nach Entfernung der Beimengung, ebenso wie gekochte und solche, welche während einigen Tagen eingefroren waren, die Fähigkeit der sofortigen Schwefelwasserstoffbildung erst wieder nach längerer Digestion in täglich gewechseltem Quellwasser.

In destillirtem Wasser entsteht kein Schwefelwasserstoff und zur Bildung dieses Gases sehr geeignete Blumen verlieren die Fähigkeit der sofortigen Erzeugung desselben selbst in Quellwasser, wenn sie in reinem Wasser gewaschen und längere Zeit aufbewahrt wurden. In mit etwas Kreide versetztem destillirten Wasser bildet sich viel weniger Schwefelwasserstoff, als unter sonst gleichen Verhältnissen in Quellwasser und viel Kreide hemmt die Bildung dieses Gases auch unter sonst günstigen Umständen. In noch höherem Grade gilt dies für Gyps und besonders für eine grössere Menge luftfrei gekochten Kohlenpulvers. In letzterem Falle wird die meist schwach alkalische Flüssigkeit mit Chlorbaryum stark getrübt.

[1] Bei der Schwefelwasserstoffbildung in geschlossenen Gefässen, welche nebst Wasser mit Flocken schwefelhältiger Beggiatoa-Fäden beschickt wurden, sind diese dem Gesagten zufolge selbstverständlich ganz unbetheiligt. Vgl. Journ. f. pract. Chem. Bd. 91, 1864 und Cohn, Biologie, 3. Heft, S. 176, 1875.

Schwefelwasserstoff bildet sich auch beim Kochen von Schwefel in Wasser.[1] Brunnenwasser wird hierbei blaugrün und bei destillirtem geschieht dies nach Zusatz von Kreide. Nach allmäliger Zersetzung des Carbonates, wobei unterschwefeligsaures Salz entsteht, sowie beim Abkühlen, wird die Flüssigkeit gelblich, respective farblos. Beim Kochen von Schwefel in Wasser in einem Kolben mit aufgesetzter Röhre beschlagen sich die Wände der letzteren alsbald mit krystallinischem Schwefel, während aus dem offenen Ende Schwefelwasserstoff entweicht. Die Zerlegung des letzteren unter krystallinischer Abscheidung des Schwefels erfolgt bekanntlich nur durch schwefelige Säure: $2H_2S + SO_2 = 3S + 2H_2O$, nach welcher Gleichung wohl zweifellos auch das Gas gebildet wird. In angesäuertem Wasser bildet sich kein Schwefelwasserstoff und die Röhre bleibt, so wie beim Kochen einer Schwefelleber, rein. Auch in geschlossenen lufthältigen Röhren findet sich selbst nach anhaltendem Kochen nicht schwimmender Blumen kein Schwefelwasserstoff. Enthalten dieselben aber nebst Schwefel auch Kreide, so erscheint das Gas nach dem Verbrauche des Sauerstoffes zur Bildung von Kalksulfat.

Durch Carbolsäure wird die Schwefelwasserstoffbildung in kochendem Wasser nicht gehindert und bei einer Temperatur von 150° und darüber erfolgt dieselbe, jedoch relativ spärlich, auch in lufthältigen Röhren und in saurer Flüssigkeit.

Sowohl bei gewöhnlicher als bei höherer Temperatur ist die Bildung von Schwefelwasserstoff nicht nur aus Schwefel und Wasser, sondern auch aus Schwefellebern eine beschränkte. Durch eine gewisse Menge dieses Gases wird also die weitere Entwicklung desselben gehindert. Werden zur Schwefelwasserstoffbildung sehr geeignete Blumen längere Zeit in mit Schwefelwasserstoff gesättigtem Quellwasser aufbewahrt, so haben sie die Fähigkeit der sofortigen Bildung des in Rede stehenden Gases bei gewöhnlicher Temperatur verloren.

---

[1] Es wurde dies bereits von Girard (Compt. rend. l. 56, 1863) und von Geitner (Ann. der Chemie, Bd. 129, 1864) behauptet, von Gélis (Compt. rend. 1863) und Cossa (Berichte d. deutsch. ch. Ges. I, 1868) jedoch in Abrede gestellt.

Die niederen Sulfide der Alkalien und alkalischen Erden liefern Schwefelwasserstoff nur bei der Kochhitze. Bei Pyrit, Bleiglanz und Zinkblende geschieht dies dann, wenn dieselben als feines Pulver längere Zeit auf 150 bis 200° erhitzt werden. Die Flüssigkeit reagirt dann alkalisch und wird durch Chlorbaryum stark getrübt. Von vier luftfrei gekochten Röhren mit Bleiglanz enthielten zwei nach zehntägigem Erhitzen Schwefelwasserstoff und ein rothes Pulver (Mennige?).

Schwefelwasserstoff entsteht bekanntlich beim Einleiten von Wasserstoff in kochenden Schwefel. Es geschieht dies aber auch, wenn schwimmende Blumen in destillirtem Wasser in einer Wasserstoffatmosphäre gekocht werden. Beim Öffnen der Röhren unter Quecksilber erfolgt eine auffällige Contraction des noch unveränderten Gases, was bei Versuchen mit Schwefelblumen unter gewöhnlichem Wasser nicht geschieht. In diesem Falle wird nämlich die zur Limitirung des Processes nothwendige Gasmenge durch Zerlegung des Wassers erzeugt. Die Contraction ist eine Folge der Absorption des auf Kosten des Wasserstoffes gebildeten Gases.

Vorläufige Mittheilung über Glutaminsäure und Pyrrol.

Von **Ludwig Haitinger.**

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Prof. A. Lieben.)

Erhitzt man Glutaminsäure (Amidoglutarsäure $C_5H_9NO_4$) einige Zeit auf 180°—190°, so entweicht genau ein Molekül Wasser und es hinterbleibt eine schwach gelblich gefärbte Masse, welche durch Umkrystallisiren aus heissem Wasser in grossen, gut ausgebildeten Prismen erhalten werden kann. Dieser Körper ist wie aus der Analyse des Silber und Ammoniumsalzes hervorgeht, eine einbasische Säure und entspricht der Formel $C_5H_7NO_3$ ich will ihn vorläufig Pyroglutaminsäure benennen.

Es ist wahrscheinlich, dass bei der Entstehung der neuen Säure aus Glutaminsäure die Elemente des Wassers theils aus einer Carboxylgruppe, theils aus der Amidogruppe entnommen werden, ähnlich wie dies beim Carbostyril der Fall ist. Nimmt man für die Glutaminsäure eine unsymmetrische Structur an (was in Hinblick auf die optische Activität derselben nicht allzu gewagt erscheinen dürfte), so ist es möglich, dass die aus ihr entstehende Pyrosäure eine Atomgruppirung besitzt, welche der der Pyrrolderivate ähnliche ist. In der That erhält man bei stärkerem Erhitzen von Glutaminsäure oder einem ihrer Salze Pyrrol, welches sich leicht durch die charakteristische Rothfärbung eines mit Salzsäure befeuchteten Fichtenspanes zu erkennen gibt. Die Reaction entspricht der Gleichung:

$$C_5H_9NO_4 = C_5H_5N + 2H_2O + CO_2$$

Durch trockene Destillation von pyroglutaminsaurem Calcium konnte neben anderen höher siedenden Producten eine genügende Menge Pyrrol abgeschieden werden, um letzteres an

Siedepunkt, Verharzung mit Schwefelsäure und Bildung von unlöslichen Metalldoppelverbindungen genügend als solches zu charakterisiren.

Vorstehende Mittheilung dieser bisher noch unvollständigen Untersuchungen hat lediglich den Zweck, mir die Bearbeitung dieses Themas auf einige Zeit zu sichern und hoffe ich bald in der Lage zu sein, weitere Resultate mittheilen zu können.

Wien, den 9. Februar 1882.

Über die materiellen Theile im elektrischen Funken.

Von Dr. **Friedrich Wächter.**

(Mit 2 Holzschnitten.)

In zwei früheren Abhandlungen[1] haben Herr Professor Reitlinger und der Verfasser vorliegender Schrift Beweise dafür beigebracht, dass jene glühenden Elektrodentheilchen, welche den elektrischen Funken bilden, ausschliesslich nur durch den Austritt der positiven Elektricität von den Elektroden losgerissen und fortgeführt werden. Andererseits ist jedoch durch die Versuche von Plücker, Gassiot, Hittorf, J. Puluj u. A. bekannt, dass unter gewissen Umständen ausschliesslich an der negativen Elektrode ein Losreissen und Fortführen von Elektrodentheilchen stattfindet. Es entsteht daher die Frage, in welcher Weise diese beiden Beobachtungen in Einklang miteinander zu bringen sind?, respective, welche Unterschiede zwischen der elektropositiven und der elektronegativen Losreissung von Elektrodentheilchen bestehen?

Um zur Beantwortung dieser Frage zu gelangen, habe ich die Fortführung von Elektrodenmaterie durch positive und negative Elektricität einem vergleichenden Studium unterzogen, dessen Resultate im Nachfolgenden dargelegt werden sollen.

§ 1. Zunächst sei vorausgeschickt, dass nur die Fortführung von Elektrodentheilchen durch die discontinuirliche Funkenentladung einer gewöhnlichen Reibungs-Elektrisirmaschine, einer Influenzmaschine, Leidnerflasche oder Batterie, oder der secundären Spirale eines Inductionsapparates in Betracht gezogen ist, nicht aber die Fortführung von Elektrodentheilchen im Voltabogen oder beim Öffnungsfunken einer galvanischen Batterie oder einer dynamo-elektrischen Maschine.

---

[1] Sitzungsb. d. kais. Akad. Wien LXXXII. Bd., II. Abth., S. 180, 1880, und LXXXIII, S. 677, II. Abth. 1881.

Die Thatsache, dass der Voltabogen durch die von der positiven Elektrode losgerissenen Theilchen erzeugt wird, ist allgemein bekannt. Nicht das Gleiche gilt jedoch von der Fortführung der Elektrodentheilchen durch statische Elektricität. Alle mir bekannten Hand- und Lehrbücher der Physik gehen von der Anschauung aus, dass der elektrische Funke in gleicher Weise durch beide Elektricitätsarten hervorgebracht werde. So wird in Gehler's physikalischem Wörterbuch [1] gesagt:

„So viel ist indess als Thatsache entschieden, dass im eigentlichen elektrischen Funken stets die Thätigkeit beiderlei Elektricitäten concurrirt, wodurch derselbe sich von den blossen Feuerbüscheln und dem leckenden elektrischen Lichte unterscheidet, bei denen man allerdings bis auf einen gewissen Grad blos eine einseitige Thätigkeit einer einzelnen Elektricität annehmen kann."

Ebenso bezeichnet Th. Riess [2] die Richtung des Stromes, in Bezug auf die Losreissung von Elektrodentheilchen, als unwesentlich. Es heisst daselbst:

„Wenn ein elektrischer Strom, gleichgiltig von welcher Richtung, aus einer vollkommen reinen Metallmasse in Luft übertritt und darin intermittirt, so beginnt die Intermittenz schon im Metalle selbst. Der intermittirende Strom erhitzt, zerreisst, zerschmelzt das Metall, wie er es in einem dünnen Drahte thut, den er durchströmt.

In derselben Abhandlung theilt jedoch Riess die Erscheinung mit, dass bei häufig wiederholten Entladungen einer Leidnerflasche oder eines Inductoriums zwischen den Kugeln eines Funkenmikrometers, zwar beide Kugeln desselben Losreissungsspuren in Form kleiner Grübchen erkennen lassen, dass jedoch an der positiven Elektrode diese Grübchen viel tiefer sind, als an der negativen Elektrode. In den oben citirten Abhandlungen haben nun Herr Professor Reitlinger und ich gezeigt, dass diese Erscheinung durch alternirende Entladung bewirkt wird und man bei einseitiger Entladung die Losreissungsspuren nur an der

---

[1] Artikel „Funke, elektrischer" und „Elektricität, Theorie derselben."

[2] Abhandlungen zu der Lehre von der Reibungselektricität. Berlin 1867, pag. 274.

positiven Elektrode wahrnimmt, dass somit nur die positive Elektricität den elektrischen Funken erzeugt.

Zugleich wiesen wir nach, dass es hiefür eine untere Druckgrenze gibt (in atmosphärischer Luft bei circa 10 Mm. Quecksilberhöhe), während es uns nicht möglich war, eine obere Druckgrenze zu finden, obwohl wir unsere Versuche bis zu 6 und 8 Atmosphären ausdehnten.

Zum Nachweise dafür, dass in dem angegebenen Druckintervalle nur jene Losreissung der Elektrodentheilchen in Betracht kommt und wahrnehmbar ist, welche durch den Austritt der positiven Elektricität aus Metall in Luft oder einen anderen sogenannten Isolator bewirkt wird, dienen drei verschiedene Erscheinungen: 1. Das Hervorbringen von Losreissungsspuren auf den Elektroden in Form der erwähnten kleinen Gruben, welche bei grösserer Zahl den von uns als „centrale Aufreissungsscheibe" bezeichneten Theil der Priestley'schen Ringfiguren bilden; 2. Das Auffangen der losgerissenen Elektrodentheilchen auf einer unterstehenden Platte, wobei man „Aufstreuungsringe" erhält, wenn die auffangende Platte aus Metall besteht, und Lichtenberg'sche positive oder „Strahlenfiguren", wenn die auffangende Platte ein Isolator ist; 3. Das Ablenken der Elektrodentheilchen durch einen kräftigen Magnet.

Diese Wirkungen des Funkens, welche wir in unseren eingangscitirten beiden Abhandlungen beschrieben haben, können, mit Ausnahme der Lichtenberg'schen Figuren, nur mittelst stärkeren Leidner-Batterien oder Inductions-Apparaten grösster Art, deutlich wahrnehmbar hervorgebracht werden. Der Funke der Reibungselektrisirmaschine und Influenzmaschine ohne Condensator, sowie von kleinen und mittleren Inductionsapparaten ist hiefür zu schwach.

Eine weitere Erscheinung, welche mittelst der Reibungselektrisirmaschine erhalten werden kann und die ebenfalls dafür spricht, dass der elektrische Funke nur von der positiven Seite ausgehe, wurde von Van Marum[1] mitgetheilt. Derselbe fand

[1] Schweigg. Journ. XXIX, 475. Übrigens scheint nach einer Anmerkung in Gilberts Annalen VIII, 333, dieselbe Erscheinung schon früher von Deimann und Troostwyck beobachtet worden zu sein.

nämlich bei Versuchen mit seiner grossen Elektrisirmaschine, dass in dem Falle, wenn zwischen einem negativ elektrisirten und einem mit dem Erdboden in Verbindung stehenden, also im natürlichen Zustande sich befindenden Leiter ein Funke überspringt, die aus letzterem ausfahrenden Strahlen und Feuerbüschel ihre Richtung stets nach dem negativen Leiter hin haben. Ebenso beobachtete er beim Überspringen des Funkens zwischen einem positiv elektrisirten und einem negativen oder mit der Erde verbundenen Leiter die Äste des Funkens von dem positiven Leiter ausgehend. Van Marum folgerte hieraus, dass der elektrische Funke ausschliesslich durch den Austritt der positiven Elektricität hervorgebracht werde.

Bequemer als mit der Reibungs-Elektrisirmaschine lassen sich solche verästelte Funken mit einem Inductions-Apparate beobachten. Bringt man zwei Metallspitzen in eine etwas grössere Entfernung als jene, bei welcher noch ein continuirlicher Funkenstrom übergeht, so bemerkt man im Dunkeln an der positiven Elektrode astförmige Funken, deren Stamm auf der positiven Elektrode aufsitzt, während die negative Elektrode diese Erscheinung niemals zeigt. Noch deutlicher lässt sich dies in verdünnter Luft (700 bis etwa 50 Mm. Druck) wahrnehmen.

Eine weitere Erscheinung, welche ebenfalls für die einseitige Richtung des elektrischen Funkens spricht und die meines Wissens zuerst von Th. Riess[1] mitgetheilt wurde, ist folgende: Lässt man zwischen einer Metallspitze und einer Metallplatte den Funkenstrom eines Inductionsapparates überspringen, so geht in dem Falle, wo die Metallplatte die positive, die Metallspitze die negative Elektrode bildet, der Funke stets unveränderlich von ein und demselben, genau unter der Spitze befindlichen, Punkte der Platte aus; ist hingegen die Platte negativ, die Spitze positiv, so trifft jede einzelne Funkenendladung auf eine andere Stelle der Platte auf und der Funkenstrom ist in Folge dessen in beständiger sehr rascher Bewegung begriffen. Im ersteren Falle bildet der Funkenstrom eine unbewegliche gerade Linie, im letzteren Falle sich hin und her bewegende Curven, welche durch

[1] Abhandl. zu der Lehre von der Reibungselektricität pag. 284.

ihre rasche Aufeinanderfolge den Eindruck einer glockenförmigen Entladung machen.

Ohne auf eine Erklärung dieser Erscheinung einzugehen, scheint mir dieselbe jedenfalls ein Beleg dafür zu sein, dass der elektrische Funke, oder was dasselbe ausdrückt, die Losreissung der Elektrodentheilchen eine bestimmte Richtung habe, somit nicht von beiden Elektroden ausgehe, sondern nur von einer derselben.

Die Fortführung von Elektrodentheilchen durch negative Elektricität wurde zuerst von Plücker[1] beobachtet. Derselbe sagt: „Das Metall der Elektroden (in Geissler'schen Röhren), namentlich der negativen, wird zu dem Glase der Röhre übergeführt. Es ist dies sogar bei Platinelektroden der Fall."

Gassiot[2] untersuchte diese Erscheinung genauer und constatirte, dass es nicht „namentlich", sondern ausschliesslich die negative Elektrode sei, von welcher durch die Entladung in sehr verdünnten Gasen Elektrodentheilchen fortgeführt werden. Er wandte vierzehn verschiedene Metalle als Elektroden an und fand, dass Aluminium- und Eisenelektroden einen fast unmerklich geringen Beschlag an der Glaswand absetzen, während Platin, Silber, Kupfer und andere Metalle in verhältnissmässig kurzer Zeit eine Fortführung von Theilchen erkennen lassen.

Die allgemeine Aufmerksamkeit auf die durch negative Elektricität bewirkte Verflüchtigung der Elektroden wurde durch die Publicationen von W. Crookes[3] hingelenkt. Derselbe bezeichnete die von der Kathode fortgeschleuderten Theilchen bekanntlich als „strahlende Materie" oder „vierten Aggregatszustand".

Nähere Untersuchungen über die Bewegungsrichtung und die Entfernungen, bis zu welchen die von der Kathode losgerissenen Theilchen bei verschiedener Dichte der umgebenden Gase geführt werden, wurden von W. Hittorf[4] und J. Puluj[5] gemacht,

---

[1] Pogg. CIII, 88, 151, 1858.

[2] Rep. of Brit. Assoc. 161, pag. 38.

[3] Strahlende Materie oder der vierte Aggregatszustand. Von William Crookes. Deutsch von Dr. H. Gretschel, Leipzig 1879.

[4] Pogg. 136, pag. 1 und 197, 1869.

[5] Sitzungsb. d. kais. Akad. Wien 1880, II. Abth., LXXXI. 864.

von deren Arbeiten noch im Nachstehenden gesprochen wird. In Bezug auf die Abhängigkeit der Fortführung der Kathodentheilchen von der Dichte des Gases, in welchem die Entladung stattfindet, gibt J. Puluj als grössten Druck, bei welchem er die sogenannte Elektrodenmaterie beobachtet hat, 1·46 Mm. Quecksilber höhe an.

Ich war nun zunächst bestrebt zu eruiren, ob die Fortführung von Elektrodentheilchen durch den Austritt der negativen Elektricität an bestimmte Grade der Luftveränderung gebunden sei und an welche?

§. 2. Die Losreissung von Elektrodentheilchen durch positive Elektricität beobachteten Herr Professor Reitlinger und ich innerhalb eines Luftdruckes von 4500 Mm. bis 10 Mm; für die Losreissung durch negative Elektricität gibt J. Puluj die Druckintervalle von 1·46 Mm. bis 0·005 Mm. an. Hiernach könnte man zu der Vermuthung geführt werden, dass bei einem Luftdrucke, der zwischen 10 Mm. und 1·46 Mm. liegt, gleichsam ein Umkehrungspunkt sein müsse, bei welchem die Disaggregations-Wirkung von der Anode zur Kathode übergehe. Dies ist jedoch nicht der Fall.

Es muss hier darauf hingewiesen werden, dass zur Erkennung der Fortführung von Elektrodentheilchen durch negative Elektricität nur zwei Erscheinungen dienen: das Hervorbringen des Metallanfluges an der Glaswand und die Fluorescenz des Glases. Der Metallanflug tritt hiebei meiner Erfahrung gemäss niemals ein, ohne dass vorher Fluorescenz sichtbar gewesen wäre. Bei dem gleichen Verdünnungsgrade der Luft wird aber das Auftreten dieser beiden Erscheinungen noch durch drei andere Umstände sehr wesentlich beeinflusst, nämlich 1. durch die Entfernung der Metallelektrode von der Glaswand, 2. durch die mehr oder weniger alternirende Entladung des Inductionsapparates, 3. durch die Intensität des Funkenstromes.

In geringer die Entfernung zwischen der negativen Elektrode und der Glaswand ist, bei einem um so höheren Luftdrucke kann man Fluorescenz und Metallanflug erhalten. Indem ich immer engere Glasröhren zur Evacuation anwandte, beobachtete ich bei stets höherem Drucke die Fortführung der Elektrodentheilchen. Dies lässt nachstehende kleine Tabelle erkennen. Hiebei bezeich-

net d die Distanz zwischen der drahtförmigen Elektrode und der Glaswand und p den Druck, bei welchem Fluorescenz und Metallanflug sichtbar wurden. Die Elektroden bestanden hiebei aus einem Platindraht von 40 Mm. Länge und 0·3 Mm. Dicke.

d.	*p.*
15 Mm.	0·04 Mm.
10	0·2
6	1
3·4	5
2·7	6
2	8
0·9	15
0·6	30.

Man ersieht hieraus, dass der Metallanflug bei 15 Mm. Entfernung der Elektrode von der Glaswand erst bei einer Verdünnung von 0·04 Mm. auftritt, während derselbe bei 0·6 Mm. Entfernung schon bei 30 Mm., also einem 750mal grösseren Drucke erscheint. Bei noch engeren Röhren konnte ich weder Fluorescenz, noch Metallanflug wahrnehmen und möchte diesen Umstand hauptsächlich der starken Erwärmung der Glaswand zuschreiben, welche stets an jenen Stellen eintritt, wo das Glimmlicht bis an die Glasfläche reicht.

In ähnlicher Weise macht sich der Einfluss der alternirenden Entladung geltend. Verbindet man nämlich die drahtförmigen Elektroden einer evacuirten Glasröhre direct mit den beiden Polen eines Inductionsapparates, so muss man die eingeschlossene Luft auf eine erheblich geringere Dichte bringen, um Fluorescenz und Metallanflug zu erhalten, als wenn man gleichzeitig noch mit Hilfe eines Funkenmikrometers eine Luftstrecke einschaltet. Um hiebei das Maximum der Fluorescenz zu erreichen, genügt es nicht, dass überhaupt noch eine Luftstrecke eingeschaltet wird, sondern dieselbe muss auch eine bestimmte Länge haben, welche je nach der Schlagweite des Funkens und der Grösse des Apparates zwischen 1 und 50 Mm. variirt. Zur Erläuterung hiefür führe ich folgenden Versuch an. In einer 40 Mm. weiten Glasröhre wurde der negativen scheibenförmigen Platinelektrode eine mit Kreidepulver bestrichene Glimmerplatte in einer Entfernung von 75 Mm. gegenübergestellt. Wurde nun die Luft in

der Glasröhre bis auf 0·17 Mm. Druck ausgepumpt, so konnte man bei einer Schlagweite des Inductionsfunkens von 31 Mm. ohne Einschaltung einer Luftstrecke noch keine Fluorescenz des Kreidepulvers wahrnehmen. Wurde aber nun mit dem Funkenmikrometer eine Luftstrecke eingeschaltet, so fing bei einer Länge derselben von 10 Mm. die Fluorescenz an sichtbar zu werden; bei einer Länge der Luftstrecke von 14 Mm. war sie sehr deutlich und bei etwa 16 Mm. trat das Maximum der Helligkeit ein. In gleicher Weise wie auf die Fluorescenz wirkt das Einschalten einer Luftstrecke von bestimmter Länge auch auf die Fortführung von Kathodentheilchen befördernd ein, wie ich mich durch zahlreiche Versuche überzeugt habe.

In den Lehrbüchern der Physik wird gewöhnlich angeführt, dass nur der Öffnungsstrom des Inductionsapparates eine merkliche Schlagweite besitzt und dass die Einschaltung einer noch so kleinen Luftstrecke genüge, um das Übergehen des Schliessungsstromes vollständig zu verhindern. Diese Anschauung widerspricht aber den von Herrn Professor Reitlinger und mir gefundenen Thatsachen. Bei Erzeugung Priestley'scher Ringfiguren beobachteten wir selbst bei Einschaltung einer 30 bis 40 Mm. langen Strecke nicht verdünnter Luft gleichzeitig an beiden Elektroden Sauerstoff- und Wasserstoff-Abscheidung, respective Oxydation und Reduction der Oberfläche von polirten Metallkugeln oder Platten. Ebenso kann man in verdünnter Luft gleichzeitig an beiden Elektroden Büschel- und Glimmlicht wahrnehmen, wenngleich im dem Schliessungskreise noch eine Strecke Luft von gewöhnlicher Dichte sich befindet. Auch die oben mitgetheilte Erscheinung, dass die Fluorescenz und der Metallanflug erst bei Einschaltung einer Luftstrecke von bestimmter Länge ihr Maximum erreichen, scheint mir ein weiterer Beweis dafür zu sein, dass beide Ströme durch Luft von gewöhnlicher Dichte übergehen.

Wenn in den Schliessungskreis eines Inductionsapparates der eine Schlagweite von etwa 170 Mm. besitzt, gleichzeitig ein Galvanometer, ein Voltameter mit Wollaston'schen Spitzen und eine Luftstrecke eingeschaltet sind, so wird die Ablenkung am Galvanometer und die Wasserzersetzung im Voltameter am grössten, wenn die eingeschaltete Luftstrecke circa 10 Mm.

beträgt. Verkleinert oder vergrössert man die Luftstrecke, so nehmen Ablenkung und Wasserzersetzung ab. Dieser Umstand ist sehr leicht erklärlich, wenn man in Betracht zieht, dass auch der Schliessungsstrom in Luft von gewöhnlicher Dichte eine merkliche Schlagweite erreicht. Einerseits wird nämlich der Schliessungsstrom durch das Einsetzen einer grösseren Luftstrecke immer mehr und mehr zurückgedrängt, seine paralysirende Wirkung auf den Öffnungsstrom daher vermindert und der letztere nimmt an Stärke zu. Andererseits wird aber der Widerstand des gesammten Stromkreises durch das Einschalten einer Luftstrecke vermehrt und der Öffnungsstrom dadurch geschwächt, jedoch in geringerem Masse, als der Schliessungsstrom. Es muss daher einen gewissen Mittelwerth für die Grösse der Luftstrecke geben, bei welchem die Intensität des Öffnungsstromes ein Maximum erreicht.[1]

Nicht nur die relativ grössere Intensität des Öffnungsstromes gegenüber dem Schliessungsstrome, sondern auch eine absolut grössere Intensität bringt eine stärkere Fortführung von Elektrodentheilchen hervor. Bei gleichem Abstande der Elektroden von der Glaswand kann man daher mittelst intensiveren Funken die Fluorescenz und den Metallanflug bei grösserer Dichte der Luft erzeugen, als mittelst schwächeren Funken. Indem ich in einer 1·2 Mm. weiten Glasröhre einen sehr kräftigen Funken (17 Mm. Schlagweite) übergehen liess, konnte ich so bei einem Quecksilberdrucke von 63 Mm. Fluorescenz und Metallanflug hervorrufen. Um die sogenannte strahlende Elektrodenmaterie wahrzunehmen ist es somit nicht nöthig, Verdünnungsgrade von 0·00076 Mm. anzuwenden, wie W. Crookes angibt, sondern man kann diese Erscheinung auch schon bei 63 Mm., also einem etwa 80000mal höheren Drucke beobachten.

§. 3. Die Dichte der Luft wirkt auf die Fortführung von Anoden- und Kathodentheilchen auch noch in anderer Weise ein. Während nämlich die Quantität der in gleichen Zeiten und unter sonst gleichen Umständen durch den Austritt der positiven Elektricität losgerissenen Elektrodentheilchen mit geringer werdendem

[1] Man vergleiche hiemit die Anschauung von Koosen Pogg. XCV. — Wüllner Physik. IV, pag. 953, 1875.

Luftdrucke ebenfalls geringer wird, nimmt die Quantität der in gleichen Zeiten fortgeführten Kathodentheilchen mit dem abnehmenden Luftdrucke zu. Der Nachweis hiefür kann zwar nicht direct durch Wägung der Elektroden, d. h. durch die Gewichtsabnahme derselben bestimmt werden, weil die fortgeführten Quantitäten Elektrodenmaterie in den meisten Fällen viel zu klein sind, um selbst an einer empfindlichen Waage einen Ausschlag hervorzubringen; dagegen lässt sich dies auf andere Weise erkennen. Versucht man einen „Aufstreuungsring“ [1] mittelst einer kleinen Palladium- oder Antimonkugel in einer Wasserstoffatmosphäre bei etwa 400 Mm. Quecksilberdruck hervorzubringen, so muss die Stromdauer viermal so lange und länger währen, als zur Erzeugung eines gleich deutlich sichtbaren Ringes bei gewöhnlichem Luftdrucke erforderlich ist. Bei einem Drucke von circa 250 Mm. und darunter ist es aber überhaupt nicht mehr möglich, Aufstreuungsringe zu erhalten. Die Quantität der durch positive Elektricität fortgeführten Theilchen nimmt somit mit dem geringer werdenden Luftdrucke ab.

Lässt man dagegen einen Funkenstrom gleichzeitig durch zwei mit Metallelektroden versehene Glasröhren von gleichen Dimensionen gehen, wobei jedoch die Luft in der einen Glasröhre stärker verdünnt ist, als in der anderen, so entsteht der Metallanflug in der Nähe der negativen Elektrode weit früher und ist stets viel stärker in jener Röhre mit der höheren Verdünnung. Die Quantität der fortgeführten Kathodentheilchen ist somit bei geringerem Luftdrucke grösser.

§. 4. Auch die Entfernungen, bis auf welche Anoden- und Kathodentheilchen unter gleichen Verhältnissen geführt werden, sind verschieden. Die Anodentheilchen werden im Allgemeinen so weit geführt, als die Schlagweite des Funkens ist, welchen sie bilden. Dies lässt sich mit Hilfe von positiven Lichtenberg'schen Figuren erkennen. Man kann mit einer durchlöcherten Harzplatte noch in einer Entfernung, welche an der Grenze der Schlagweite des Funkens aufgestellt ist, Strahlenfiguren erhalten. Bei einer Schlagweite von 200 Mm. in freier Luft werden also

[1] Man sehe die Abhandlung Reitlinger und Wächter Sitzungsb. d. kais. Akad. Wien LXXXII, II. Abth., pag. 200, 1880.

auch die Anodentheilchen 200 Mm. weit geschleudert. Dies lehrt auch die spectralanalytische Untersuchung des Funkens. Die Funkenlänge ist aber nach den Versuchen von Harris[1] bekanntlich umgekehrt proportional der Dichte der Luft.

Nicht das Gleiche scheint für die Kathodentheilchen zu gelten. W. Crookes gibt an, dass die Entfernung, bis zu welcher die strahlende Elektrodenmaterie geführt wird, gleich der mittleren Weglänge der Gasmoleküle sei. J. Puluj hat jedoch diese Behauptung durch seine Messungen nicht bestätigt gefunden. Nach seinen Beobachtungen ist die Länge des dunklen Raumes an der negativen Elektrode, welcher ja eben aus Kathodentheilchen besteht, einerseits überhaupt grösser als die mittlere Weglänge und die Verbreiterung des dunklen Raumes mit dem geringer werdenden Luftdrucke wächst auch nicht in jenem Verhältnisse, wie die mittlere Weglänge der Gasmoleküle.

Hiebei ist jedoch ein Umstand zu berücksichtigen, auf welchen schon W. Hittorf hinwies. Wenn nämlich die Oberfläche der Kathode grösser ist als die Entwickelung des Glimmlichtes auf derselben, so dass also nicht die ganze Kathode mit Glimmlicht überzogen ist, so hat der dunkle Raum zwischen Kathode und Glimmlicht seine normale Ausdehnung. Ist dagegen die Oberfläche der Kathode kleiner, als die Ausbreitung des Glimmlichtes zufolge des vorhandenen Luftdruckes betragen würde, so wird das Glimmlicht auf der Kathode gleichsam zusammen gepresst und die Länge des dunklen Raumes ist grösser, als sie bei ungehinderter Ausbreitung des Glimmlichtes sein würde. Man müsste daher wohl, um vergleichbare Zahlen zu erhalten, die Länge des dunklen Raumes stets auf Elektroden von so grosser Ausdehnung messen, dass dieselben nie vollständig mit Glimmlicht überzogen sind. Diese Bedingung ist jedoch bei geringen Drucken mit mancherlei Schwierigkeiten verbunden und es war mir bisher nicht möglich, derartige Messungen auszuführen.

Um einen approximativen Vergleich dafür zu gewinnen, wie weit Anoden- und Kathodentheilchen unter gleichen Verhältnissen geführt werden, mag Folgendes dienen. Bei einer Schlag-

[1] Phil. Transactions 1834.

weite des Inductionsapparates von 170 Mm. in freier Luft wurde das Auftreten von Fluorescenz und Metallanflug an der Kathode in einer Entfernung von 0·6 Mm. erst bei einem Drucke von 63 Mm. Quecksilberhöhe beobachtet. Nach den Versuchen von Harris müsste aber ein Funke, der in der Luft unter gewöhnlichem Drucke (760 Mm.) eine Strecke von 170 Mm. durchbrechen kann, bei 63 Mm. Druck eine Strecke von 2040 Mm zurücklegen können. Die Anodentheilchen würden daher bei einem Luftdrucke von 63 Mm. unter sonst gleichen Verhältnissen $\frac{2040}{0,6} = 3400$ mal soweit geführt werden, als die Kathodentheilchen; bei 30 Mm. Druck würden die Anodentheilchen etwa 4200mal, bei 15 Mm. Druck circa 5550mal so weit geführt, als die Kathodentheilchen. Unterhalb 10 Mm. Druck hört jedoch die Fortführung von Anodentheilchen gänzlich auf und es müsste auch erst durch specielle Versuche eruirt werden, ob das Gesetz von Harris über die Schlagweite des Funkens bis zu so geringen Drucken wie 30 oder 15 Mm. giltig ist. Bei diesen Verdünnungsgraden tritt bekanntlich der hellleuchtende Funke nicht mehr auf und die Anodentheilchen werden nur in nicht glühendem Zustande überführt. Soviel ist jedoch sicher, dass unter gleichen Umständen die Anodentheilchen sich bedeutend weiter fortbewegen, als die Kathodentheilchen.

§. 5. Eine weitere Verschiedenheit zwischen der Fortführung von Anoden- und Kathodentheilchen zeigt sich darin, dass die Ausgangspunkte derselben durch verschiedene Einflüsse bedingt werden. Für die Fortführung von Anodentheilchen sind zwei Umstände massgebend, die Lage der Kathode in Beziehung zur Anode, und die Form der Anode hinsichtlich ihrer Krümmung. Die Anodentheilchen gehen stets von dem der Kathode nächstliegenden Punkte der Anode aus, welcher die kürzeste Verbindungslinie zwischen Anode und Kathode bildet.[1] Sind mehrere Punkte der Anode nahezu gleichweit von der Kathode entfernt, so gehen die Anodentheilchen von jenem Punkte aus, welcher den kleinsten Krümmungsradius, also die stärkste Krümmung hat. Ist die Anode jedoch geradezu mit einer Spitze versehen, so gehen die Anoden-

[1] Diese Erscheinungen hat W. Hittorf zuerst mitgetheilt.

theilchen selbst dann von der Spitze aus, wenn dieselbe etwas weiter von der Kathode entfernt ist, als ein anderer Punkt der Anode, nur darf der Unterschied der beiden Wege eine gewisse von der Dichte des Gases und der Schlagweite des Funkens abhängige Grenze nicht überschreiten.

Die Grösse jener Fläche, von welcher die Anodentheilchen ausgehen, hängt von der, der Entladung vorausgehenden, Elektricitätsspannung ab und ist um so grösser, je höher die Spannung. Indirect ist daher auch die Krümmung der Anodenoberfläche von Einfluss auf die Grösse der Austrittsfläche der Anodentheilchen. Bei Anwendung einer ebenen Metallplatte ist letztere Fläche (die centrale Aufreissungsscheibe) am grössten, übersteigt jedoch nach meinen Messungen selbst bei sehr hohen Spannungen nicht mehr als etwa 3 Quadratmillimeter. Die Dichte der Luft, in welcher die Entladung stattfindet, ist ganz ohne Einfluss auf die Grösse dieser Fläche.

Bezüglich der Austrittspunkte für die Kathodentheilchen kömmt die Stellung der Anode zur Kathode erst in zweiter Linie in Betracht, dagegen ist die Reinheit der Oberfläche, d. h. die Abwesenheit einer Oxydschichte und die Dichte des Gases sehr wesentlich. Wird die Oberfläche einer metallischen Kathode mit einer starken Oxydschichte überzogen und nur eine bestimmte Stelle blank gemacht, so treten die Kathodentheilchen zunächst an dieser blanken Stelle aus, selbst dann, wenn diese Stelle weiter von der Anode entfernt ist, als ein anderer Punkt der Kathode, nur darf auch hier eine von der Dichte des Gases abhängige Grenze nicht überschritten sein. Bei geringer Luftdichte ist es jedoch möglich, die Kathodentheilchen sogar auf der der Anode entgegengesetzt liegenden Seite der Kathode erscheinen zu lassen, was bei den Anodentheilchen nicht gelingt. Die Anwesenheit eines Oxydüberzuges äussert auf das Austreten der Anodentheilchen keine merkbare Wirkung, hingegen ist wieder die Krümmung der Oberfläche unwesentlich für das Austreten der Kathodentheilchen.

Wie oben erwähnt ist die Dichte der Luft ohne Einfluss auf die Grösse jener Fläche, von welcher die Anodentheilchen austreten, wirkt dagegen bestimmend auf die Grösse der Fläche, von welcher die Kathodentheilchen ausgehen. Je geringer die Dichte

der Luft, umso grösser ist letztere Fläche. Nach Analogie des von Professor Reitlinger[1] gefundenen, von Bezold[2] näher studirten Gesetzes für die Vergrösserung der Lichtenberg'schen Scheibenfiguren, sowie nach den von Professor Reitlinger und mir gemachten Messungen[3] über die Ausbreitung des Glimmlichtes bei verschiedenem Drucke, dürfte anzunehmen sein, dass die Vergrösserung der Austrittsfläche der Kathodentheilchen umgekehrt proportional ist dem Quadrate der Luftdichte. Bezeichnet p den Druck der Luft, d den Durchmesser jener kreisförmigen Flächen, von welchen die Kathodentheilchen ausgehen (die blanken Scheiben), so müsste das Product $p.d$ somit eine constante Zahl sein. In der citirten Abhandlung fanden Professor Reitlinger und ich folgende Zahlen:

p	d	$p \cdot d$
2·5 Mm.	17·5 Mm.	43·75
5	9	45
10	4·8	48.

Bei grösserem Drucke wurde das Product $p \cdot d$ immer grösser, bis zu dem vierfachen Werthe, entsprach also der Voraussetzung nicht. Bei den vielfachen Umständen, welche auf diese Messungen störenden Einfluss nehmen, spricht dies jedoch wohl noch nicht entschieden gegen obige Annahme.

Unzweifelhaft ist jedoch die Thatsache, dass die Grösse jener Fläche, von welcher die Kathodentheilchen austreten, von dem Luftdrucke abhängig ist und mit abnehmendem Luftdrucke bedeutend wächst, bei den Anodentheilchen dagegen nicht. Um einen numerischen Anhaltspunkt zur Beurtheilung hiefür zu geben, mag Folgendes dienen: Während die Anodentheilchen innerhalb eines Luftdruckes von 2280 bis 10 Mm. von einer Fläche ausgingen, die im Mittel etwa 3□ Mm. betrug, gingen die Kathodentheilchen bei einem Drucke von 40 Mm. von einer Fläche = 6□ Mm. aus, bei 10 Mm. Druck war die Fläche 18□ Mm., bei 1·25 Mm. Druck 380□ Mm., bei 0·04 Mm. Druck mehr als 40000□Mm.

---

[1] Sitzungsb. d. kais. Akad. Wien XLIII. Bd., S. 531, 1861.

[2] Pogg. 144 Bd. 337, 526, 1871.

[3] Sitzungsb. d. kais. Akad. Wien LXXXII. Bd., S. 180. — 1880.

§. 6. Ein sehr bemerkenswerther Unterschied zwischen der Fortführung von Anoden- und Kathodentheilchen besteht ferner in der Bewegungsrichtung derselben. Die Anodentheilchen gehen stets, wie in vorigen Paragraphen erwähnt wurde, von einer relativ kleinen Fläche aus und bewegen sich von da kegelförmig in der Richtung des Stromes und unter Einhaltung der kürzesten Verbindungslinie bis zur Kathode hin. Es ist also die Stellung der Kathode zur Anode, welche ihre Bewegungsrichtung bestimmt. Die Grösse des an der Anode gelegenen spitzen Winkels lässt sich hiebei annähernd mit Hilfe Lichtenberg'scher positiver Strahlenfiguren ermitteln. Der Radius der Strahlenfigur stellt die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreieckes dar, die Distanz zwischen dem Mittelpunkte der Figur und der aus einer Metallspitze bestehenden Anode bildet die andere Kathete. Es zeigt sich, dass dieser Winkel bei sogenannten dunklen Entladungen bedeutend grösser ist, als bei leuchtenden Funkenentladungen; ebenso ändert er sich mit der Spannung.

Auf die Bewegungsrichtung der Kathodentheilchen ist die Lage und Stellung der Anode, sowie die Richtung des Stromes ohne Einfluss. Die Kathodentheilchen treten unter allen Umständen senkrecht zur Oberfläche der Kathode aus und bewegen sich in dieser Richtung geradlinig fort. Die Form der Kathodenoberfläche ist somit allein massgebend für die Bewegungsrichtung der Kathodentheilchen. Auf diesen Umstand hat zuerst W. Hittorf aufmerksam gemacht. Weitere Beweise für die zur Kathodenoberfläche normale Bewegungsrichtung hat auch J. Puluj geliefert, wovon im nächsten Paragraphen gesprochen wird. Die Kathodentheilchen lassen sich ferner aus ihrer geradlinigen Bewegung auf keinerlei Weise ablenken, die Kathodenstrahlen sind weder brechbar, noch reflectirbar. Dies lassen die sogenannten „Schatten" erkennen, welche von Körpern erzeugt werden, die in die Bahn der Kathodentheilchen gestellt sind, wie dies die schönen Experimente von Hittorf, Crookes und Puluj lehren. Die Anodentheilchen dagegen sind fähig, sich in allen nur denkbaren Curven und Biegungen fortzubewegen.

§. 7. Die Einwirkung des Magnets auf die Anoden- und Kathodentheilchen lässt ebenfalls einen charakteristischen Unter-

schied derselben erkennen. Du Moncel[1] gibt an, dass der hellleuchtende Funke, also die Anodentheilchen, durch den Magnet nicht abgelenkt werden könne, sondern nur die Aureole oder Gasentladung. Herr Professor Reitlinger und ich haben jedoch experimentell nachgewiesen[2], dass auch der Funken selbst abgelenkt werden kann und zwar sehr beträchtlich; allerdings bedarf es hiezu ausserordentlich starker Magnetkräfte, wie man sie nur mit Elektromagneten grösster Art hervorbringen kann. Die Ablenkung des Funkens oder der Anodentheilchen erfolgt dann gemäss dem Biot-Laplace'schen Gesetze. Ist die Richtung des Stromes senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Magnetpole in jener Ebene, welche durch die Längsrichtung des (hufeisenförmigen) Magnets geht, so erfolgt die Ablenkung in äquatorialem Sinne. Die Anodentheilchen werden daher so abgelenkt, wie zwischen den Magnetpolen herabfallende diamagnetische Körperpartikelchen. Dabei ist es gleichgiltig, ob die betreffenden Anodentheilchen aus Eisen, Kobalt, Nickel, Platin, also paramagnetischen Metallen bestehen, oder aus Wismuth, Antimon etc, also diamagnetischen Metallen. Dieser Umstand ist insoferne auffallend, als bei den hiebei thätigen starken Magnetkräften, die Anziehungskraft in axialer Richtung, speciell auf Eisentheilchen eine sehr bedeutende ist, und dennoch werden dieselben äquatorial abgelenkt. Man sieht hieraus, dass der positivelektrische Zustand auf die Eisentheilchen einen stärkern Impuls hinsichtlich der Ablenkungsrichtung ausübt, als der specifische Magnetismus der Substanz.

Betrachtet man die Ablenkung der Kathodentheilchen durch den Magnet[3] in ihrer Gesammtheit, so lässt sich das Biot-Laplace'sche Gesetz absolut nicht darauf anwenden. Es ist dies nur dann möglich, wie J. Puluj gezeigt hat, wenn man jedes Kathodentheilchen einzeln in Betracht zieht und als ein elementares Stromelement auffasst, welcher sich, normal zur Kathodenoberfläche ausgehend, vom negativen Pole geradlinig fortbewegt und hiebei dieselben Eigenschaften hat, als ob es mit

---

[1] Recherches pag. 47. Wiedemann, Galvanismus II. Bd., §. 739.
[2] Sitzungsb. d. kais. Akad. LXXXII. Bd., S. 207. 1880.
[3] Plücker, Pogg. CIII.

statischer Elektricität geladen wäre. Nur unter dieser Voraussetzung können die Ablenkungen der Kathodentheilchen mit jenen der Anodentheilchen unter gleichem Gesichtspunkte betrachtet werden. Dies scheint mir aber ein Beweis dafür zu sein, dass die Kathodentheilchen in der That normal zur Kathodenoberfläche fortgeführt werden. Bei der oben präcisirten Stromrichtung gegenüber den Magnetpolen erfolgt die Ablenkung der Kathodentheilchen bekanntlich in axialem Sinne; es verhalten sich also hier die Partikelchen aller Metalle, inclusive des Wismuths und Antimons, wie paramagnetische Substanzen.

§. 8. Es sind noch einige weitere Verschiedenheiten zwischen Anoden- und Kathodentheilchen zu erörtern. Die Kathodentheilchen werden unter allen Umständen in nicht leuchtendem Zustande von der Kathode fortgeführt, indem sie den dunklen Raum zwischen Kathode und Glimmlicht erzeugen. Die Anodentheilchen werden hingegen sowohl in leuchtendem, als auch in nicht leuchtendem Zustande übergeführt. Leuchtend sind sie bekanntlich in dem Falle, wenn die Kathode sich in einer Entfernung von der Anode befindet, die innerhalb der Schlagweite des Funkens liegt, und wenn das zwischen den beiden Elektroden befindliche Gas hiebei nicht allzu sehr verdünnt ist. In sehr verdünnten Gasen, sowie in einer Entfernung ausserhalb der Schlagweite werden die Anodentheilchen in nicht leuchtendem Zustande fortgeschleudert. Das Vorhandensein von Anodentheilchen im leuchtenden Funken lässt sich mittelst des Spectralapparates, der Aufreissungsscheiben und der Aufstreuungsringe constatiren. Die Fortführung nicht leuchtender Anodentheilchen kann mittelst Lichtenberg'scher positiver Strahlenfiguren, sowie mittelst Aufreissungsscheiben erkannt werden. Bei Anwendung des letzteren Mittels ist jedoch ein gewisser Umstand zu berücksichtigen. Man muss hiezu nämlich eine polirte und galvanisch versilberte Kupferplatte benützen. Stellt man unter dem Recipienten der Luftpumpe einer solchen Platte, welche als Anode dient, in geringer Entfernung (8—10 Mm.) eine Metallspitze gegenüber und verdünnt die Luft bis auf etwa 15 Mm. Quecksilberdruck, so erfolgt die Entladung des Inductionsstromes nur in Form von Büschel- und Glimmlicht; von einem leuchtenden Funken ist nichts wahrzunehmen. Nach beiläufig 10 Minuten

währender Stromdauer bemerkt man jedoch, nach vorherigem Abwischen der entstandenen Pristley'schen Figur, auf der versilberten Oberfläche der Platte einen kreisrunden rothen Fleck. Derselbe rührt davon her, dass an dieser Stelle die Theilchen des Silberüberzuges fortgeschleudert wurden und dadurch die darunter liegende Kupferfläche sichtbar wurde. Dies ist ein Beweis dafür, dass bei der Entladung Anodentheilchen abgestossen wurden, ohne einen leuchtenden Funken hervorzubringen. Bei den Lichtenberg'schen Figuren kennzeichnen sich die fortgeschleuderten Anodentheilchen als einzelne Striche und Strahlen auf der Harzplatte, welche durch Bestäuben mit dem Villarsy'schen Gemenge bemerkbar gemacht werden, wie dies Herr Professor Reitlinger und ich dargelegt haben.[1]

Noch ein bemerkenswerther Unterschied zwischen Anoden- und Kathodentheilchen ist zu erwähnen. Die Anodentheilchen haben eine zwar geringe, aber immerhin messbare Grösse und werden augenscheinlich durch einzelne Partialentladungen mechanisch losgerissen. Dies erkennt man sowohl durch die Betrachtung der Anode und der Anodentheilchen unter dem Mikroskope, wie durch das die Losreissung begleitende Knistern. Bei Anwendung von Anoden aus Holz, die vorher bestäubt wurden, kann man aus der Art des Knisterns bei der dunklen Entladung im Vorhinein darauf schliessen, ob die zu erzeugende Lichtenberg'sche Figur aus wenigen oder vielen Strahlen zusammengesetzt sein wird. Legt man auf eine Metallplatte ein dünnes Glimmerblättchen und erzeugt auf demselben einen Aufstreuungsring, so kann man unter dem Mikroskope die einzelnen Anodentheilchen, aus welchen der Aufstreuungsring besteht, von einander unterscheiden. Die Anode selbst zeigt unter dem Mikroskope kraterförmige Vertiefungen.

Nach der Anschauung von J. Puluj werden auch die Kathodentheilchen mechanisch losgerissen. Puluj führt jedoch zur Begründung dieser Annahme keine experimentellen Belege an. Einige hierüber angestellte Versuche lehrten mich Folgendes: In einer T-förmigen Glasröhre wurde ein dünner Platindraht als Kathode angebracht. Die Luft in dem Rohre war soweit verdünnt,

[1] Sitzungsb. d. k. Akad. Wien LXXXIII. Bd., S. 677, II. Abth. 1881.

dass beim Durchgange des Inductionsstromes der Platindraht nur theilweise von Glimmlicht umhüllt erschien. Wurde nun der Platindraht dadurch erwärmt, dass ein galvanischer Strom denselben durchfloss, so verbreiterten sich sowohl das Glimmlicht, als auch der dunkle Raum an der Kathode auf das Anderthalb- bis Zweifache der früheren Ausdehnung, je nach dem Grade der Erhitzung des Drahtes. Um die Einwirkung des galvanischen Stromes zu vermeiden, erwärmte ich die Kathode auch auf andere Weise. Zu dem Zwecke wurde eine Metallröhre, welche an einem Ende verlöthet war, in ein weites Glasrohr eingekittet und die Luft in letzterem verdünnt. Wenn nun kochendes Wasser oder heisses Öl in die Röhre eingefüllt wurde, so verbreiterten sich im Momente des Eingiessens das Glimmlicht und der dunkle Raum an der Aussenseite der Röhre in merklicher Weise.

Die Erwärmung der Kathode wirkt somit auf die Fortführung der Kathodentheilchen fördernd ein. Dies erkennt man auch daran, dass die Kathodentheilchen von dünnen und kurzen Drähten in grösserer Quantität fortgeführt werden, als von dicken Drähten oder Metallblechen; letztere werden nämlich durch den Inductionsstrom selbst weniger erwärmt. Bei Betrachtung des Metallanfluges in der Nähe der Kathoden mittelst eines Mikroskopes ist man nicht wohl im Stande, einzelne Partikelchen zu erkennen. Ebenso lässt sich an der Kathode selbst nicht die geringste Spur einer Auflockerung der Oberfläche wahrnehmen. Die Fortführung der Kathodentheilchen ist daher meiner Anschauung nach eher als ein Verdampfen des Kathodenmetalles aufzufassen, als wie ein mechanisches Losreissen einzelner Partikel. Bei der Fortführung von Anodentheilchen war es mir nicht möglich, mit Sicherheit zu eruiren, ob das Erwärmen der Anode befördernd darauf einwirke oder nicht.

§. 9. In vorliegender Abhandlung, welche nur den Zweck hat, jene Unterschiede zu erörtern, welche zwischen der Fortführung von Anoden- und Kathodentheilchen bestehen, wurde die mit der Funkenentladung gleichzeitig stattfindende Gasentladung nicht berücksichtigt. Damit soll jedoch nicht ausgedrückt sein, dass die Stromübertragung in gasförmigen Medien vorwiegend oder ausschliesslich durch die fortgeführte Elektrodenmaterie bewirkt werde. Dies hängt vielmehr ganz von der Dichte

des Gases ab. In Gasen unter gewöhnlichem Drucke und bei grosser Schlagweite des Funkens fliesst bekanntlich nur ein geringer Theil des Stromes durch das Gas über und der grössere Stromtheil gleicht sich in dem Funken aus. Mit wachsender Verdünnung des Gases wird dagegen der Funken immer schwächer und die Gasentladung nimmt zu, bis dieselbe bei etwa 8 bis 0·1 Mm. Druck ein Maximum erreicht.

Jedoch auch hier findet eine Verschiedenheit an den beiden Elektroden statt. Während nämlich an dem positiven Pole die Gasentladung unmittelbar von der Elektrode ausgeht, erfolgt an dem negativen Pole die Stromübertragung an die Gasmoleküle nur durch Vermittlung der Kathodentheilchen. Die Büschellichtschichten werden unmittelbar von der Anode ausgesendet, die Glimmlichtschichte dagegen ist durch einen mit fortgeschleuderten Metalltheilchen erfüllten Raum von der Kathode getrennt. Hier bewirken also die in Bewegung befindlichen Kathodentheilchen den Übergang des elektrischen Stromes von der Kathode in das Gas.

Schliesslich ist noch ein Umstand zu erwähnen, welcher auf die Fortführung von Elektrodentheilchen Einfluss hat. Wie Herr Professor Reitlinger und ich dargelegt haben,[1] findet beim Übertritte des elektrischen Stromes in ein gasförmiges Medium nur dann ein Losreissen von Anodentheilchen statt, wenn die Anode aus Metall oder überhaupt einem „guten Leiter" besteht. Bei Anwendung von „Halbleitern", wie Holz, Papier, Wolle, Steinsalz etc., werden keine Anodentheilchen losgerissen und es erfolgt ausschliesslich Gasentladung, vorausgesetzt, das die Elektrode nicht mit einem staubförmigen Leiter bedeckt ist. Nachdem wir diese Thatsache constatirt hatten, lag es nahe, auch die Kathode aus einem Halbleiter herzustellen. Ich brachte daher in Glasgefässen Kathoden aus Holz oder Papier an und evacuirte hierauf die eingeschlossene Luft bis auf sehr geringen Druck. Beim Durchgange des elektrischen Stromes zeigte sich nun ein wesentlich anderes Auftreten des Glimmlichtes. Während nämlich bei metallischen Elektroden das Glimmlicht und der dunkle Raum die Kathode allseitig umhüllen, erschien bei Kathoden aus Holz

[1] Sitzungsb. d. kais. Akad. Wien LXXXIII. Bd.

oder Papier nur ein einziger Glimmlichtstrahl, der immer von dem gleichen Punkte der Kathode ausging, während der übrige Theil der Holzelektrode dunkel blieb. Dies erklärt sich wohl daraus, dass der Halbleiter in der Richtung des geringsten Widerstandes von dem Funken durchbrochen wurde und die weitere Entladung nur von dem innerhalb des Halbleiters sich befindenden metallischen Zuleiter ausging. Eine den Halbleiter umhüllende Glimmlichtschichte, sowie den dunklen Raum an der Kathode konnte ich auf keine Weise erhalten. Es werden somit weder Kathoden-, noch Anodentheilchen von Halbleitern losgetrennt. Diese Thatsache kann auch graphisch dargestellt werden. Bezeichnen die Linien *ab* und *bc* zwei verschiedene Medien, in welchen sich der elektrische Strom fortbewegt und zwar *ab* in Fig. 1 einen metallischen Leiter, *b c* ein Gas, so würde das elektrische

Fig. 1.

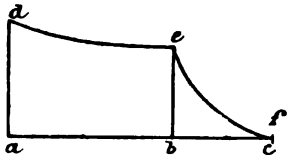
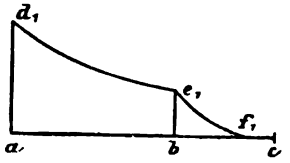


Fig. 2.



Gefälle etwa durch die beiden Curven *de* und *ef* dargestellt werden. Im Punkte *e* erleidet das Gefälle einen plötzlichen Bruch und hier ist es, wo die Losreissung von Elektrodentheilchen erfolgt. Ist hingegen *ab* ein Halbleiter, so stellt sich das elektrische Gefälle zwischen den Punkten d_1 und f_1 beiläufig, wie in Figur 2 dar. In e_1 findet zwar auch ein Bruch des Gefälles statt, aber unter einem viel stumpferen Winkel und in diesem Falle werden keine Elektrodentheilchen losgetrennt.

Dies scheint in gleicher Weise für den Übergang der Elektricität aus festen, wie aus flüssigen Elektroden in gasförmige Medien zu gelten. Für den Austritt der Anodentheilchen haben Herr Professor Reitlinger und ich bereits in der oben citirten Abhandlung mitgetheilt, dass ein Losreissen einzelner Flüssigkeitspartikel bei allen gut leitenden Flüssigkeiten, wie concentrirte Säuren, Lösungen von Metallsalzen, destillirtem Wasser und Alkohol stattfindet, bei den isolirenden Flüssigkeiten, Schwefelkohlenstoff, Benzol, Petroleum, Terpentinöl, Olivenöl dagegen

nicht. Schwefeläther scheint gegenüber atmosphärischer Luft unter gewöhnlichem Drucke jenen Übergangspunkt zu bilden, wo das Losreissen von Anodentheilchen eben aufhört.

Zur Anwendung als flüssige Kathoden konnten nur concentrirte Schwefelsäure und Olivenöl benützt werden, da die übrigen Flüssigkeiten, ihrer leichten Flüchtigkeit wegen, natürlich nicht in evacuirte Gefässe gebracht werden können. Zu dem Zwecke wurde in eine lothrecht aufgestellte Glasröhre, welche an ihren beiden Enden mit eingeschmolzenen Platindrähten versehen war, eine circa 2 Cm. hohe Schichte der betreffenden Flüssigkeit eingefüllt. Der Durchgang des elektrischen Stromes durch Olivenöl erfolgte in der Art, dass nur einzelne stossweise Entladungen die Ölschichte durchbrachen, eine Entwickelung von Glimmlicht fand dabei nicht statt. Bei Anwendung von Schwefelsäure breitete sich dagegen über der Flüssigkeitsoberfläche das Glimmlicht und der dunkle Raum genau in derselben Weise aus, wie bei einem metallischen Leiter. Dieser Umstand scheint mir ebenfalls darauf hinzudeuten, dass der dunkle Raum zwischen Kathode und Glimmlicht in der That aus dampfförmiger Substanz und nicht aus einzelnen, mechanisch losgerissenen, festen Partikeln besteht.

Schlussergebnisse.

Die im Vorstehenden dargelegten Unterschiede zwischen der Fortführung von Anoden- und Kathodentheilchen beim Durchgange des elektrischen Stromes durch ein gasförmiges Medium lassen sich also etwa folgend zusammenfassen:

1. Die Fortführung von Anodentheilchen erfolgt in atmosphärischer Luft unter einem Drucke von 4500 bis 10 Mm. Quecksilberhöhe; die Fortführung von Kathodentheilchen konnte nur unter einem Luftdrucke von 63 bis 0·005 Mm. beobachtet werden.

2. Die Quantität der in gleichen Zeiten und unter sonst gleichen Umständen losgerissenen Elektrodentheilchen nimmt an der Anode mit geringer werdendem Luftdrucke ab, an der Kathode dagegen nimmt sie mit geringer werdendem Luftdrucke zu.

3. Die Anodentheilchen werden unter denselben Verhältnissen bedeutend weiter fortgeführt, als die Kathodentheilchen (bei 63 Mm. Druck etwa 3400mal so weit).

4. Die Anodentheilchen gehen, unbeeinflusst von dem Luftdrucke, stets von einer relativ sehr kleinen Fläche aus; die Kathodentheilchen dagegen werden mit abnehmendem Luftdrucke von immer grösseren Flächen fortgeführt. (Diese letzteren Flächen erreichen eine mehr als 10000fache Grösse, als jene bei den Anodentheilchen).

5. Die Anodentheilchen treten immer nur an einer bestimmten Stelle der Anode aus und zwar jener, welche der Kathode am nächsten liegt; die Kathodentheilchen erscheinen dagegen nach Massgabe der Dichte des Gases, an der gesammten Oberfläche der Kathode.

6. Das Austreten der Anodentheilchen wird durch gekrümmte oder zugespitzte Form der Elektrode begünstigt; das Austreten der Kathodentheilchen durch eine reine, d. h. oxydfreie Oberfläche.

7. Die Bewegungsrichtung der Anodentheilchen wird durch die Stellung der Kathode zur Anode bestimmt, indem sich die Anodentheilchen in der Richtung des elektrischen Stromes auf dem Wege des geringsten Leitungswiderstandes bis zur Kathode hinbewegen. Die Bewegungsrichtung der Kathodentheilchen erfolgt stets normal zur Kathodenoberfläche, unbeeinflusst durch die Stellung der Anode und die Richtung des elektrischen Stromes.

8. Die Anodentheilchen können sich in allen denkbaren krummlinigen Bahnen bewegen; die Kathodentheilchen dagegen bewegen sich nur geradlinig und sind nicht fähig, krummlinige Bahnen zu beschreiben.

9. Die Anodentheilchen werden durch den Magnet so abgelenkt wie diamagnetische Substanzen, die Kathodentheilchen in der Art wie paramagnetische Körper.

10. Die Anodentheilchen werden sowohl in leuchtendem, wie in nicht leuchtendem Zustande überführt; die Kathodentheilchen nur in nicht leuchtendem Zustande.

11. Die Anodentheilchen haben eine messbare Grösse und werden augenscheinlich durch einzelne Impulse mechanisch losgerissen; die Kathodentheilchen sind unmessbar klein und scheinen durch einen Verdampfungsprocess zu entstehen.

12. Das Erwärmen der Elektroden wirkt auf die Fortführung von Kathodentheilchen entschieden fördernd ein, bei den Anodentheilchen konnte dies nicht mit Sicherheit constatirt werden.

13. Die Kathodentheilchen vermitteln den Übergang des elektrischen Stromes von der Elektrode an die Gasmoleküle; bei den Anodentheilchen ist dies nicht der Fall.

14. Zur Fortführung von Anodentheilchen ist, nach den Versuchen von Wiedemann und Rühlmann[1] zu schliessen, eine der Entladung vorangehende grössere Elektricitätsspannung erforderlich, als zur Fortführung von Kathodentheilchen. Der Austritt der ersteren erfolgt daher unter sonst gleichen Verhältnissen in grösseren Intervallen, als der Austritt der letzteren.

Diese Thatsachen documentiren, meiner Ansicht nach, einen Unterschied zwischen positiver und negativer Elektricität, welcher nicht als ein Gegensatz im Sinne von Plus und Minus zweier gleichartiger Zustände der Materie zu betrachten ist, sondern vielmehr als eine qualitative Verschiedenheit der beiden Elektricitätsarten.

Schliesslich erlaube ich mir, Herrn Professor Reitlinger meinen besten Dank zu sagen für die freundliche Überlassung der zur Ausführung meiner Arbeiten erforderlichen Apparate.

Wien, physikalisches Laboratorium des Prof. Dr. Edm. Reitlinger.

---

[1] Pogg. Ann. Bd. CXLV. Man sehe auch Faraday, Pogg. Ann. Bd. XLVIII, pa. 277 al. 1501.

Über das Verhalten von Quecksilberjodid zu unterschwefligsaurem Natron.

Von Dr. J. M. Eder und G. Ulm.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Februar 1882.)

I. Quecksilberjodid löst sich in einer wässerigen Lösung von unterschwefligsaurem Natron oder Kali bekanntlich in reichlicher Menge zu einer klaren, farblosen Flüssigkeit auf. Um zu bestimmen, in welchen relativen Verhältnissen die beiden Bestandtheile in der Lösung enthalten sind, wurde eine Lösung von ungefähr 20 Grm. krystallisirtem unterschwefligsauren Natron auf 100 CCm. Wasser bei 15° C. mit Quecksilberjodid gesättigt.

Die Lösung enthielt in Gewichtsprocenten:

	a)	*b)*
Quecksilberjodid	16·14	16·17
Unterschwefligsaures Natron ($Na_2S_2O_3$)	10·9	10·8

Diese Zahlen entsprechen dem Verhältniss von 1 Molecul HgJ_2 zu 2 Moleculen $Na_2S_2O_3$; d. h. 1 Theil Quecksilberjodid erfordert 1·09 Theile krystallisirtes unterschwefligsaures Natron zu seiner Auflösung.

II. Beim Verdunsten einer kalt gesättigten Lösung von Quecksilberjodid und unterschwefligsaurem Natron im Vacuum über Schwefelsäure zersetzt sich dieselbe: Sie entwickelt schweflige Säure und scheidet einen gelben, am Licht sich rasch grünschwarz färbenden Niederschlag von Quecksilberjodür aus, welchem sich später Schwefel und Schwefelquecksilber beimischt.

Beim Verdampfen zur Trockniss bildet sich Schwefelquecksilber und Jodnatrium, welche Reaction schon früher zu analytischen Trennungsmethoden benützt wurde.

III. Ammoniak, kohlensaures Ammoniak, Kali, Ferro- und Ferridcyankalium trübt nicht die Lösung. Alkohol fällt aus der

concentrirten wässerigen Lösung ein schweres, stark lichtbrechendes Öl, welches nur wenig Jod mehr enthält und durch neuerliches Lösen in Wasser und Fällen mit Alkohol von diesem befreit werden kann. Im Vacuum scheidet es (eventuell neben Quecksilberjodür) braunrothes bis braunschwarzes Schwefelquecksilber aus.

Die Zerlegungsproducte einer wässerigen Lösung von Quecksilberjodid in unterschwefligsaurem Natron durch Alkohol wurden in folgendem quantitativen Verhältniss erhalten:

In Alkohol löslich	Quecksilberjodid	11·96 Proc.
	Jodnatrium	8·47 „
	Unterschwefligsaures Natron ($Na_2S_2O_3$)	0·75 „
In Alkohol unlöslich	Unterschwefligsaures Quecksilberoxyd (HgS_2O_3)	5·57 „
	Unterschwefligsaures Natron ($Na_2S_2O_3$)	4·95 „

Die Analyse wurde in folgender Weise vorgenommen: Das Quecksilber wurde mittelst Schwefelammonium gefällt, das Filtrat zur Entfernung des letzteren mit Cadmiumnitrat versetzt und dann das Jod mittelst Silbernitrat und Salpetersäure gefällt. Die unterschweflige Säure wurde mit Chlorwasser oxydirt und dann mit Chlorbaryum als Sulfat gefällt und gewogen.

Der in Alkohol lösliche Theil enthält demnach Quecksilberjodid und Jodnatrium in einem, dem Doppelsalze $HgJ_2 \cdot (NaJ)_2$ nahe kommenden Verhältniss (für 11·96 Theile HgJ_2 sind 7·90 Theile NaJ die berechnete Menge). Die Zusammensetzung des unlöslichen Theiles deutet auf die mit unterschwefligsaurem Natron verunreinigte Verbindung $HgS_2O_3 \cdot (Na_2S_2O_3)_2$ hin, welche letztere noch nicht rein dargestellt werden konnte.[1]

Die Spaltung der Lösung von $HgJ_2 + 2Na_2S_2O_3$ durch Alkohol erfolgt demnach nach der Gleichung

$$2(HgJ_2 + 2Na_2S_2O_3) = \\ = HgS_2O_3 \cdot (Na_2S_2O_3)_2 + Na_2S_2O_3 + HgJ_2(NaJ)_2.$$

[1] Das Verhalten des in Alkohol unlöslichen Theiles beim längeren Stehen (nämlich Ausscheidung von Schwefelquecksilber) stimmt mit den Eigenschaften der Lösung von Quecksilberoxyd in unterschwefligsaurem Natron überein. Aus letzterer fällt nach Rammelsberg (Gmelin-Kraut, Handbuch der Chemie, 6. Aufl., Bd. III, S. 858) Alkohol eine dickflüssige Masse, welche mit der Zeit Schwefelquecksilber absetzt.

Aus einer Lösung von Quecksilberjodid in unterschwefligsaurem Kali fällt Alkohol seidenglänzende jodfreie Nadeln des von Rammelsberg beschriebenen[1] unterschwefligsauren Quecksilberoxyd-Kali.

IV. Die Lösung von Quecksilberjodid in unterschwefligsaurem Natron zersetzt sich unter Entwicklung von schwefliger Säure und Ausscheidung eines im Dunklen gelbrothen, im Lichte schwärzlichen Niederschlages, sowohl bei Luftabschluss, als bei Luftzutritt, langsam (nach einigen Wochen) bei gewöhnlicher Temperatur, rasch (nach einigen Stunden oder in kürzerer Zeit) beim Erwärmen. Der Niederschlag besteht aus wechselnden Mengen Quecksilberjodür, Schwefelquecksilber und Schwefel, von welchem das erstere sehr lichtempfindlich ist.

Im Lichte erfolgt eine etwas reichlichere Ausscheidung des Niederschlages, so dass man die erwähnte Lösung als lichtempfindlich, allerdings nur in geringem Grade bezeichnen muss. Das Verhältniss der Menge des Präcipitates im Lichte zu jener im Dunklen schwankt von 1 : 1·08 bis 1 : 1·12 (vergl. sub. VI).

Der Niederschlag einer mit Quecksilberjodid gesättigten concentrirten wässerigen Lösung von unterschwefligsaurem Natron zeigte beim fortgesetzten digeriren (bei Luftabschluss) in der Wärme folgende Zusammensetzung:

	I.	II.	III.	IV.
Schwefel, durch Schwefelkohlenstoff extrahirbar	0·97	0·64	3·39	41·91
Schwefel, durch Schwefelkohlenstoff nicht extrahirbar	6·31	7·96	6·62	4·98
Quecksilber	63·43	64·67	66·02	37·78
Jod	31·05	26·89	22·56	14·90
Summe .	101·76	100·17	98·59	99·57

Die Befunde wurden auf die näheren Bestandtheile Quecksilberjodür und Schwefelquecksilber gerechnet und erhalten:

---

[1] Gmelin-Kraut, Handbuch der Chemie, 6. Aufl., Bd. III, S. 851.

	I.	II.	III.	IV.
Quecksilberjodür	79·94	69·23	58·08	38·36
Schwefelquecksilber	16·87	25·90	35·38	16·61
Elementarer Schwefel, in CS_2 unlöslich	3·98	4·39	1·74	2·69
Elementarer Schwefel, in CS_2 löslich	0·97	0·64	3·39	41·91

I. war zwei Stunden bei 40 bis 50° C. digerirt; die Farbe des Niederschlages war gelb. Das Filtrat davon (II.) war drei Stunden lang 45 bis 50° C. erwärmt; Farbe des Niederschlages orangeroth. Das Filtrat III. wurde 5 bis 6 Stunden lang bei derselben Temperatur erhalten; Farbe des Niederschlages tief orangeroth. Schliesslich wurde das Filtrat (IV.) von dem letztgenannten Niederschlage durch 12 bis 15 Stunden bei etwa 50° erwärmt; Farbe des Niederschlages zinnoberroth.

Es entsteht demnach ein Niederschlag von Quecksilberjodür, welchem sich Schwefelquecksilber als Zinnober (wie die Farbe beweist) in um so grösserer Menge beimengt, je länger man die Lösung erwärmt. Zugleich fällt neben dem in Schwefelkohlenstoff unlöslichen Schwefel eine, bei fortgesetzter Erwärmung rasch wachsende, Menge von in Schwefelkohlenstoff löslichem Schwefel nieder.[1]

Enthält die Lösung von Quecksilberjodid in unterschwefligsaurem Natron einen Überschuss des letzteren, so scheidet sich beim Erwärmen unter SO_2-Entwicklung ein zinnoberrother Niederschlag, welcher keinen freien Schwefel enthält, aus, weil das unterschwefligsaure Natron den letzteren löst.

Die Analyse des Niederschlages ergab:

Quecksilber	81·70 Proc.
Schwefel	12·26 „
Jod	4·34 „

Daraus lässt sich der Gehalt zu 86·83 Proc. Schwefelquecksilber und 11·17 Proc. Quecksilberjodür berechnen.

[1] Nach Field soll die Lösung von Quecksilberjodid in unterschwefligsaurem Natron beim vorsichtigen Erwärmen jodfreien Zinnober absetzen (Jahresber. f. Chemie, 1863, S. 180). Wir erhielten niemals einen solchen.

V. Versetzt man eine Lösung von Quecksilber-Kaliumjodid ($HgJ_2.2KJ$) mit unterschwefligsaurem Natron, so erhält man beim längeren Erwärmen auf 80° C. einen schwarzen voluminösen Niederschlag. Er zeigt die Zusammensetzung:

Schwefel, durch Schwefelkohlenstoff extrahirbar	17·36 Proc.
„ „ „ nicht extrahirbar	10·11 „
Quecksilber	67·20 „
Jod	5·46 „

Daraus lässt sich berechnen:

Quecksilberjodür	14·06 Proc.
Schwefelquecksilber	67·99 „

Die schwarze Färbung des Niederschlages rührt von der Zersetzung des Quecksilberjodürs mit Jodkalium her, welche auch bei Abwesenheit von unterschwefligsaurem Natron erfolgt. Der Process erklärt sich demnach dadurch, dass das Quecksilber-Kaliumjodid primär so wie Quecksilberjodid zersetzt wird und das Jodkalium auf das Product der Reaction (Quecksilberjodür) secundär einwirkt.

VI. Wie schon erwähnt wurde, scheidet die Lösung von Quecksilberjodid in unterschwefligsaurem Natron im Dunklen einen gelben, im Lichte einen schwärzlichen Niederschlag aus. Um den Unterschied der Zusammensetzung beider Producte zu untersuchen, wurde eine Probe *(A)* der Lösung in luftdicht verschlossenen Flaschen im Lichte, eine andere *(B)* im Dunklen aufbewahrt.

	A (Im Lichte).	*B* (Im Dunklen).
Quecksilber	58.22 Proc.	64·97 Proc.
Jod	23·73 „	26·23 „
Gesammt-Schwefel	17·78 „	9·70 „
Summe	99·73 Proc.	100·90 Proc.

Daraus lässt sich berechnen:

	A (Im Lichte).	*B* (Im Dunklen).
Quecksilberjodür	61·10 Proc.	67·54 Proc.
Schwefelquecksilber	24·19 „	27·44 „
Ungebundener Schwefel	14·44 „	5·92 „

Hiezu ist zu bemerken, dass das geschwärzte „Quecksilberjodür" jedenfalls eine jodärmere Verbindung ist. Da aber trotzdem bei *A* mehr ungebundener Schwefel durch Berechnung resultirt, so ergibt sich, dass ohne Zweifel im Lichte neben dem sich alsbald schwärzenden Gemenge von Quecksilberjodür aus Schwefelquecksilber mehr Schwefel ausgeschieden wird, als bei Lichtausschluss. Die richtige Erklärung dieser Erscheinung dürfte darin liegen, dass das unterschwefligsaure Natron für sich selbst im Lichte eine reichlichere Menge Schwefel ausscheidet, als im Dunklen.

VII. Reaction der Lösung von Quecksilberjodid in unterschwefligsaurem Natron auf Silber.

Eine verdünnte Lösung davon wirkt auf frisch gefälltes metallisches Silber (mittelst Eisenvitriol aus Silbernitrat) rasch ein. Es färbt sich dunkel und geht in ein Gemisch von Quecksilberjodür und Jodsilber über.[1]

Die Analyse des gewaschenen und im Vacuum über Schwefelsäure getrockneten Niederschlages wurde in folgender Weise vorgenommen. Das Gesammt-Silber wurde durch Glühen, Reduciren des Rückstandes mit Zink und Wägen des so erhaltenen metallischen Silbers bestimmt; der an Jod nicht gebundene Theil des Silbers wurde durch Behandeln des Gemisches mit concentrirter unterschwefligsaurer Natronlösung, Glühen etc. bestimmt. Das Quecksilber wurde aus der Lösung in Salpetersäure mittelst Cyankalium und darauffolgende Zersetzung mit Salpetersäure und filtriren vom Cyansilber abgeschieden. Das Jod wurde aus dem Gemisch durch Digeriren mit Schwefelammonium, wie oben angegeben, abgeschieden.

Die Analyse ergab:

Metallisches Silber	55·03 Proc.
Silber in Form von Jodid	7·81 „

[1] Ein photographisches Silbernegativ wird durch diese Behandlung dunkler und dichter, welche Erscheinung zuerst Edwards (Photographic News, 1879, S. 514) zur Verstärkung dünner Negative benützte. H. W. Vogel schloss aus dem Verhalten solcher verstärkter Negative gegen concentrirtes unterschwefligsaures Natron, dass sie kein Schwefelquecksilber, sondern Quecksilberjodür enthalten (Photogr. Mittheil., Bd. XVI, S. 241).

Jod an Silber gebunden	9·18 Proc.
Rest vom Gesammt-Jod (an Quecksilber gebunden)	11·60 „
Quecksilber	17·15 „
Summe .	100·61 Proc.

Aus diesen Zahlen geht hervor, dass das Silber (in Folge zu kurzer Digestion)[1] nur oberflächlich verändert war und dass Silberjodid und Quecksilberjodür in einem Verhältniss vorhanden waren, welches weniger des ersteren aufweist, als einem Gemenge gleicher Molecule entspricht. Ein Theil des gebildeten Jodsilbers hatte sich nämlich in unterschwefligsaurem Natron gelöst. — Concentrirte unterschwefligsaure Natronlösung löst aus dem Niederschlag das ganze Jodsilber auf, indem zugleich ein Theil des Quecksilberjodürs sich auflöst und eine dunkler gefärbte Quecksilberverbindung zurückbleibt.

VIII. Das beschriebene Verhalten der Lösung des Quecksilberjodides in unterschwefligsaurem Natron führt zur Annahme, dass sich ein Doppelsalz von der Formel

$$HgJ_2 \cdot (Na_2S_2O_3)_2$$

bildet, wofür die Löslichkeitsbestimmung (sub I.) spricht. Es ist dies somit ein ähnliches Doppelsalz, wie das von Kessler dargestellte Doppelsalz von Quecksilbercyanid mit unterschwefligsaurem Natron.

Allerdings könnte auch angenommen werden, dass sich durch Doppelzersetzung $HgS_2O_3 \cdot (Na_2S_2O_3)_2$ neben Jodquecksilber-Jodnatrium bildet, welche Salze sich durch Alkohol (sub III.) ausscheiden lassen.

Wäre aber unterschwefligsaures Quecksilberoxyd-Natron in der Lösung enthalten, so könnte sie nicht tagelang haltbar sein, denn das erstere scheidet kurze Zeit nach seiner Entstehung Schwefelquecksilber aus; der sich allmälig bildende Niederschlag könnte dann auch nicht Quecksilberjodür enthalten, da eine in Zersetzung begriffene und dann mit Jodkalium versetzte Lösung von unterschwefligsaurem Quecksilberoxyd-Natron dennoch nicht

[1] Nach fünftägiger Digestion enthielt der Niederschlag nur mehr 1·23 Proc. metallisches Silber.

Jod in den Niederschlag aufnimmt. Ferner wirkt das letztgenannte Doppelsalz (welches nur in alkalischer Lösung beständig ist) auf Silber nicht ein, bildet kein Quecksilberoxydul und somit könnte ein etwa vorhandenes Gemisch von unterschwefligsaurem Quecksilberoxyd-Natron mit Jodquecksilber-Jodnatrium nicht die sub IV. beschriebene Reaction zeigen.

Die aus den vorstehenden Untersuchungen abgeleitete Existenz des Doppelsalzes von Quecksilberjodid mit unterschwefligsaurem Natron erscheint somit nicht zweifelhaft.

VIII. SITZUNG VOM 16. MÄRZ 1882.

Herr Dr. L. J. Fitzinger führt als Alterspräsident den Vorsitz.

Herr Enea Lanfranconi, Ingenieur in Pressburg, übermittelt ein Exemplar seines Werkes unter dem Titel: „Rettung Ungarns vor Überschwemmungen."

Das c. M. Herr Oberbergrath V. L. Ritter v. Zepharovich in Prag übersendet eine Mittheilung: „Über den Bibromkampher."

Herr Prof. Dr. Ph. Knoll in Prag übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Beiträge zur Lehre von der Athmungs-Innervation. I. Mittheilung. Athmung bei Erregung des Halsvagus durch seinen eigenen Strom."

Herr Prof. J. V. Janovsky an der höheren Staatsgewerbeschule in Reichenberg übersendet eine Abhandlung: „Über Sulfosäuren des Azobenzols".

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über eine Classe von Abel'schen Gleichungen", von Herrn Dr. B. Igel in Wien.
2. „Neue Constructionen über Flächen zweiter Ordnung mit besonderer Berücksichtigung der perspectivischen Darstellung", von Herrn Jos. Bazala, Lehrer der Mathematik und der darstellenden Geometrie an der öffentlichen Oberrealschule in der Josefstadt (Wien).

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Max Jüllig, Assistent für allgemeine Physik an der technischen Hochschule in Wien, vor, dessen Inhalt ein mechanisches Problem betrifft.

„Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von den Herren Dr. J. Kachler und Dr. F. V. Spitzer: „Über zwei isomere Bibromkampher aus Monobromkampher".

Herr Prof. Lieben überreicht ferner eine Notiz von Herrn Prof. L. v. Pebal aus Graz: „Über die Anwendung von Elektromagneten zur mechanischen Scheidung von Mineralien."

Das w. M. Herr Prof. E. Suess überreicht eine Abhandlung von Herrn Dr. Emil v. Dunikowski, betitelt: „Die Spongien, Radiolarien und Foraminiferen der unterliassischen Schichten vom Schafberge bei Salzburg."

Das w. M. Herr Hofrath Ritter v. Brücke überreicht eine Mittheilung in Bezug auf die Nachweisung des Harnstoffes mittelst Oxalsäure.

Der Secretär Herr Prof. J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über die magnetische Schirmwirkung des Eisens."

Herr F. K. Ginzel in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Astronomische Untersuchungen über Finsternisse. I. Abhandlung. Über die zwischen 26 und 103 n. Chr. stattfindenden Sonnenfinsternisse im Allgemeinen und die Finsterniss des Plutarch insbesonders."

Herr Artilleric-Hauptmann Albert v. Obermayer überreicht eine Abhandlung: „Versuche über Diffusion von Gasen." II.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXIX 1881—82 Serie terza. Transunti. Vol. VI. Fascicoli 5° & 6°. Roma, 1882; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XX. Jahrgang. Nr. 8. Wien, 1882; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Statistisches Jahrbuch für das Jahr 1879. 2. Heft. Wien, 1882; 8°.

— — Ausweise über den auswärtigen Handel der österreichisch-ungarischen Monarchie im Jahre 1880. I. Abtheilung, XLI. Jahrgang. Wien, 1881; 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VI. Nr. 11. Cöthen, 1882; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCIV. Nr. 9. Paris, 1882; 4°.

— — Oeuvres complétes d'Augustin Cauchy. 1re série. Tome I. Paris, 1882; 4°.

Danckelmann, A. v.: Die Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen in Leipzig und an einigen anderen sächsischen Stationen von 1864—1881. Leipzig, 1882; 4°.

Dupont, E'.: Notice sur la vie et les travaux de Pierre-Henry Nyst Membre de l'Académie. Bruxelles, 1822; 12°. — Sur l'origine des calcaires devoniens de la Belgique. Bruxelles, 1881; 8°.

Gesellschaft, Deutsche für Natur- und Völkerkunde Ostasiens: Mittheilungen. 25. Heft. December 1881. Yokohama, 1881; gr. 4°.

— österreichische, für Meteorologie: Zeitschrift. XVII. Band. März-Heft 1882. Wien; 8°.

— k. k. mährisch-schlesische, zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde in Brünn: Mittheilungen. LXI. Jahrgang 1881. Brünn; 4°.

— physikalisch-chemische: Journal. Tom. XIII. Nr. 9. St. Petersburg, 1881; 8°. — Tom. XIV, Nr. 1 & 2. St. Petersburg, 1882; 8°.

Goppelsdorfer, Frédéric: Premiers Résultats des études sur la Formation des matières colorantes, par voie électrochimique. Mulhouse, 1881; 8°.

Guillemard, F. H. H. M. A., M. D.: On the endemic haematuria of hot climates caused by the presence of Bilharzia haematobia. London, 1872; 8°.

Handels- und Gewerbekammer in Linz: Statistischer Bericht über die gesammten wirthschaftlichen Verhältnisse Oberösterreichs in den Jahren 1876—1880. II. Band, IV. Theil: Industrie und Gewerbe. Linz, 1881; 8°.

Hortus petropolitanus: Acta. Tomus VII. Fasciculus II. St. Petersburg, 1881; 8°.

Institute, the Anthropological of Great Britain and Ireland The Journal. Vol. XI. Nr. 3. London, 1881; 8°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k. in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. 6. (Schluss-)Heft. Wien, 1881; 8°.

Mills, Edmund J. D. Sc., F. R. S.: Researches in Thermometry. London, 1880; 4°

Museum Kralostivi ceskeho: Nowočeska Bibliothéka. Čislo XVIII. Dil V. W Praze, 1882; 8°. — Čislo XXIV. V Praze 1881; 8°. — I. Jména p. p. zakladatélu Matice ceske na konci r. 1880. II. Výtah z učtu Matice ceske za rok 1880. III. Seznam spisův a map nákladem Matice české vydanych. V Praze, 1880; 8°.

Nature. Vol. XXV. Nr. 645. London, 1882; 8°.

Naturforscher-Verein zu Riga: Korrespondenzblatt. XXIV. Riga 1881; 8°.

Osservatorio centrale del real collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bollettino mensuale. Serie 2. Vol. I. Nr. X. Torino, 1881; 4°.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXXII. Band. Jahrgang 1882. Jänner-, Februar- und März-Heft. Wien, 1882; 8°.

Salzburg: Beiträge zur Kenntniss von Stadt und Land. Ein Gedenkbuch an die 54. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte. Salzburg, 1881; 8°.

Società degli Spettroscopisti italiani: Memorie. Vol. X. 1881. Roma, 1881; 4°. — Vol. X. Dispensa 12ª Dicembre. Roma, 1881; 4°.

Société philomatique de Paris: Bulletin. 7ᵉ série, tome sixième Nr. 1. 1881—82. Paris, 1882; 8°.

— royale des sciences de Liège: Mémoires. 2ᵉ série. Tome IX. Londres, Paris, Berlin, Bruxelles, 1882; 8°.

Society the American geographical: Bulletin. 1881. Nr. 3. New York, 1881; 8°.

Verein, Nassauischer für Naturkunde: Jahrbücher. Jahrgang 33 & 34. Wiesbaden, 1880 u. 1881; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXII. Jahrgang Nr. 10; Wien, 1882; 4°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. II. Jahrgang 1882, 1. & 2. Heft. Berlin, 1882; 4°.

Über zwei isomere Bibromcampher aus Monobromcampher.

Von **J. Kachler** und **F. V. Spitzer.**

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Prof. A. Lieben.)

Im Verlaufe unserer Arbeiten über den Campher und seine Derivate, hielten wir es vom theoretischen Standpunkte für nöthig, die Bromsubstitutionsprodukte in den Kreis unserer Untersuchung zu ziehen.

Monobromcampher.

Diese bereits seit längerer Zeit bekannte Verbindung $C_{10}H_{15}BrO$ wurde von Perkin,[1] Swarts,[2] Montgolfier[3] und R. Schiff[4] untersucht. Nach den Resultaten dieser Arbeiten bildet derselbe farblose, monokline Krystalle, die bei 76° C. schmelzen und bei 274° C. unzersetzt sieden. Mit alkoholischem Kali behandelt oder in alkoholischer Lösung mit Natriumamalgam erwärmt, wird $C_{10}H_{16}O$ Campher zurückgebildet. Beim Erhitzen mit Salpetersäure hat R. Schiff eine krystallinische Substanz $C_{10}H_{14}BrNO_3$ erhalten, die er als Bromnitrocampher bezeichnet. Wir haben diese Reactionen des Monobromcamphers wiederholt und dabei die angegebenen Resultate bestätigt gefunden.

Weiterhin suchten wir die Wirkung des Phosphorpentachlorides auf den Monobromcampher festzustellen. Vermischt man denselben in feinverriebenem Zustande mit Phosphorpentachlorid, so ist keine Einwirkung bemerkbar. Beim vorsichtigen

---

[1] Annal. d. Chem. u. Pharm. Supl. 4, S. 124.

[2] Jahresb. 1866, S. 622; Zeitschrift f. Chem. 1866, S. 628. Bul. soc. chim. [2] VII, S. 498.

[3] Bul. soc. chim. 23, 1875, S. 253.

[4] Gaz. chim. 11, 178; Ber. d. deutsch. chem. Ges. 1880, S. 1406.

Erhitzen verflüssigt sich das Gemenge, ohne viel Salzsäure zu entwickeln und erstarrt wieder beim Erkalten. Hierauf mit Wasser behandelt, fiel eine weisse Substanz aus, die gepresst und getrocknet den Schmelzpunkt von 74° C. zeigte, somit unveränderter Monobromcampher war. Lässt man ein Gemenge von Phosphorchlorid und Monobromcampher etwa zwei Wochen in der Kälte stehen, so erhält man eine rauchende Flüssigkeit, die eine Lösung von unverändertem Monobromcampher in Phosphoroxychlorid ist, da die mit Wasser gefällte Verbindung wieder den Schmelzpunkt von 74° C. ergab. Es ist daraus zu ersehen, dass der Monobromcampher von Phosphorpentachlorid nicht angegriffen wird.

Der Monobromcampher liefert bei weiterer Einwirkung von Brom, Bibromcampher $C_{10}H_{14}Br_2O$. Über die Eigenschaften dieser Verbindung finden wir in der Literatur widersprechende Angaben.

Wird nach Perkin Monobromcampher mit Brom gemischt, so scheiden sich nach einiger Zeit Krystalle aus, die analog der Verbindung von Campher mit Brom $C_{10}H_{16}O.Br_2$ wahrscheinlich $C_{10}H_{15}BrO.Br_2$ sind. Beim Erhitzen wird Bromwasserstoff abgespalten und dadurch Bibromcampher $C_{10}H_{14}Br_2O$ gebildet.

Swarts gibt an, dass durch Erhitzen von Monobromcampher mit zwei Atomen Brom auf 120° C. in geschlossenen Gefässen Bibromcampher entsteht, der farblose Prismen bildet, bei 114·5° C., jedoch auch unter siedendem Wasser schmilzt und gegen 285° unter erheblicher Zersetzung destillirt. Lässt man die zur Bildung des Bibromcamphers nöthige Menge Brom direct auf Campher einwirken, so entsteht ein schwarzes, schwierig zu reinigendes Produkt.

Montgolfier hat Bibromcampher direct aus Campher und auch aus Monobromcampher dargestellt. Er gibt keinen Schmelzpunkt an und hat gefunden, dass die alkoholische Lösung seines Produktes mit Natriumamalgam behandelt, leicht Campher liefert.

R. Schiff fand für den Bibromcampher den Schmelzpunkt von 57° C. und hat daraus bei der Einwirkung von Ätzkali auf eine alkoholische Lösung Monobromcampher (Schmelzpunkt 76° C.) erhalten. Er führt auch an, dass Armstrong und Matthews [1]

[1] Journ. chem. soc. 1877.

den Schmelzpunkt des Bibromcamphers bei 57° C. gefunden haben und vermuthet, dass die in der Literatur wiederholte Angabe, der Schmelzpunkt des von Swarts dargestellten Bibromcamphers liege bei 114·5° C., in Folge eines Druckfehlers auf einem Irrthume beruhe.

Wir haben die Beobachtung gemacht, dass bei der Einwirkung von Brom auf Monobromcampher je nach den Bedingungen, unter welchen die Versuche ausgeführt werden, zwei wesentlich verschiedene Bibromderivate $C_{10}H_{14}Br_2O$ gebildet werden.

Es wurden die folgenden Versuche ausgeführt, um die Bedingungen zu ermitteln, wie diese Verbindungen entstehen. Nach der Theorie sollte die Bildung von Bibromcampher nach folgender Gleichung vor sich gehen:

$$C_{10}H_{15}BrO + 2Br = HBr + C_{10}H_{14}Br_2O.$$

I. Versuch. Wenn man nach der angeführten Gleichung entsprechende Mengen Brom mit Monobromcampher in zugeschmolzenen Röhren durch 6—8 Stunden auf 120° C. erhitzt, so enthält das Reactionsprodukt kein freies Brom mehr; es hat sich Bromwasserstoff in reichlichen Mengen und ein brauner Syrup gebildet, aus dem sich allmälig eine krystallinische Substanz ausscheidet. Die nach längerem Stehen davon abgesaugte Mutterlauge krystallisirt weiterhin nur sehr schwierig. Die feste Verbindung ist in Alkohol ziemlich leicht löslich und krystallisirt daraus in prismatischen Nadeln, die bei 61° C. schmelzen.

Die Analyse ergab Folgendes:

I. 0·3068 Grm. Substanz lieferten 0·4320 Grm. CO_2 und 0·1338 Grm. H_2O.

II. 0·2860 Grm. Substanz lieferten 0·3455 Grm. AgBr. [1]

III. 0·2626 „ „ „ 0·3162 „ „

[1] Wir haben bei dieser und allen folgenden Bestimmungen des Broms in den Bromderivaten des Camphers die Substanz mit Ätzkalk geglüht, da wir die Erfahrung gemacht hatten, dass nach der Methode von Carius die Zersetzung bei diesen Körpern oft unvollständig war.

	Gefunden			Berechnet für $C_{10}H_{14}Br_2O$
	I	II	III	
C	38·40%	—	—	C ..... 38·71%
H	4·84 „	—	—	H ..... 4·52 „
Br	—	51·41	51·24%	Br ..... 51·61 „

Die Substanz ist somit reiner Bibromcampher $C_{10}H_{14}Br_2O$.

II. Versuch. Werden die Gewichtsmengen von Monobromcampher und Brom in dem Verhältnisse von $C_{10}H_{15}BrO$ zu 3Br angewendet und wie früher durch 6—8 Stunden im zugeschmolzenen Rohre auf 120—125° C. erhitzt, so tritt auch dann die Gesammtmenge des Broms in Reaction. Es entsteht wieder viel Bromwasserstoff und ein brauner Syrup, welcher ebenfalls bei längerem Stehen Krystalle absetzt, jedoch mit absolutem Alkohol vermischt, sogleich eine pulverförmige krystallinische Ausscheidung liefert. Diese unterscheidet sich von der bei dem früheren Versuche erhaltenen dadurch, dass sie selbst in kochendem Alkohol nur schwer löslich ist und beim Abkühlen der Lösung sofort in Form von derben rechtwinkligen Tafeln erhalten wird, die abgepresst bei 114—115° C. schmelzen und, wie die Analyse zeigt, auch nach der Formel $C_{10}H_{14}Br_2O$ zusammengesetzt sind.

I. 0·2954 Grm. Substanz ergaben 0·1247 Grm. H_2O und 0·4200 Grm. CO_2.

II. 0·3435 Grm. Substanz ergaben 0·1378 Grm. H_2O und 0·4892 Grm. CO_2.

III. 0·3532 Grm. Substanz ergaben 0·1418 Grm. H_2O und 0·4972 Grm. CO_2.

IV. 0·2382 Grm. Substanz ergaben 0·2895 Grm. AgBr.

V. 0·3650 Grm. Substanz ergaben 0·4385 Grm. AgBr.

	Gefunden				
	I	II	III	IV	V
C	38·77	38·84	38·39%	—	—
H	4·69	4·45	4·46 „	—	—
Br	—	—	—	51·71,	51·45%

	Berechnet für $C_{10}H_{14}Br_2O$
C	38·71%
H	4·52 „
Br.....	51·61 „

Die von der krystallinischen Substanz abgesaugte Lösung bildete nach längerem Stehen in offenen Gefässen zwei Schichten und an den Wänden begannen sich röthliche Krystalle abzuscheiden, die auch aus der Lauge durch Destillation mit Wasserdampf in grösserer Menge erhalten werden konnten. Zwischen Papier gepresst und aus Alkohol umkrystallisirt, schmolz diese Substanz bei 76° C. und erwies sich bei der Analyse als Monobromcampher. 0·2908 Grm. Substanz lieferten 0·2394 Grm. AgBr.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_{15}BrO$
Br	35·03%	34·63%

Nach der Destillation mit Wasserdampf blieben noch bedeutende Mengen eines nicht flüchtigen zähen Öles zurück, das sich in Alkohol leicht auflöst und mit alkoholischem Kali schon in der Kälte viel Bromkalium ausscheidet. Nachdem man einige Zeit erwärmt hatte, wurde das Bromkalium abfiltrirt, im Filtrat der Alkohol abdestillirt, dann mit Wasser verdünnt und mit Äther ausgeschüttelt. Die ätherische Lösung gab nach dem Abdunsten des Äthers eine braune, ölige Masse, die nicht unverändert destillirbar ist, sondern die erhitzt, sich von selbst unter Abspaltung von Bromwasserstoff weiter zersetzt.

Diese Versuche zeigen, dass sowohl die bei 61° C., als auch die bei 115° C. schmelzende Verbindung die Zusammensetzung $C_{10}H_{14}Br_2O$ besitzen und dass somit bei der Einwirkung von Brom auf Monobromcampher zwei isomere Bibromcampher gebildet werden können. Der kürzeren Ausdrucksweise wegen, wollen wir die bei 61° C. schmelzende Verbindung α Bibromcampher und die bei 115° C. schmelzende als β Bibromcampher bezeichnen.

Aus dem Vorhergehenden ist zu ersehen, dass die Bildung des β Bibromcamphers durch die Einwirkung eines Überschusses an Brom bedingt ist. Demnach erschien es uns nicht unwahr-

scheinlich, dass der α Bibromcampher durch weitere Einwirkung von Brom in β Bibromcampher umgewandelt werden könne.

III. Versuch. Es wurde α Bibromcampher mit Brom in dem Verhältnisse von $C_{10}H_{14}Br_2O$ zu 1Br, im zugeschmolzenen Rohre durch 6 bis 8 Stunden auf 120—125° C. erhitzt. Das Reactionsprodukt enthielt kein freies Brom, dagegen viel Bromwasserstoff und bildete einen braunen, zähen Syrup. Aus dem Letzteren wurden durch Behandlung mit Alkohol Krystalle erhalten, die sich nach entsprechender Reinigung als unveränderter α Bibromcampher erwiesen. Die Mutterlauge bestand aus einem dickflüssigen Öle, aus welchem selbst nach längerem Stehen keine Krystalle erhalten werden konnten. Bei der Destillation trat unter Abspaltung von Bromwasserstoff theilweise Zersetzung ein und es ging nur wenig unveränderter α Bibromcampher in das Destillat über.

IV. Versuch. Anders verhält es sich, wenn man die dem obigen Verhältnisse entsprechende Menge Brom verdoppelt und durch 24 Stunden auf 120—125° C. erhitzt. Auch bei diesem Versuche war die Gesammtmenge des angewandten Broms in Reaction getreten und am oberen Theile der Röhren ein rothes blättriges Sublimat entstanden, welches allmälig unter Abgabe von Brom, bei 61° C. schmelzenden α Bibromcampher lieferte; es dürfte dies eine wenig beständige Verbindung von $C_{10}H_{14}Br_2O$ mit Brom gewesen sein. Der Röhreninhalt war dickflüssig, braunroth gefärbt und begann nach längerem Stehen Krystalle auszuscheiden. Durch Vermischen mit Alkohol konnte jedoch gleich ein krystallinisches Pulver erhalten werden, welches beim Umkrystallisiren aus Alkohol den charakteristischen Schmelzpunkt des β Bibromcamphers (115° C.) zeigte.

Die Analyse ergab Folgendes:

I. 0·2816 Grm. Substanz lieferten 0·3963 Grm. CO_2 und 0·1180 Grm. H_2O.

II. 0·2880 Grm Substanz lieferten 0·3500 Grm. AgBr.

	Gefunden		Berechnet für $C_{10}H_{14}Br_2O$
	I	II	
C	38·38%	—	C ..... 38·71%
H	4·65 „	—	H ..... 4·52 „
Br	—	51·71%	Br .... 51·61 „

Es lässt sich demnach durch die längere Einwirkung eines Überschusses an Brom, der α Bibromcampher in β Bibromcampher überführen.

Wir wollen nun die beiden isomeren Verbindungen und einige damit ausgeführte Reactionen beschreiben.

α Bibromcampher.

Die Darstellung dieses Körpers aus Monobromcampher bietet bei Einhaltung der bereits angegebenen Verhältnisse keine besonderen Schwierigkeiten. Wir haben eine Ausbeute von ungefähr 30% erzielt.

Der α Bibromcampher ist in Wasser so gut wie unlöslich, mit Wasserdämpfen flüchtig. In Alkohol, Äther, Essigäther, Petroleumäther leicht löslich und kann besonders aus letzteren in grossen, durchsichtigen, schön ausgebildeten Krystallen erhalten werden, die nach den Untersuchungen des Herrn Professor v. Zepharovich[1] folgende krystallographische Verhältnisse zeigen:

Krystallform rhombisch.

$$a : b : c = 0{\cdot}7925 : 1 : 0{\cdot}5143$$

$$\underset{\infty P\bar{\infty}}{b(010)} . \underset{P\bar{\infty}}{q(011)} . \underset{P\bar{\infty}}{r(101)} . \underset{\infty P}{p(110)}$$

Die Krystalle schmelzen bei 61° C., über diese Temperatur erhitzt, fangen sie an etwas zu sublimiren; beim Destilliren tritt jedoch unter Bromwasserstoffentwicklung Zersetzung ein.

Beim Erhitzen mit Wasser im zugeschmolzenen Rohre durch 12 Stunden auf 120° C., werden blos sehr geringe Mengen von Bromwasserstoff abgespalten. Der α Bibromcampher bleibt unverändert; obwohl er bei dieser Behandlung längere Zeit flüssig ist, erstarrt er dann wieder plötzlich und zeigt alle früheren Eigenschaften.

Einwirkung von alkoholischem Kali. Wird α Bibromcampher mit etwa der fünffachen Menge alkoholischem Kali im

---

[1] Sitzb. d. k. Akad. LXXXIII. Bd.

geschlossenen Rohre auf 90° C. durch 6 Stunden oder längere Zeit am Rückflusskühler erhitzt, so scheidet sich eine ziemliche Menge von Bromkalium aus. Die davon abfiltrirte Lösung trübt sich beim Verdünnen mit Wasser und riecht deutlich nach Campher. Beim Ausschütteln mit Äther und Abdunsten der ätherischen Lösung erhält man Krystalle, welche nach dem Reinigen den Schmelzpunkt von 76° C. zeigten. Die mit Äther ausgeschüttelte Flüssigkeit durch Schwefelsäure angesäuert, dann wieder mit Äther extrahirt, gibt an diesen eine braune harzartige Masse ab, welche sich beim Destilliren zersetzt. Es wird also bei der Einwirkung von alkoholischem Kali auf α Bibromcampher hauptsächlich Monobromcampher erzeugt, welcher dann zum Theile weiter in Campher übergeführt wird. Dasselbe Resultat hat R. Schiff mit seinem (bei 57° C. schmelzenden) Bibromcampher erhalten.

Einwirkung von Natriumamalgam. Wenn eine Lösung von α Bibromcampher in verdünntem Alkohol und Äther mit einem Überschusse von zweipercentigem Natriumamalgam auf dem Wasserbade erwärmt wird, so entsteht Campher und Monobromcampher. Letzterer kann aus der alkoholischen Lösung isolirt und schliesslich vollständig in Campher übergeführt werden.

α Bibromcampher in ätherischer Lösung mit Natriumamalgam und mit Salzsäure gesättigtem Äther behandelt, bildet Campher neben etwas Oel.

Phosphorpentachlorid verändert den Körper in der Kälte nicht, auch beim Erhitzen tritt blos Lösung ein und durch Fällen mit Wasser kann man die unveränderte Substanz wieder erhalten.

Einwirkung von Natrium und Kohlensäure. 10 Gr. α Bibromcampher wurden in Toluol gelöst, mit 6 Grm. Natrium ($C_{10}H_{14}Br_2O + 4Na$ entsprechen 2·9 Grm. Na) unter gleichzeitigem Einleiten von trockener Kohlensäure durch etwa 6 Stunden auf 120° C. erhitzt und hierauf im Kohlensäurestrom erkalten lassen. Das Toluol wurde von der ausgeschiedenen Salzmasse, welche noch viel metallisches Natrium enthielt, abgegossen. Diese wurde vorsichtig, nach und nach, mit Wasser in Lösung gebracht und auch das Toluol mit Wasser ausgeschüttelt. Die

wässerigen Lösungen wurden dann vereinigt; in denselben konnte selbst nach 24stündigem Stehen keine Borneolausscheidung bemerkt werden. Beim Versetzen der stark alkalischen Lösung mit verdünnter Schwefelsäure trat keine Entwicklung von Kohlensäure auf, die Flüssigkeit trübte sich und wurde mit Äther ausgeschüttelt. Die ätherische Lösung hinterliess nach dem Abdunsten eine schwach gelblich gefärbte, halbfeste, theilweise krystallinische Masse. Mit heissem Wasser behandelt, konnte die Substanz nahezu vollständig in Lösung gebracht werden; die filtrirte Lösung schied beim Abkühlen farblose Krystallnadeln ab, die bei 123 bis 124° C. schmolzen und sich als reine Campherkohlensäure erwiesen. Auch der von Wasser nicht gelöste, geringe Theil, konnte durch Behandeln mit Ätzkali, Ausfällen mit Schwefelsäure und neuerliches Auflösen in Wasser, weiter vollständig in krystallinische Campherkohlensäure übergeführt werden.

Es zeigt sich somit, dass der α Bibromcampher durch Einwirkung von Natrium und Kohlensäure in Campherkohlensäure umgewandelt werden kann, eine Reaction, welche offenbar für die Constitution dieser beiden Verbindungen von grosser Wichtigkeit ist. Wir werden hierauf bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen.

Einwirkung von Salpetersäure. Wenn man α Bibromcampher mit gewöhnlicher concentrirter Salpetersäure im Proberöhrchen erhitzt, so schmilzt derselbe zunächst und wird schliesslich gelöst, ohne dass selbst beim Kochen rothe Dämpfe entwickelt werden. Beim Erkalten der Lösung oder beim Fällen mit Wasser wird die Substanz wieder unverändert erhalten. Wendet man jedoch ein Gemenge von gleichen Theilen concentrirter und rauchender Salpetersäure an, so tritt bei längerem Stehen Lösung ein; wird dann destillirt, so geht mit Salpetersäure ein schweres, rothbraunes Öl über. Unterbricht man nach einiger Zeit die Destillation, so ist auch im Rückstande eine derartige ölige Ausscheidung vorhanden. Das Öl in der Vorlage und im Rückstande verhielt sich vollständig gleich und wurde durch wiederholtes Destilliren mit Salpetersäure nicht weiter verändert.

Das ölige Produkt löst sich nicht beim Behandeln mit Wasser und wurde bei öfterem Ausschütteln heller; die wässerige Lösung zeigte keine Bromreaction. Das Öl ist mit Wasserdämpfen flüchtig

und wird selbst beim Schütteln mit kohlensaurem Kali oder Ätzkali nicht fest. Das in ätherischer Lösung sorgfältig mit Wasser gewaschene Öl erwies sich stickstoff- und bromhaltig. Es wurde vorläufig nicht weiter untersucht.

β Bibromcampher.

Wie aus den bereits angeführten Versuchen hervorgeht, entsteht diese Verbindung, wenn auf Monobromcampher ein Überschuss von Brom durch längere Zeit bei höherer Temperatur in geschlossenen Gefässen einwirkt. Das bei Darstellung grösserer Mengen dieses Körpers befolgte Verfahren soll hier etwas näher beschrieben werden. Auf 11 Grm. Monobromcampher gibt man 15 Grm. Brom in jede Röhre und erhitzt selbe in etwas geneigter Lage durch 10—12 Stunden auf 125—130° C. Bei der grossen Menge des dabei gebildeten Bromwasserstoffgases und des hiedurch bedingten bedeutenden Druckes empfiehlt es sich, möglichst geräumige, respective lange Glasröhren zu verwenden. [1] Nach dem Öffnen der Röhren findet sich in denselben eine dicke, braune aber durchsichtige Flüssigkeit vor, die beim Ausleeren durch den entweichenden Bromwasserstoff zu einem gelblichen Schlamme aufgetrieben wird. Nach dem Zusammensinken desselben und Abrauchen des Bromwasserstoffes ist das Produkt meist zu einer bräunlichen, deutlich krystallinischen Masse erstarrt. Wird dieselbe mit absolutem Alkohol, dem man etwas Äther zufügt, vermengt, so bleibt der gebildete β Bibromcampher als ein feines krystallinisches, wenig gefärbtes Pulver ungelöst, während aus der braunen alkoholischen Lauge nach einigem Stehen sich noch geringe Mengen der Verbindung ausscheiden. Durch Absaugen wird die Substanz nahezu weiss, und es genügt, ein zweimaliges Umkrystallisiren aus kochendem, absolutem Alkohol, um sie vollständig rein zu erhalten. Die Ausbeute beträgt 38—40% der berechneten Menge an Bibromcampher.

---

[1] Die angewandten Röhren waren 75—80 Ctm. lang und hatten 15—17 Mm. inneren Durchmesser. Es zeigte sich, dass die Röhren, sobald selbe durch den wiederholten Gebrauch nur etwa 65 Ctm. Länge hatten, selten mehr eine weitere Operation aushielten, sondern oft während des Erhitzens explodirten. Von 44 Röhren hatten wir auf diese Weise 4 Röhren verloren.

Der β Bibromcampher ist in kochendem Wasser nur wenig löslich, auch in kaltem Alkohol, sowie in Essigäther und Petroleumäther löst er sich zum Unterschiede von α Bibromcampher nur schwer.

In Äther und in kochendem Alkohol ist er leichter löslich, aus einer Lösung von letzterem scheidet er sich bereits nach geringer Abkühlung in Form von derben, tafelförmigen Krystallen aus, welche nach den Untersuchungen des Herrn Prof. v. Zepharovich folgende krystallographische Verhältnisse zeigen:

Krystallsystem rhombisch:

$$a : b : c = 0{\cdot}9501 : 1 : 1{\cdot}05206.$$

Beobachtete Formen:

$$\infty P,\ P\breve{\infty},\ \infty P\breve{\infty}.$$

Letztere Flächen bestimmen die Tafelform. Die krystallographische Ähnlichkeit der beiden isomeren Bibromcampher ergibt sich aus Folgendem:

	$qq' = P\breve{\infty}$	$qb = P\breve{\infty} : \infty P\breve{\infty}$	$pp = \infty P$	$pb = \infty P : \infty P\breve{\infty}$
α Bibromcampher	54°26′	62°47′	76°47·5′	51°36′
β Bibromcampher	55 0	62 30	87 4	46 28.

Die Krystalle zeigen im Capillarröhrchen erhitzt den Schmelzpunkt von 115° C. und sublimiren nur schwer. Mit Wasser gekocht, schmilzt die Verbindung nicht, mit Wasserdämpfen ist sie nur wenig flüchtig; beim Erhitzen mit Wasser im zugeschmolzenen Rohre durch 20 Stunden auf 130° C. tritt keine Veränderung ein.

Phosphorpentachlorid wirkt selbst beim Erhitzen auf β Bibromcampher nicht ein.

Während aus α Bibromcampher durch Behandeln mit Natrium und Kohlensäure ziemlich glatt Campherkohlensäure $C_{20}H_{32}O_6$ erhalten werden konnte, liefert der β Bibromcampher auf gleiche Weise nur harzige Produkte.

Einwirkung von alkoholischem Kali. Löst man β Bibromcampher in absolutem Alkohol auf und setzt etwa das gleiche Gewicht von festem Ätzkali zu, so tritt nur geringe Erwärmung ein; erhitzt man dann am Rückflusskühler auf dem Wasserbade, so scheidet sich eine reichliche Menge von Bromkalium aus. Nach etwa 3stündigem Kochen zeigt eine heraus-

genommene Probe mit Wasser verdünnt keine Trübung, und beim Kochen der verdünnten Lösung konnte kein Camphergeruch wahrgenommen werden. Das Ganze wurde auf dem Wasserbade eingedampft und nachher mit Wasser behandelt, wobei vollständige Lösung eintrat. Beim Versetzen mit verdünnter Schwefelsäure wurde ein schwach bräunlich gefärbtes, auf der wässerigen Flüssigkeit schwimmendes Öl erhalten, welches durch 2maliges Ausschütteln mit Äther aufgenommen wurde. Der nach dem Abdunsten der getrockneten ätherischen Lösung erhaltene Rückstand wurde destillirt, wobei ohne Bromwasserstoffentwicklung eine zwischen 160– 230° C. siedende Flüssigkeit von terpentinölartigem Geruche überging. Dieselbe ist offenbar ein Gemenge und wurde daher einstweilen nicht näher untersucht.

Demnach liefert der β Bibromcampher zum Unterschiede von α Bibromcampher mit alkoholischem Kali behandelt, keinen Campher.

Einwirkung von Natriumamalgam. Wenn die vorhergehende Reaction bereits einen Unterschied in dem chemischen Verhalten des α und β Bibromcamphers erkennen liess, so ist das Produkt der Einwirkung von Natriumamalgam auf β Bibromcampher für diesen letzteren besonders charakteristisch.

Bei einem Vorversuche hatte sich herausgestellt, dass der Bibromcampher mit einem Überschusse von Natriumamalgam behandelt, neben ganz geringen Mengen Campher ein in Alkalien lösliches, bromfreies hochsiedendes Öl in reichlicher Menge liefert. Der constante Siedepunkt desselben liess schliessen dass diese Reaction ein einheitliches Produkt gibt und wir haben dieselbe desshalb in grösserem Massstabe (mit 45 Grm. β Bibromcampher) ausgeführt.

Je 15 Grm. β Bibromcampher wurden mit verdünntem Alkohol (gleiche Theile Alkohol und Wasser) und etwas Äther übergossen, dann 120 Grm. 2%tiges Natriumamalgam zugesetzt und am Rückflusskühler auf dem Wasserbade so lange gekocht, bis das Amalgam zersetzt war; dann nach weiterem Zusatze von 120 Grm. Amalgam noch durch 6 Stunden erwärmt. Die so behandelte Lösung gab beim Versetzen mit Wasser eine sehr geringe Trübung; beim Kochen der verdünnten Lösung im Proberöhrchen zeigte sich im oberen Theile desselben ein geringer Anflug von

sublimirtem Campher. Die alkoholische Flüssigkeit, auf dem Wasserbade eingedampft, hinterliess eine weisse krystallinische Salzmasse ohne Camphergeruch. Der Rückstand lieferte mit Wasser behandelt eine klare Lösung, welche mit verdünnter Schwefelsäure angesäuert, ein leichtes, farbloses Öl ausschied, welches letztere durch Schütteln mit Äther aufgenommen wurde. Die ätherischen Lösungen von allen drei Operationen wurden durch Chlorcalcium getrocknet, filtrirt und hierauf der Äther auf dem Wasserbade abdestillirt, wobei ein gelblich gefärbtes, dickes Öl hinterblieb. Bei der Destillation desselben gingen, nachdem der Äther vollständig entfernt war, bis 250° C. nur wenige Tropfen und die Hauptmasse aber zwischen 258—260° C. über. Von 260—265° C. konnte nur eine geringe Fraction erhalten werden und schliesslich hinterblieb eine kleine Menge eines zähen Rückstandes.

Das bei 258—260° C. (uncorr.) siedende Reactionsprodukt bildet ein schwach gelblich gefärbtes, dickflüssiges Öl von terpentinölartigem Geruche und brennendem Geschmacke, welches mit Alkalien und auch mit Ätzbaryt salzartige Verbindungen eingeht.

Die Analyse desselben ergab folgendes Resultat:

I. 0·2640 Grm. lieferten 0·6897 Grm. CO_2 und 0·2277 Grm. H_2O.

II. 0·1920 Grm. gaben 0·5007 Grm. CO_2 und 0·1647 Grm. H_2O.

	Gefunden		Berechnet für $C_{10}H_{16}O_2$
	I	II	
C	71·25	71·12	71·42
H	9 58	9·53	9·52

Aus diesem Ergebnisse ist zu schliessen, dass dieser neuen Verbindung die Formel $C_{10}H_{16}O_2$ zukommt und demnach Natriumamalgam auf β Bibromcampher in alkoholischer Lösung in der Weise einwirkt, dass ausser dem nascirenden Wasserstoffe noch das dabei gebildete Ätznatron zur Wirkung gelangt.

Während nun im α Bibromcampher durch nascirenden Wasserstoff sowohl, als auch durch alkoholisches Kali beide Bromatome durch Wasserstoff ersetzt werden, wird bei dem

β Bibromcampher ein Bromatom gegen Wasserstoff, das andere jedoch gegen eine Hydroxylgruppe ausgewechselt.

Es ist wahrscheinlich, dass das bromfreie Öl, welches aus β Bibromcampher mit alkoholischem Ätzkali entsteht, denselben Körper in weniger reinem Zustande enthält.

Diese Substanz, welche in sehr glatter Weise aus einem Derivate des Camphers entsteht, ist mit keiner der bisher nur in kleinen Mengen erhaltenen und als Oxycampher beschriebenen Verbindungen $C_{10}H_{16}O_2$ identisch. Wir sind damit beschäftigt, diesen interessanten Körper näher zu untersuchen.

In der Absicht, den β Bibromcampher ebenso wie den α Bibromcampher in gewöhnlichen Campher überzuführen und dadurch als ein directes Campherderivat zu charakterisiren, haben wir weiterhin folgenden Versuch ausgeführt. Eine ätherische Lösung von β Bibromcampher wurde mit einem grossen Überschusse von zweipercentigem Natriumamalgam (etwa die hundertfache Gewichtsmenge) zusammengebracht und unter Abkühlung mit Salzsäure gesättigter Äther tropfenweise zugesetzt, um die Entstehung von Ätznatron zu vermeiden. Nachdem das Natriumalmalgam aufgebraucht war, wurde die salzsaure ätherische Lösung durch Schütteln mit Wasser von dem gebildeten Chlornatrium und der Salzsäure befreit und die getrocknete, filtrirte, ätherische Lösung bei gewöhnlicher Temperatur abgedunstet. Der Rückstand war farblos, durchscheinend, undeutlich krystallinisch und besass einen starken Geruch nach Campher. Beim Erhitzen sublimirte derselbe bis auf eine sehr geringe Menge farbloser Krystalle, die mit einem Öle durchzogen waren. Das Sublimat zeigte den Schmelzpunkt von 170—172° C. und sonst alle übrigen Eigenschaften des Camphers.

Somit lässt sich auch der β Bibromcampher durch Wasserstoff ziemlich glatt wieder in Campher überführen.

Einwirkung von Salpetersäure. Wird β Bibromcampher mit gewöhnlicher concentrirter Salpetersäure in einer Proberöhre zusammengebracht, so tritt erst beim Kochen Lösung ein; beim Verdünnen mit Wasser wird unveränderter β Bibromcampher als schneeweisses, krystallinisches Pulver ausgefällt. Rauchende Salpetersäure bewirkt bereits in der Kälte Lösung; eine weitere Einwirkung erfolgt jedoch erst bei andauerndem Erhitzen. Führt

man die Operation in der Weise aus, dass mit rauchender Salpetersäure längere Zeit destillirt wird, so findet sich im Destillate Brom und Bromwasserstoff, während der Rückstand besonders nach dem Abkühlen zwei Schichten bildet, von welchen die untere röthlich gefärbt ist und nach längerem Stehen mit Wasser nahezu fest wird. Beim Umkrystallisiren dieser letzteren Substanz aus Alkohol erhält man büschelförmig gruppirte farblose Nadeln, die bei 124—126° C. (uncorr.) schmelzen.

Aus der saueren, wässerigen Schichte des Destillationsrückstandes konnte nach Entfernung der Salpetersäure eine andere krystallisirte Substanz in geringer Menge erhalten werden, welche aus verdünntem Alkohol umkrystallisirt über 200° C. schmilzt und stark bromhältig ist.

Das bei 124—126° C. schmelzende Hauptprodukt ist ein bromhältiges Nitroderivat des Camphers und ergab Folgendes bei der Analyse:

I. 0·2725 Grm. Substanz lieferten 0·3404 Grm. CO_2 und 0·0984 Grm. H_2O.

II. 0·3103 Grm. Substanz gaben 0·3241 Grm. AgBr.

III. 0·6644 Grm. Substanz gaben 25·4 CC. Stickstoff bei 739·0 Mm. Barometerstand und 19° C.

	I	II	III	$C_{10}H_{13}Br_2NO_3$
C....	34·06	—	—	33·80%
H....	4·01	—	—	3·67
Br...	—	44·45	—	45·07
N ...	—	—	4·25	3·94

Dieser Körper muss also als **Bibrommononitrocampher** $C_{10}H_{13}Br_2(NO_2)O$ bezeichnet werden.

Die Einwirkung der Salpetersäure auf β Bibromcampher verläuft somit analog derjenigen auf Monobromcampher, welcher dabei Monobrommononitrocampher $C_{10}H_{14}Br(NO_2)O$ neben Camphersäure liefert.

Aus den angeführten Reactionen geht unzweifelhaft hervor, dass die beiden beschriebenen Bibromcampher eine verschiedene Constitution besitzen und dürfte dieselbe bei dem Umstande, dass beide Verbindungen sich leicht in Campher überführen

lassen, nur in der verschiedenen Stellung der Bromatome zu suchen sein.

Offenbar hat Swarts den β Bibromcampher, R. Schiff sowie Armstrong und Matthews dagegen den α Bibromcampher, wenn auch nicht in reinem Zustande erhalten. Montgolfier gibt keinen Schmelzpunkt für Bibromcampher an, und dürfte beide Isomere unter Händen gehabt haben; da die angeführten Reactionen dem α Bibromcampher entsprechen, während nach einer freundlichen Mittheilung des Herrn Prof. v. Zepharovich die Angaben Montgolfier's über das krystallographische Verhalten, mit dem des β Bibromcamphers übereinstimmen.

Der leichten Übersicht wegen stellen wir zum Schlusse die Reactionen der beiden isomerem Bibromcampher in einer Tabelle zusammen.

	α Bibromcampher	β Bibromcampher
Schmelzpunkt	61° C.	115° C.
Löslichkeitsverhältnisse.	In Alkohol, Äther, Essigäther und Petroleumäther sehr leicht löslich.	In Alkohol, Äther, Essigäther und Petroleumäther schwer löslich.
Alkoholisches Kali.	Monobromcampher schliesslich Campher.	Terpentinölartig riechendes Öl, das zwischen 160—230° C. destillirt.
Nascirender Wasserstoff aus Natriumamalgam mit verdünntem Alkohol.	Monobromcampher schliesslich Campher.	Oxycampher, $C_{10}H_{16}O_2$, siedet bei 258 bis 260° C.
Nascirender Wasserstoff aus Natriumamalgam und durch Salzsäure gesättigtem Äther in ätherischer Lösung.	Campher	Campher.

	α Bibromcampher	β Bibromcampher
Natrium und Kohlensäure.	Campherkohlensäure $C_{20}H_{32}O_6$; schmilzt bei 123—124° C.	Harzige Massen.
Phosphorpentachlorid.	keine Einwirkung.	keine Einwirkung.
Rauchende Salpetersäure.	Stickstoff- und bromhaltiges Öl.	Bibrommononitrocampher $C_{10}H_{13}Br_2NO_3$; Schmelzpunkt 126°C. (uncorr.)

Über die magnetische Schirmwirkung des Eisens.

Von dem w. M. J. Stefan.

Bei der Anwendung der Theorie der magnetischen Induction auf das Problem der Magnetisirung einer eisernen Hohlkugel ist Poisson zu folgendem Resultate gelangt. Wird eine solche Kugel durch äussere Kräfte magnetisirt, so wirkt dieselbe in ihrem Hohlraume mit Kräften, welche den äusseren entgegengesetzt sind. Die resultirende Wirkung im Hohlraume ist von der Dicke der Kugelwand abhängig und wenn diese im Vergleiche zum Radius nicht sehr klein ist, so beträgt die resultirende Wirkung im Hohlraum nur einen kleinen Bruchtheil jener der äusseren Kräfte. Ein in der Höhlung befindlicher Magnet wird daher durch die ihn umgebende Eisenwand gegen die Einwirkung ausserhalb derselben befindlicher Magnete, wenigstens theilweise geschützt. Umgekehrt erfahren auch die letzteren von dem eingeschlossenen Magnete eine viel geringere Einwirkung, als von demselben Magnete im freien Zustande. Denn die Rechnung lehrt auch, dass eine Hohlkugel, welche durch einen in ihrer Höhlung befindlichen Magnet magnetisirt wird, nach aussen eine Wirkung ausübt, welche jener des Magnetes entgegengesetzt ist.

Die Eisenkugel zeigt gegen die magnetischen Kräfte ein ähnliches Verhalten, wie eine Hohlkugel aus einem gut leitenden Material gegen die elektrischen. Es ist diese Analogie nicht blos für diese specielle Form der Körper vorhanden, für die Kugelform lässt sich aber die Rechnung in vollständiger und sehr einfacher Weise führen.

Das in Rede stehende Verhalten der guten Leiter gegen elektrische Kräfte wird häufig als elektrische Schirmwirkung bezeichnet. In demselben Sinne kann man also auch von einer magnetischen Schirmwirkung des Eisens reden.

Diese Wirkung kann zur Astasirung der Galvanometer benützt werden. W. Thomson hat dieselbe bei der Construction seines Marinegalvanometers zur Anwendung gebracht. Die wichtigste Anwendung jedoch hat diese Schirmwirkung wohl in der Gramme'schen Maschine gefunden. In einer dieser Maschine gewidmeten Monographie hat A. Breguet diesen Gegenstand in sehr einfacher Weise auseinandergesetzt.

Die magnetische Schirmwirkung des Eisens verdient nunmehr wohl eine grössere Beachtung und sollte auch in einem experimentellen Curse der Physik demonstrirt werden. Ich habe zu diesem Zwecke einige Versuche mit hohlen Eisencylindern oder Eisenringen ausgeführt und theile im Folgenden die Ergebnisse derselben mit. Ich habe diese specielle Form der Eisenkörper gewählt, weil diese Form für die Anwendung zunächst die grösste Bedeutung hat.

I. Ablenkungsversuche.

Der Einfluss von Eisenmassen auf die Fernwirkung eines Magnetes lässt sich am einfachsten durch Ablenkungsversuche bestimmen. Ich will einige Beispiele anführen.

Der abzulenkende Magnet war der Ringmagnet eines Galvanometers von Edelmann. Der ablenkende wurde in der auf dem magnetischen Meridian senkrechten, durch die Mitte des Ringmagnetes gehenden Linie aufgestellt. Ein Magnet von 5 Ctm. Länge und 1 Ctm. Durchmesser gab bei 31 Ctm. Distanz eine Ablenkung von 116 Scalentheilen. Wurde um diesen Magnet ein Eisenring von 11 Ctm. innerem, 13 Ctm. äusserem Durchmesser und 5 Ctm. Höhe gelegt, so dass die Axe des Magnetes durch die Mitte des Ringes ging, so fiel die Ablenkung auf 22 Scalentheile, also auf den fünften Theil ihres ursprünglichen Betrages herab. Ein Eisenring von denselben Querdimensionen, aber von doppelter Höhe reducirte die Ablenkung auf 12 Scalentheile.

Ein Magnet von 10 Ctm. Länge und 1 Ctm. Durchmesser gab bei einer Distanz von 34·3 Ctm. eine Ablenkung von 495, bei einer Distanz von 41·4 Ctm. eine Ablenkung von 281 Scalen-

theilen. Diese Ablenkungen wurden durch den Eisenring von 5 Ctm. Höhe auf 70, beziehungsweise 41 Scalentheile reducirt.

Ein Eisenring wirkt nicht nur in der bei diesen Versuchen angewendeten Lage vermindernd auf die Fernwirkung des Magnetes ein, sondern auch, wenn seine Mittellinie höher oder tiefer gestellt wird, als die Axe des Magnetes. Folgende zwei Tabellen geben zwei Beispiele. Bei der ersten war der 5 Ctm. lange, bei der zweiten der 10 Ctm. lange Magnet benützt. h bedeutet den verticalen Abstand der Axe des Magnetes und der Mittellinie des Cylinders von 5 Ctm. Höhe, s bedeutet die Ablenkung in Scalentheilen.

	I.	II.
$h =$ 0	$s =$ 22	$s =$ 70
2·5	35	127
5	65	184
7·5	90	283
10	102	436
12·5	110	463
∞	116	495.

Die unter s angeführten Zahlen sind die Mittelwerthe aus den Ausschlägen nach zwei entgegengesetzten Seiten, welche sich bei den zwei entgegengesetzten Lagen des ablenkenden Magnetes ergeben. Diese doppelte Beobachtung ist in den Fällen, in welchen der Cylinder eine höhere Lage erhält, nothwendig, weil seine Magnetisirung durch die verticale Componente des Erdmagnetismus die Ausschläge nach der einen Seite vergrössert, nach der anderen vermindert. Zugleich wird dadurch auch der Einfluss eines dem Cylinder eigenthümlichen Magnetismus eliminirt.

Wird unter oder über einen Magnet eine Eisenplatte gelegt, so wird dessen Fernwirkung ebenfalls geschwächt. Eine runde Platte von 1·2 Ctm. Dicke und 13 Ctm. Durchmesser wurde über den 10 Ctm. langen Magnet in verschiedenen Abständen gestellt. Für die unter h angeführten Distanzen der unteren Fläche der Platte von der Axe des Magnetes wurden die Ablenkungen s gefunden:

$h = 2 \cdot 5$	$s = 276$
5	388
$7 \cdot 5$	440
∞	495.

Man kann die Platte auch seitwärts vom Magnete aufstellen, so dass ihr horizontaler Durchmesser der Axe des Magnetes parallel geht, die Wirkung bleibt dieselbe. Stellt man aber die Platte vor oder hinter den ablenkenden Magnet, so tritt nicht eine Schwächung, sondern eine, wenn auch nicht grosse Verstärkung der Fernwirkung ein.

II. Schwingungsversuche.

Ein kleiner cylindrischer Magnet von 3 Ctm. Länge und 0·4 Ctm. Durchmesser wurde mittelst eines leichten einen Spiegel tragenden Gestelles an einen Coconfaden aufgehängt. Die Schwingungsdauer dieses Apparates betrug 5·9 Secunden. Wurde der Magnet durch einen Messingcylinder von gleichem Trägheitsmoment ersetzt, so betrug die Schwingungsdauer 34·4 Secunden.

Bedeutet K das Trägheitsmoment des schwingenden Systems M das magnetische Moment des Magnetes, T die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus, endlich θ den Coëfficienten der Torsion, so dass für mässige Ausschläge φ die Gleichung

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -(MT+\theta)\varphi$$

gilt, so ist

$$5 \cdot 9 = 2\pi\sqrt{\frac{K}{MT+\theta}}, \quad 34 \cdot 4 = 2\pi\sqrt{\frac{K}{\theta}}$$

und daraus folgt

$$\theta = 0 \cdot 03\, MT.$$

Über den Apparat wurde nun ein Eisencylinder geschoben. Die Dimensionen dieses Cylinders sind folgende: Höhe 5 Ctm., innerer Durchmesser 11 Ctm., äusserer Durchmesser 14 Ctm., also Wanddicke 1·5 Ctm. Der Cylinder wurde so gestellt, dass der Mittelpunkt desselben mit jenem des Magnetes zusammenfiel. Es wurde sodann die Schwingungsdauer beobachtet, welche sich

bedeutend grösser ergab als die Dauer der Schwingungen im freien Raume. Der Magnet wurde dann gehoben, jedoch so, dass sein Mittelpunkt immer in der Axe des Cylinders blieb. Für verschiedene Stellungen des Magnetes wurden wieder die Schwingungsdauern bestimmt. Die folgende Tabelle enthält die Resultate dieser Beobachtungen.

h bedeutet die Höhe des Mittelpunktes des Magnetes über der Mitte des Cylinders ausgedrückt in Centimetern, τ' die zugehörige Schwingungsdauer. Die Zahlen der letzten Reihe geben die aus den Beobachtungen berechneten Verhältnisse zwischen der Horizontalcomponente T und der Intensität T' des magnetischen Feldes an dem jeweiligen Orte des Magnetes. Diese Zahlen geben also an, auf den wievielten Theil ihres Werthes die Horizontalcomponente durch die Wirkung des Eisencylinders herabgesetzt wird.

$h =$	$\tau' =$	$\frac{T}{T'} =$
0	13·6	6·10
1·25	12·8	5·30
2·5	11·0	3·76
5	8·4	2·09
7·5	7·1	1·47
10	6·6	1·26.

Das Verhältniss von T zu T' wurde aus den beiden Formeln

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{K}{MT+\theta}}, \qquad \tau' = 2\pi\sqrt{\frac{K}{MT'+\theta}}$$

mit Berücksichtigung der gefundenen Beziehung zwischen θ und MT berechnet. Es ist

$$\frac{T'}{T} = \frac{1\cdot03\tau^2}{\tau'^2} - 0\cdot03$$

und der reciproke Werth davon steht in obiger Tabelle.

Diese lehrt, dass in der Mitte des Cylinders die Horizontalcomponente auf weniger als den sechsten Theil ihres Werthes im freien Raume herabgesetzt ist. Mit wachsender Entfernung von der Mitte des Cylinders nimmt die Abschwächung des magnetischen Feldes ab, macht sich aber noch in beträchtlicher Höhe ausserhalb des Cylinders geltend.

Ist die Aufhängung des Magnetes derart, dass der Aufhängefaden untordirt ist, wenn der Magnet in seiner Ruhelage sich befindet, so behält der Magnet seine Ruhelage bei, wenn der Eisencylinder über ihn geschoben wird, sobald dieser keinen eigenthümlichen remanenten Magnetismus enthält. Dies war bei dem zu diesen Versuchen benützten Cylinder sehr nahe der Fall. Aber wenn auch dieser Fall vorhanden ist, so ändert sich die Ruhelage, wenn dieselbe nicht mit der torsionsfreien Stellung des Fadens zusammenfällt, umsomehr, je grösser die Abschwächung des magnetischen Feldes ist.

Gewöhnlich aber enthalten Eisencylinder remanenten Magnetismus und dann wird auch, wenn die ursprüngliche Ruhelage mit der torsionsfreien Stellung des Fadens zusammenfällt, dieselbe durch das Überschieben des Cylinders geändert werden. Es lassen sich aber zwei um 180° gegen einander abstehende Stellungen des Cylinders finden, in welchen dies nicht oder nur in geringem Masse geschieht. Es sind dies jene Lagen, in welchen das remanente Feld des Eisenringes mit jenem der Horizontalcomponente gleiche oder eine zu dieser entgegengesetzte Richtung hat.

Beobachtet man die Schwingungen des Magnetes bei diesen beiden Stellungen des Ringes, so ergeben sich die Schwingungsdauern in den beiden Fällen sehr verschieden. Man kann aber aus denselben die Wirkung des eigenthümlichen Magnetismus des Cylinders eliminiren und so wieder die gesuchte Grösse finden.

Bei der folgenden zweiten Reihe von Versuchen wurde ein Eisencylinder von 5 Ctm. Höhe, 11 Ctm. innerem und 13 Ctm. äusserem Radius verwendet. Seine Wand hat also eine Dicke von 1 Ctm. In den verschiedenen Höhen h ergaben sich nachstehende Werthe der Schwingungsdauern:

h	τ_1	τ_2
0	12·4	9·5
2·5	9·7	8·4
5	7·1	6·7
7·5	6·0	5·8.

Die Schwingungsdauer des Magnetes, welcher vor dieser Versuchsreihe neu magnetisirt wurde, beträgt 5 Secunden und ist

nunmehr $\theta = 0{\cdot}02\,MT$. Vorausgesetzt, dass man die Wirkung des eigenthümlichen Magnetismus des Eisens auf den schwingenden Magnet wie die eines homogenen Feldes von der Intensität R rechnen darf, hat man für τ_1 und τ_2 die beiden Formeln

$$\tau_1 = 2\pi\sqrt{\frac{K}{MT'+MR+\theta}}, \qquad \tau_2 = 2\pi\sqrt{\frac{K}{MT'+MR+\theta}}.$$

Daraus findet man für die obigen vier Fälle

$T'-R = 0{\cdot}145\,T$	$T'+R = 0{\cdot}262\,T$
$0{\cdot}251\,T$	$0{\cdot}341\,T$
$0{\cdot}486\,T$	$0{\cdot}548\,T$
$0{\cdot}688\,T$	$0{\cdot}737\,T$

Für die Verhältnisse von T zu T' findet man nun folgende Zahlen:

h	$\frac{T}{T'}$
0	4·91
2·5	3·38
5·0	1·93
7·5	1·40

Die Schirmwirkung dieses Cylinders ist demnach eine geringere, als die des ersten.

Ein dritter Eisencylinder, welcher dieselben Radien wie der zweite, aber die doppelte Höhe hat, zeigte ebenfalls eigenthümlichen Magnetismus, welcher nicht in der Mitte des Cylinders, sondern oberhalb derselben den grössten Einfluss zeigte.

Der Magnet, welcher im freien Raume wieder eine Schwingung in 5 Secunden vollführte, hatte innerhalb und oberhalb des Eisencylinders in den verschiedenen Höhen folgende Schwingungsdauern:

$h =$	$\tau_1 =$	$\tau_2 =$
0	17·2	12·8
2·5	17·0	11·1
5	10·4	8·5
7·5	7·2	6·7
10	6·0	5·8

Für $T'-R$ und $T'+R$ findet man folgende Werthe:

$T'-R$	$T'+R$
$0\cdot059T$	$0\cdot135T$
$0\cdot068T$	$0\cdot187T$
$0\cdot216T$	$0\cdot332T$
$0\cdot472T$	$0\cdot548T$
$0\cdot688T$	$0\cdot737T$

und daraus ergeben sich für die Verhältnisse von T zu T' folgende Zahlen:

$h=$	$\frac{T}{T'}=$
0	$10\cdot31$
$2\cdot5$	$7\cdot84$
5	$3\cdot65$
$7\cdot5$	$1\cdot96$
10	$1\cdot40.$

Die Abschwächung der Horizontalcomponente ist in der Mitte dieses Cylinders doppelt so gross, als in dem zweiten Cylinder, hingegen ist sie ausserhalb der Cylinder in beiden Fällen nahezu gleich.

Wenn ein Spiegelgalvanometer so eingerichtet ist, dass der Spiegel ausserhalb der Drahtwindungen sich befindet, so kann man die Empfindlichkeit desselben durch Überschieben eines Eisencylinders leicht auf das Zehnfache und auch noch höher bringen. Die Höhe des Cylinders wird man am besten so wählen, dass der Magnet des Galvanometers in die Mitte des Cylinders zu stehen kommt. Die astasirende Wirkung wächst mit der Höhe des Cylinders und mit dem Verhältnisse der Wanddicke zum äusseren Durchmesser.

Wie im folgenden Abschnitte gezeigt werden wird, ist die Zahl, welche angibt, wie vielmal das magnetische Feld innerhalb eines unendlich langen Cylinders schwächer ist, sehr nahe durch den Ausdruck

$$n = 1 + \pi k \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

gegeben. a bedeutet den äusseren, b den inneren Radius des Cylinders, k die Magnetisirungszahl des Eisens. Für gewöhnliches

weiches Eisen und für solche Kräfte, wie die erdmagnetischen es sind, kann man $\pi k = 50$ annehmen, um einen genäherten Werth für die Zahl n zu erhalten.

Für einen Cylinder von endlicher Höhe ist die Zahl n kleiner, angenähert in dem Verhältniss von h zu $\sqrt{4a^2+h^2}$, wenn h die Höhe des Cylinders bedeutet.

Man kann die astasirende Wirkung namentlich eines niedrigen Cylinders noch vergrössern, wenn man ihn mit Eisenplatten wenigstens theilweise schliesst, was jedoch bei den gebräuchlichen Galvanometern nicht leicht ausführbar ist. Noch will ich bemerken, dass es nicht nothwendig ein massiver Eisencylinder sein muss, man kann auch zusammengerolltes Eisenblech oder besser noch auf eine Spule aufgewickelten weichen Eisendraht verwenden.

Die Astasirung lässt sich allerdings durch einen astasirenden Magnet bequemer erreichen, es ist aber zu bemerken, dass ein Eisencylinder das Galvanometer zugleich gegen alle äusseren magnetischen Störungen unempfindlicher macht, was bei der Astasirung durch einen Magnet nicht der Fall ist.

Ein Eisenring kann auch zur grösseren Astasirung eines astatischen Nadelpaares verwendet werden, indem man durch passende Stellung desselben die Einwirkung des Erdmagnetismus auf die stärkere der Nadeln in grösserem Masse vermindert, als die Einwirkung auf die schwächere.

III. Theoretische Erörterung.

Die Schirmwirkung des Eisens beruht auf der Veränderung, welche ein Eisenkörper in der Vertheilung gegebener magnetischer Kräfte hervorruft. Diese Veränderung ist im Allgemeinen in verschiedenen Orten des Raumes verschieden, die gegebenen Kräfte können durch dieselbe eine Richtungsänderung, eine Verstärkung oder Schwächung erfahren. Die Wirkung des Eisens lässt in theoretischer Hinsicht eine zweifache Darstellung zu.

Man kann sie ableiten aus der Fernwirkung der magnetischen Massen, welche durch die magnetische Induction im Eisenkörper frei geworden sind. Ein aufrecht gestellter hohler Cylin-

der wird z. B. durch die horizontale Componente des Erdmagnetismus so magnetisirt, dass der gegen den magnetischen Norden gerichtete Theil seiner Wand freie nördliche, der entgegengesetzte Theil der Wand aber freie südliche magnetische Massen aufweist. In der Höhlung des Cylinders ist die Wirkung dieser Massen entgegengesetzt jener der Horizontalcomponente und in Folge dessen das magnetische Feld geschwächt.

Wird ein Magnet in einen Cylinder gebracht oder über eine Eisenplatte gestellt, so werden die den Enden des Magnetes benachbarten Theile der Cylinderwand oder der Eisenplatte entgegengesetzt magnetisch und vermindern die Fernwirkung des Magnetes. Man könnte sagen, der Magnet wird durch den Cylinder oder die Platte verankert.

Wird ein Eisenkörper vor das eine Ende des Magnetes gestellt, so wirkt das magnetisirte Eisen nach aussen wie der Magnet, es verlängert gewissermassen den Magnet und vergrössert dadurch seine Fernwirkung.

Wird ein Eisenkörper durch gegebene magnetische Kräfte so magnetisirt, dass keine magnetischen Massen in ihm frei werden, so übt er auch gar keinen Einfluss auf die Vertheilung der magnetischen Kräfte aus. Dies ist der Fall, wenn ein geradliniger Leiter eines elektrischen Stromes von einer Eisenröhre derart umgeben ist, dass der Leiter in die Axe der Röhre zu liegen kommt. Die Elementarmagnete ordnen sich in geschlossenen Kreisen an und werden keine Massen frei. Die Eisenröhre verändert daher die Fernwirkung des Stromleiters in keiner Weise, weder innerhalb noch ausserhalb der Röhre. Angenähert gilt dies auch noch für einen kreisförmig gebogenen Leiter, der von einem eisernen Hohlringe umgeben ist und zwar um so mehr, je kleiner der Radius der Röhre gegen den Radius des Kreises ist. — W. Siemens hat bei seinen elektromagnetischen Versuchen auch eine derartige Vorrichtung benützt und gefunden, dass in einem solchen Falle das Eisen die Fernwirkung des elektrischen Stromes nicht verändert.

Eine zweite Art, den Einfluss von Eisenmassen auf die Vertheilung von magnetischen Kräften darzustellen, hat Faraday eingeführt. Die Vertheilung der magnetischen Kräfte wird durch den Verlauf der magnetischen Kraftlinien und der Einfluss des

Eisens durch die Veränderung bestimmt, welche dasselbe in dem Verlaufe der Kraftlinien verursacht. Damit wäre jedoch ein neuer Standpunkt nicht gewonnen, wenn man zur Ermittlung dieser Veränderung wieder die im Eisen frei gewordenen magnetischen Massen als neue Ausgangs- und Endpunkte von Kraftlinien herbeiziehen müsste. Dies ist jedoch nicht nothwendig.

Die Kraftlinien, welche von dem einen Pole eines Magnetes zu dem anderen durch einen gleichartigen, unbegrenzten Raum gehen, haben dieselbe Gestalt wie die Strömungslinien, in welchen die Wärme in einem unbegrenzten gleichartigen Leiter von einem Orte constanter höherer zu einem Orte constanter niederer Temperatur sich bewegt, oder wie die Strömungslinien, in welchen die Elektricität in einem unbegrenzten gleichartigen Leiter von einer Elektrode zur anderen fliesst. Die Veränderung, welche ein Eisenkörper in den Verlauf der magnetischen Kraftlinien bringt, ist nach Faraday dieselbe, welche in den Strömungslinien der Wärme oder der Elektricität hervorgerufen wird, wenn man den entsprechenden Theil des Mediums mit einem viel besseren Wärme- oder Elektricitätsleiter ausfüllt. Die magnetischen Kraftlinien streben dem Eisenkörper zu, drängen sich gegen denselben zusammen und durchsetzen ihn in grösserer Dichte. Besitzt der Eisenkörper eine Höhlung, so weichen die Kraftlinien dieser Höhlung aus, die Mehrzahl derselben geht um diese herum und nur wenige gehen durch dieselbe hindurch und in dieser Ableitung der Kraft besteht jene Wirkung des Eisens, welche speciell als Schirmwirkung bezeichnet worden ist.

Wird ein hohler Cylinder in ein homogenes magnetisches Feld, z. B. jenes der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus so gestellt, dass seine Axe senkrecht zur Richtung des Feldes zu stehen kommt, so neigen sich die ursprünglich aus parallelen Geraden bestehenden Kraftlinien gegen den Cylinder, condensiren sich vor demselben und gehen zum grössten Theile bogenförmig durch die Wand des Cylinders um die innere Höhlung herum, treten auf der anderen Seite wieder aus und gestalten sich endlich in grosser Entfernung wieder zu einem Systeme paralleler gerader Linien.

Umgibt man einen Magnet mit einem eisernen Cylinder, so nimmt der grösste Theil der vom Nordpole ausgehenden Kraft-

linien seinen Weg zum Südpol durch die Wand des Cylinders, nur wenige treten aus der Wand in den äusseren Raum hinaus und demgemäss erscheint die Wirkung des Magnetes in diesem Raume geschwächt. Dasselbe findet nur in geringerem Masse statt, wenn über den Magnet eine Eisenplatte gestellt wird. Wird aber diese vor den Magnet gestellt, so verdichtet dieselbe die nach vorne ausgehenden Kraftlinien, diese treten auch auf der Vorderseite der Platte in grösserer Zahl aus und dadurch erhält die Fernwirkung des Magnetes in dieser Richtung eine Verstärkung.

Die Kraftlinien eines geradlinigen elektrischen Stromes umschliessen denselben in concentrischen Kreisen, deren Ebenen senkrecht zu der Stromrichtung stehen. Ist der Stromleiter von einer concentrischen Eisenröhre umgeben, so bringt diese in die Anordnung der Kraftlinien innerhalb sowie ausserhalb der Röhre keine Störung. Die Fernwirkung wird durch das Eisen nicht verändert, die Anwesenheit des letzteren gibt sich nur durch die Verstärkung des Extrastromes beim Entstehen oder Verschwinden des Stromes im Leiter zu erkennen.

Man sollte erwarten, dass die Poisson'sche Theorie der magnetischen Induction und die Faraday'sche Anschauung über das magnetische Verhalten des weichen Eisens zwei wesentlich verschiedene Grundlagen für die mathematische Behandlung der betreffenden Probleme darbieten. Dies ist jedoch merkwürdigerweise nicht der Fall, ja es kann, wie W. Thomson gezeigt hat, die Faraday'sche Anschauung als eine unmittelbare Consequenz aus der Poisson'schen Theorie abgeleitet werden. Ich will hier in Kürze diesen Gegenstand auseinandersetzen.

Die Grundgleichung der Poisson'schen Theorie kann man so ausdrücken: Durch die Magnetisirung des Eisens wird in jedem Elemente desselben eine magnetische Molecularkraft geweckt, welche der magnetisirenden Kraft das Gleichgewicht hält. Diese Molecularkraft hat mit dem inducirten magnetischen Momente gleiche Richtung und was ihre Grösse anbetrifft, so kann man dieselbe wenigstens innerhalb gewisser Grenzen dem inducirten Momente proportional setzen.

Bedeutet μ das auf die Einheit des Volumens reducirte Moment, T die magnetisirende Kraft und k die Magnetisirungszahl, so ist

$$\mu = kT.$$

Zerlegt man μ nach den Richtungen der Coordinaten x, y, z in die Componenten α, β, γ und ebenso T in die Componenten X, Y, Z, so bestehen die Gleichungen

$$\alpha = kX, \ \beta = kY, \ \gamma = kZ.$$

Die magnetisirende Kraft T besteht im Allgemeinen aus zwei Theilen, aus der Kraft, welche von äusseren magnetischen Massen oder elektrischen Strömen ausgeht und aus jener, welche von den im Eisenkörper durch die Induction frei gewordenen magnetischen Massen herrührt. Beide Theile zusammen seien durch das Potential V bestimmt, dann ist

$$\alpha = -k\frac{dV}{dx}, \ \beta = -k\frac{dV}{dy}, \ \gamma = -k\frac{dV}{dz}. \tag{1}$$

Die durch die Induction frei gewordenen magnetischen Massen können im Allgemeinen theils an der Oberfläche, theils im Inneren des Eisenkörpers sich befinden. Die Raumdichte ρ der im Inneren befindlichen freien Massen lässt sich durch

$$\rho = -\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) \tag{2}$$

ausdrücken. Unter der Voraussetzung, dass k eine constante Zahl ist, geben die Gleichungen (1) in Verbindung mit (2)

$$\rho = k\Delta V, \tag{3}$$

wenn mit Δ die Operation $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ angedeutet wird.

Nun ist aber zugleich

$$\Delta V = -4\pi\rho. \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt nunmehr

$$(1+4\pi k)\,\rho = 0;$$

es befinden sich also im Inneren des Eisens keine freien Massen und es genügt V der Gleichung $\Delta V = 0$.

Die Flächendichte σ der auf der Oberfläche befindlichen freien Massen ist gleichbedeutend mit jener Componente von μ, welche in die Richtung der Normale zur Oberfläche fällt, ist also durch die Formel

$$\sigma = -k\frac{dV}{dn} \tag{5}$$

gegeben, worin n die Richtung der aus dem Eisenkörper austretenden Normale bedeutet.

Das in den bisherigen Formeln gebrauchte Zeichen V bedeutet das magnetische Potential im Innern des Eisenkörpers. Bezeichnet man zum Unterschiede davon das Potential ausserhalb des Eisenkörpers mit V_1, so geht beim Durchgange durch die Oberfläche V in continuirlicher Weise in V_1 über; für die nach der Normale genommenen Differentialquotienten von V und V_1 ist dies nicht der Fall, sondern es ist

$$\frac{dV_1}{dn} - \frac{dV}{dn} = -4\pi\sigma. \tag{6}$$

Die von W. Thomson ausgeführte Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung (5) bildet den wichtigen Schritt, durch welchen die Theorie der magnetischen Induction der Faraday'schen Conception entsprechend in dieselbe analytische Form gebracht wird, welche einem grossen Gebiete von Problemen gemeinsam ist, nämlich den Problemen der stationären Wärmeleitung, Diffusion und Strömung.

Die beiden Gleichungen (5) und (6) geben nämlich die folgende:

$$\frac{dV_1}{dn} = (1+4\pi k)\frac{dV}{dn}. \tag{7}$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der ebenfalls für die Oberfläche giltigen: $V = V_1$, ferner die Gleichungen $\Delta V = 0$ und $\Delta V_1 = 0$, welche für alle Punkte, in denen keine magnetischen Massen sich befinden, erfüllt sein müssen, bilden die Bedingungen, welchen die beiden Functionen V und V_1 genügen müssen. Es sind dies dieselben Bedingungen, welchen die Temperaturen

V_1 und V in zwei Medien, deren Wärmeleitungsfähigkeiten sich wie 1 zu $4\pi k+1$ verhalten, genügen, wenn die Wärmebewegung im Zustande der Beharrung sich befindet.

Es mag noch der Fall betrachtet werden, dass der Eisenkörper mit einem Theile seiner Oberfläche oder auch mit der ganzen nicht an Luft, sondern an einen andern stark magnetisirbaren Körper, z. B. Nickel, grenzt. Innerhalb dieses Körpers wird das Potential V_1 ebenfalls der Gleichung $\Delta V_1 = 0$ genügen, die magnetische Dichte im Inneren desselben wird ebenfalls Null sein. Die Dichte an der gemeinschaftlichen Oberfläche wird sich summiren aus derjenigen, welche dem Eisen, und jener, welche dem Nickel angehört. Letztere wird durch $k_1 \frac{dV_1}{dn}$ bestimmt sein, wenn k_1 die Magnetisirungszahl des Nickels bedeutet. Die gesammte Oberflächendichte wird demnach statt durch die Formel (5) durch die Formel

$$\sigma = -k \frac{dV}{dn} + k_1 \frac{dV_1}{dn}$$

gegeben sein und diese wird mit der Gleichung (6) anstatt der Gleichung (7) die folgende geben:

$$(1+4\pi k_1) \frac{dV_1}{dn} = (1+4\pi k) \frac{dV}{dn}.$$

Diese Gleichung zeigt noch deutlicher, als die Gleichung (7), dass dem Factor $1+4\pi k$ die Bedeutung eines Leitungsvermögens beigelegt werden kann. Der Umstand, dass dieser Factor $= 1$ ist, wenn es sich um die atmosphärische Luft als Medium handelt, kann also wie eine arbiträre Feststellung angesehen werden, nach welcher die den verschiedenen Körpern entsprechenden Werthe von $1+4\pi k$ auf den Werth dieser Grösse für die Luft als Einheit bezogen werden.

Die Durchführung specieller Probleme ist, mag man nun die eine oder die andere Form der Gleichungen zu Grunde legen, mit Ausnahme weniger Aufgaben, eine sehr schwierige. Solche schwierige Probleme bilden auch die in den vorhergehenden Abschnitten experimentell behandelten Fälle. Zur Erläuterung derselben leistet jedoch die Lösung der einfacheren Aufgabe,

welche sich auf das Verhalten eines unendlich langen Hohlcylinders im homogenen magnetischen Felde bezieht, wesentliche Dienste. Ich will dieselbe im Folgenden nach der Thomson'schen Methode behandeln.

Ein unendlich langer, hohler Eisencylinder, dessen Axe mit der Axe z zusammenfällt, werde in ein ursprünglich homogenes magnetisches Feld gelegt. Die Richtung des Feldes sei jene der x.

Bezeichnet man das Potential im äusseren Raume mit V, das im Eisenkörper mit V', und das im inneren Hohlraume mit V'', so kann man den Bedingungen der Aufgabe durch folgende Formeln genügen:

$$\begin{aligned} V &= Ax + \frac{Bx}{r^2} = (A + \frac{B}{r}) \cos\varphi \\ V' &= A'x + \frac{B'x}{r^2} = (A'r + \frac{B'}{r}) \cos\varphi \\ V'' &= Ax'' + \frac{B''x}{r^2} = (A''r + \frac{B''}{r}) \cos\varphi. \end{aligned} \tag{8}$$

Darin bedeuten A, A', A'' B, B', B'' Constante; r die Entfernung eines Punktes von der Axe des Cylinders, φ den Winkel zwischen r und x.

Von diesen sechs Constanten bestimmt A die Intensität des magnetischen Feldes in unendlicher Distanz vom Eisencylinder, ist also als gegeben zu betrachten. Ferner ist $B'' = 0$ zu setzen, wenn V'' im inneren Hohlraume endlich bleiben soll, was nothwendig der Fall ist, wenn in demselben keine magnetischen Massen sich befinden. Der innere Raum stellt dann ein homogenes magnetisches Feld von der Intensität A'' dar.

Es bleiben nur vier Constante zu bestimmen übrig. Zu dieser Bestimmung dienen die Bedingungsgleichungen, welche für die Grenzflächen des Eisenkörpers gelten. Ist a der äussere, b der innere Radius des Cylinders, sind ferner λ, λ', λ'' die Leitungsfähigkeiten des äusseren, des vom Eisen erfüllten und des inneren Raumes, so müssen folgende vier Gleichungen erfüllt werden:

$$\text{für } r = a: \quad V = V', \quad \lambda \frac{dV}{dr} = \lambda' \frac{dV'}{dr},$$

$$\text{für } r = b: \quad V' = V'', \quad \lambda' \frac{dV'}{dr} = \lambda'' \frac{dV''}{dr}.$$

Setzt man die angenommenen Potentialwerthe ein, so verwandeln sich diese Gleichungen in die folgenden:

$$\begin{aligned} A + \frac{B}{a^2} &= A' + \frac{B'}{a^2}, \quad \lambda\left(A - \frac{B}{a^2}\right) = \lambda'\left(A' - \frac{B'}{a^2}\right), \\ A' + \frac{B'}{b^2} &= A'' + \frac{B''}{b^2}, \quad \lambda'\left(A' - \frac{B'}{b^2}\right) = \lambda''\left(A'' - \frac{B''}{b^2}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Setzt man $B'' = 0$, so findet man zunächst für A'' aus diesen Gleichungen folgenden Werth:

$$A'' = \frac{4\lambda\lambda' A}{(\lambda' + \lambda'')(\lambda' + \lambda) - (\lambda' - \lambda)(\lambda' - \lambda'')\frac{b^2}{a^2}}. \tag{10}$$

Ist der Hohlraum des Cylinders, so wie der äussere Raum von Luft erfüllt, so ist $\lambda = \lambda'' = 1$ zu setzen. Für λ' lässt sich kein allgemein giltiger Werth angeben, da dasselbe für verschiedene Eisensorten nicht gleich ist, abgesehen davon, dass es keine constante Zahl, sondern von der Intensität der Magnetisirung abhängig ist. Wirken auf das Eisen Kräfte von der Ordnung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus, so kann man λ' etwa 200mal so gross annehmen, als λ.

Unter dieser Annahme erhält man z. B. für $a = 6{\cdot}5$, $b = 5{\cdot}5$ die Grösse $A'' = 0{\cdot}0664\,A$ oder $A = 15{\cdot}06\,A''$. Es ist also die Intensität des magnetischen Feldes in der Höhlung 15mal kleiner als die Intensität des äusseren Feldes.

Die Formel (10) kann man, wenn $\lambda = \lambda''$, transformiren in

$$A'' = \frac{4\lambda\lambda' A}{4\lambda\lambda' + (\lambda' - \lambda)^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)},$$

oder in

$$\frac{A}{A''} = 1 + \frac{(\lambda' - \lambda)^2}{4\lambda\lambda'}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right), \tag{11}$$

wofür man angenähert auch

$$\frac{A}{A''} = 1 + \pi k\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

setzen kann.

Setzt man in dem Ausdrucke

$$V = \left(A + \frac{B}{r^2}\right)x$$

V einem bestimmten Werthe gleich, so stellt derselbe die Gleichung einer äquipotentialen Curve in der Ebene der x und y dar. Zur Untersuchung des Verlaufes einer solchen Curve ist es am einfachsten, den Werth V durch die Abscisse des im Unendlichen liegenden Curventheils auszudrücken. Ist diese Abscisse x_0, so ist $V = Ax_0$ also die Gleichung der Curve

$$\left(A + \frac{B}{r^2}\right)x = Ax_0.$$

Diese Curve trifft die äussere Wand des Cylinders in einer Abscisse x_1, welche durch

$$\left(A + \frac{B}{a^2}\right)x_1 = Ax_0$$

bestimmt ist. Aus den Gleichungen (9) erhält man

$$A + \frac{B}{a^2} = \left[\frac{\lambda' + \lambda''}{2\lambda'} + \frac{\lambda' - \lambda''}{2\lambda'} \cdot \frac{b^2}{a^2}\right] A''$$

und angenähert, wenn man λ'' gegen λ' vernachlässigt

$$A + \frac{B}{a^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)A''.$$

Es ist also $A + \frac{B}{a^2}$ etwas kleiner als A'', so dass das Verhältniss von x_1 zu x_0 etwas grösser ist, als jenes von A zu A''. Unter der Annahme $\lambda' = 200$, $a = 6{\cdot}5$, $b = 5{\cdot}5$ findet man

$$A + \frac{B}{a^2} = 0{\cdot}057, \quad x_1 = 17{\cdot}5\,x_0.$$

Die Abscisse x_1 entspricht nur so lange einem Durchschnittspunkte der Curve mit dem äusseren Umfange des Cylinders, als ihr Werth kleiner ist als a. Aus $a = 17{\cdot}5x_0$ folgt der höchste Werth, den x_0 haben darf, damit die entsprechende Curve den Cylinder trifft; alle zu grösseren x_0 gehörigen Curven gehen um den Cylinder herum.

Der weitere Verlauf einer Curve, welche den Cylinder trifft, ist innerhalb desselben gegeben durch die Gleichung

$$(A' + \frac{B'}{r^2})x = Ax_0.$$

Die Curve tritt in die innere Höhlung in einem Punkte, dessen Abscisse x_2 durch die Gleichung

$$(A' + \frac{B'}{b^2})x_2 = A''x_2 = Ax_0$$

bestimmt ist. Die Fortsetzung der Curve in der inneren Höhlung selbst ist eine gerade Linie.

Der Ausdruck

$$V = Ax + \frac{Bx}{r^2}$$

ist ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0.$$

Er ist der reelle Theil der Function

$$A(x + yi) + \frac{B}{x + yi}.$$

Der reelle Factor des imaginären Theiles dieser Function ist

$$U = Ay - \frac{By}{r^2}$$

und dieser gibt das System der Kraftlinien, welche zu den äquipotentialen Curven V gehören. In gleicher Weise geben die zu V' und V'' gehörigen Werthe U' und U'' die Kraftlinien in dem vom Eisen erfüllten Raume und in der inneren Höhlung.

Ist y_0 die Ordinate einer Kraftlinie im Unendlichen, also $U = Ay_0$, so ist die Gleichung dieser Linie

$$Ay - \frac{By}{r^2} = Ay_0.$$

Dieselbe trifft die äussere Wand des Cylinders in einem Punkte, dessen Ordinate y_1 durch

$$(A - \frac{B}{a^2}) y_1 = Ay_0$$

bestimmt ist.

Aus den Gleichungen (9) folgt

$$A - \frac{B}{a^2} = 2A. \left[1 - \frac{\lambda(\lambda' + \lambda'') + \lambda(\lambda' - \lambda'')\frac{b^2}{a^2}}{(\lambda' + \lambda)(\lambda' + \lambda'') - (\lambda' - \lambda)(\lambda' - \lambda'')\frac{b^2}{a^2}}\right].$$

Der Bruch neben der Einheit innerhalb der Klammer wird um so kleiner, je grösser λ'. Ist b nicht $= a$, so ist Null die Grenze, welche für $\lambda' = \infty$ der Werth des Bruches erreicht. Es ist dann y_1 halb so gross als y_0. Es treten dann doppelt so viel Kraftlinien in den Cylinder, als durch einen gleichen Raum im Unendlichen gehen.

Für $\lambda' = 200$, $\lambda = \lambda'' = 1$ und $a = 6{\cdot}5$, $b = 5{\cdot}5$ ist

$$A - \frac{B}{a^2} = 1{\cdot}943A.$$

Die Fortsetzung einer Kraftlinie innerhalb des Eisens ist durch die Gleichung

$$(A' - \frac{B'}{r^2}) y = U'$$

gegeben. U' hat für dieselbe Kraftlinie innerhalb des Eisens nicht den Werth, welchen U für diese Linie ausserhalb des Eisens besitzt. Es kann aber U' durch die Ordinate y_1 bestimmt werden, mit welcher die Curve innerhalb des Eisens beginnt. Es ist

$$(A' - \frac{B'}{a^2}) y_1 = U'$$

oder zufolge der Gleichungen (9)

$$U' = \frac{\lambda}{\lambda'}\left(A - \frac{B}{a^2}\right) y_1$$

und mit Rücksicht auf die zwischen y_1 und y_0 bestehende Beziehung

$$U' = \frac{\lambda}{\lambda'} A y_0.$$

Die Gleichung des im Eisen liegenden Theiles der Kraftlinie ist demnach

$$\left(A' - \frac{B'}{r^2}\right) y = \frac{\lambda}{\lambda'} A y_0.$$

Diese Linie trifft die innere Wand des Cylinders in einem Punkte, dessen Ordinate y_2 durch

$$\left(A' - \frac{B'}{b^2}\right) y_2 = \frac{\lambda'' A''}{\lambda'} y_2 = \frac{\lambda}{\lambda'} A y_0$$

bestimmt ist. Es ist also

$$y_2 = \frac{\lambda A}{\lambda'' A''} y_0.$$

Wenn $\lambda = \lambda''$, so ist das Verhältniss von y_2 zu y_0 dem von A zu A'' gleich. Im Hohlraume setzt sich die Kraftlinie als zur Axe der x parallele Gerade fort. Es liegen in demselben die Kraftlinien weiter auseinander, als im Unendlichen; in demselben Masse, in welchem A grösser ist als A''.

Damit eine Kraftlinie in den Hohlraum eintrete, muss y_2 kleiner als b sein; $y_2 = b$ gibt die obere Grenze für die den Hohlraum durchsetzenden Linien.

Mit der Bestimmung des Verhaltens eines Eisencylinders im homogenen magnetischen Felde sind zugleich die analogen Strömungsaufgaben gelöst, z. B. die Aufgabe der Elektricitätsströmung in einer unbegrenzten leitenden Ebene, in welche ein zweiter ringförmiger Leiter von anderem Leitungsvermögen eingesetzt ist.

Die Elektroden sind zwei parallele in grosser Entfernung vom Cylinder befindliche gerade Linien oder auch zwei auf den entgegengesetzten Seiten eines Durchmessers des Ringes liegende, vom Ringe unendlich weit entfernte Punkte.

Das Verhältniss von A'' zu A gibt nun das Verhältniss der Stromdichte innerhalb des Ringes zu jener im Unendlichen. Es ist nun zu bemerken, dass für $\lambda = \lambda''$ nach der Formel (11) das Verhältniss von A'' zu A sich nicht ändert, wenn man λ und λ' gegen einander vertauscht. Die Strömung in dem vom Ringe eingeschlossenen Raume wird also in gleicher Weise vermindert, mag der Ring aus einem besseren oder aus einem schlechteren Leiter bestehen, als der übrige Theil der Ebene.

Vertauscht man λ und λ' gegen einander, so hat dies weiter zur Folge, dass die Constanten B, B' ihr Zeichen wechseln. Durch diese Constanten ist aber der Charakter der Niveaulinien des Potentials und der Kraftlinien oder im jetzigen Falle der Strömungslinien bestimmt. Die Gleichungen der beiden Liniensysteme sind von derselben Form und unterscheiden sich im Wesentlichen nur dadurch, dass in beiden B und B' mit entgegengesetzten Zeichen enthalten sind. Ändern B und B' ihre Zeichen, so nehmen demnach die Niveaulinien den Charakter der Strömungslinien an und umgekehrt.

Die Formeln (8) und (9) liefern noch die Lösung einer zweiten Aufgabe. In der Axe des Eisencylinders liege ein unendlich langer Magnet von sehr kleinen Querdimensionen. Die Richtung seiner magnetischen Axe falle in die Axe der x, die Grösse dieses Momentes, auf die Längeneinheit des Magnetes reducirt, sei m, dann ist das Potential desselben durch $\frac{2mx}{r^2}$ gegeben. Sind ausser diesem Magnete keine anderen magnetischen Massen im Raume vorhanden, dann bestehen die Bedingungen: $V = 0$ für $r = \infty$ und $V'' = \frac{2mx}{r^2}$ für $r = 0$. Es sind also von den sechs Constanten A, B, A', B', A'', B'' A und B'' gegeben und zwar $A = 0$, $B'' = 2m$, und die Aufgabe ist damit eine vollständig bestimmte.

Drückt man mit Hilfe der Gleichungen (9) zunächst B durch B'' aus, so erhält man

$$B = \frac{4\lambda'\lambda'' B''}{(\lambda'+\lambda)(\lambda'+\lambda'') - (\lambda'-\lambda)(\lambda'-\lambda'')\frac{b^2}{a^2}}.$$

Wenn $\lambda = \lambda''$, so besteht zwischen B und B'' dieselbe Beziehung wie zwischen A'' und A.

B bestimmt die Fernwirkung des angenommenen Magnetes ausserhalb des Eisencylinders. In demselben Masse, in welchem eine äussere constante Kraft in der Höhlung des Cylinders geschwächt ist, erscheint also auch die Fernwirkung des eingeschlossenen Magnetes vermindert.

Einen Magnet von der vorausgesetzten Beschaffenheit kann man darstellen durch zwei geradlinige elektrische Ströme, welche in der Ebene der y, der Axe des Cylinders parallel, in sehr kleinen Entfernungen von derselben und zwar in entgegengesetzten Richtungen fliessen. Man kann aber nach derselben Formel auch den Einfluss des Eisencylinders auf die Fernwirkung jedes der einzelnen Ströme für sich berechnen.

Geht der Strom durch einen Punkt der y-Axe, in der Entfernung β vom Mittelpunkte, ist die Intensität des Stromes J, so ist sein elektromagnetisches Potential

$$U = 2J \operatorname{arctang} \frac{y-\beta}{x};$$

für kleine Werthe von β kann man den Näherungswerth

$$U = 2J \operatorname{arctang} \frac{y}{x} - \frac{2J\beta x}{r^2}$$

oder in Polarcoordinaten

$$U = 2J\varphi - \frac{2J\beta\cos\varphi}{r}$$

setzen.

Durch die Anwesenheit des Eisencylinders wird nur der zweite Theil von U beeinflusst und da dieser einen sehr kleinen Werth besitzt, auch die Fernwirkung des Stromes nur wenig verändert.

Man kann die Reihenentwicklung von U auch bis zu höheren Potenzen von β vornehmen. Auch die folgenden Glieder der Reihe sind Integrale der Differentialgleichung für das Potential. Durch Multiplication mit den entsprechenden Potenzen von r erhält man eine zweite Reihe von particularen Integralen, mit deren Hilfe man den Grenzbedingungen genügen kann.

IV. Inductionsversuche.

Die Veränderungen, welche ein magnetisches Feld durch einen Eisenkörper, speciell durch einen Eisencylinder erfährt, können auch durch Inductionsversuche nachgewiesen werden. Führt man z. B. eine Drahtrolle, deren Axe parallel dem magnetischen Meridian ist, aus grösserer Distanz in das Innere eines vertical gestellten Eisencylinders, so dass die Axe der Rolle immer dieselbe Richtung beibehält, so erhält man in der Rolle einen Inductionsstrom. Er hat dieselbe Richtung wie der Strom, den man erhält, wenn man im freien Raume die Axe der Rolle aus dem Meridian um einen rechten Winkel dreht. Es entspricht also beiden Fällen eine Potentialänderung in gleichem Sinne. Der durch Drehung der Rolle erzielte Strom ist stärker, bei Anwendung des 10 Ctm. hohen Eisencylinders z. B. im Verhältniss von 10 zu 9.

Zieht man die Drahtrolle aus dem Cylinder heraus, so erhält man einen Strom von entgegengesetzter Richtung..

Der Versuch kann auch so angeordnet werden, dass man die Rolle in ihrer Stellung belässt und den Eisencylinder über dieselbe schiebt und dann von derselben wieder abhebt.

Die schwachen Ströme, welche die Horizontalcomponente in kleinen Drahtrollen inducirt, können natürlich nur mit einem sehr empfindlichen Galvanometer nachgewiesen werden. Zur Demonstration solcher Ströme wird man besser ein intensiveres magnetisches Feld verwenden. Der Elektromagnet von Rumkorff liefert z. B. ein solches. Dasselbe ist bekanntlich auch in einer beträchtlichen Ausdehnung nahe homogen, wenn man die Pole in grosse Eisenplatten endigen lässt.

Die Schirmwirkung eines Eisencylinders kann man nun in sehr einfacher und auffallender Weise zeigen. Bringt man die Rolle aus grösserer Entfernung in das elektromagnetische Feld, so erhält man einen Inductionsstrom von einer bestimmten Richtung und Intensität. Schiebt man von oben über die Rolle einen Eisencylinder, so erhält man einen Strom von entgegengesetzter Richtung und nahezu derselben Intensität, gerade so, als hätte man die Rolle aus dem Felde herausgehoben oder den magnetisirenden Strom unterbrochen.

Bei diesem Versuche werden die Kraftlinien, welche durch die Inductionsspirale parallel zur Axe derselben gehen, veranlasst, aus dem von den Windungen umspannten Raume in den Eisencylinder zu treten, wobei sie die auf den entgegengesetzten Seiten liegenden Theile der Windungen auch in entgegengesetzten Richtungen durchschneiden. Man kann einen analogen Versuch auch mit Windungen ausführen, deren Ebenen parallel zur Richtung des Feldes gestellt sind. Schiebt man durch dieselben eine Eisenplatte, so gehen die Kraftlinien in symmetrischer Weise in die Platte hinein und aus der Platte heraus. Bedeckt man die Platte auf der einen Seite mit einem gebogenen Eisenstück, so erhält man einen Strom von der einen oder der anderen Richtung, je nachdem die Windungen dem einen oder dem anderen Rande der Platte näher liegen, indem die Kraftlinien theils nach der einen, theils nach der anderen Seite hin in den gebogenen eisernen Deckel treten.

Die Schirmwirkung eines Eisencylinders lässt sich noch durch eine andere Art von Inductionsversuchen darlegen mit einem Drahte, welcher in einigen Windungen um die Wand des Cylinders herumgeführt ist, so dass von jeder Windung ein Theil in der inneren Höhlung, der andere aber ausserhalb des Cylinders liegt. Bewegt man diese Windungen längs der Peripherie des ruhenden Eisencylinders, so erhält man einen Inductionsstrom, dessen Richtung und Intensität von der anfänglichen Stellung und von der Endlage der Windungen abhängig ist. Bei einer Bewegung aus der äquatorialen in die axiale Lage geht der ausserhalb des Cylinders liegende Theil jeder Windung durch ein Feld, in welchem die Kraftlinien condensirt sind; der andere Theil der Windung aber geht durch ein Feld von sehr geringer

Intensität. Da die eine Hälfte der Windungen mehr Kraftlinien schneidet, als die andere, so entsteht in denselben ein Strom, dessen Intensität durch die Differenz der geschnittenen Kraftlinien bestimmt ist.

Man erhält denselben Strom, wenn man mit den Windungen zugleich den Eisencylinder bewegt, so dass er sich um seine Axe dreht. Dies ist der Fall der Gramme'schen Maschine. Durch die Drehung des Eisencylinders um seine Axe wird die Vertheilung der Kraftlinien im Felde nicht geändert, insoweit wenigstens, als von den Störungen, welche der remanente Magnetismus des Eisens verursacht, abgesehen wird. Es zeigt dies auch ein directer Versuch. Hält man nämlich die Drahtwindungen fest und dreht den Eisenring allein, so erhält man keinen Strom oder nur einen sehr schwachen, die Veränderungen des remanenten Magnetismus begleitenden Strom.

Man erhält jedoch andere Resultate, wenn die ausgeführten Bewegungen nicht drehende um die Axe des Cylinders, sondern drehende um eine andere Axe, oder progressive sind. Damit die Windungen progressiv bewegt werden können, müssen sie natürlich eine grössere Weite erhalten. Führt man eine solche Bewegung der Windungen aus bei ruhendem Ringe, so erhält man einen Strom. Hält man die Windungen fest und gibt dem Ringe dieselbe progressive Bewegung, wie vorhin den Windungen, so erhält man einen Strom von derselben Intensität, aber von entgegengesetzter Richtung. Bewegt man in derselben Weise die Windungen und den Ring mitsammen, so erhält man keinen Strom, obgleich in letzterem Falle die innerhalb des Ringes liegenden Theile der Windungen während der Bewegung in einem viel schwächeren magnetischen Felde sich befinden, als die Theile ausserhalb des Ringes.

Um diese Thatsache unter ganz bestimmten Bedingungen zu constatiren, habe ich noch folgenden Versuch ausgeführt.

Zwei Klemmen wurden an den Ecken einer Tischplatte befestigt und mit einem Galvanometer verbunden. In die Klemmen wurden zwei steife bogenförmig gekrümmte Kupferdrähte eingeführt und die Enden dieser Drähte durch einen geradlinigen, längs einer Latte gespannten Kupferdraht verbunden. Die Verbindungslinie der Klemmen, sowie die Latte wurden senkrecht

gegen den magnetischen Meridian gestellt, so dass die bogenförmigen Drähte in zwei verticale, dem magnetischen Meridian parallele Ebenen zu stehen kamen. Wurde die Latte in der Richtung des magnetischen Meridians progressiv bewegt, so inducirte die verticale Componente des Erdmagnetismus in der Drahtleitung einen Strom, dessen Grösse mit dem Galvanometer gemessen wurde.

Es wurde nun mit der Latte eine Eisenröhre verbunden, der Leitungsdraht durch diese Röhre geführt und die Latte in derselben Weise bewegt, wie vorhin. Der Inductionsstrom hatte genau dieselbe Intensität, wie in dem früheren Falle.

Aus der Gleichheit der beiden Ströme folgt weiter, dass die progressive Bewegung eines geschlossenen Leiters in einem homogenen magnetischen Felde auch dann von keinem Inductionsstrome begleitet ist, wenn ein Theil des Leiters von einer Eisenröhre umgeben ist und dies lässt sich auch durch einen analogen Versuch, wie die beiden früheren, direct nachweisen.

Die elektromotorische Kraft des Stromes, welche durch die angegebene Bewegung eines Drahtes hervorgerufen wird, kann in verschiedener Weise ausgedrückt werden.

1. Durch die Anzahl der Kraftlinien, welche der Leiter während seiner Bewegung durchschneidet. Die Richtung der elektromotorischen Kraft gibt folgende Regel: Denkt man sich in dem magnetischen Felde eine Figur, so dass die Kraftlinien in ihr von den Füssen zum Kopfe gehen, mit dem Gesichte nach der Bewegungsrichtung des Leiters gewendet, so geht die elektromotorische Kraft gegen die rechte Seite der Figur. Bewegen sich die Kraftlinien und sieht die Figur nach der Richtung dieser Bewegung, so geht die elektromotorische Kraft gegen die linke Seite der Figur.

2. Durch die Änderung des Potentials der Verticalcomponente auf die gesammte Strombahn.

3. Durch die Arbeit, welche bei der Bewegung des Drahtes geleistet werden muss gegen die elektromagnetische Kraft, welche die Verticalcomponente auf den von der Einheit des Stromes durchflossenen Draht ausübt.

Alle drei Regeln führen in gleich einfacher Weise zu demselben Resultate, dass die elektromotorische Kraft gleich ist der

Verticalcomponente, multiplicirt mit dem Rechtecke, dessen eine Seite der verschobene Draht, dessen andere Seite die Länge der Verschiebung ist.

Für den Fall des von der Eisenröhre umgebenen Drahtes liefert jedoch nur die zweite Regel ohne weiters das richtige Resultat.

Bei der Anwendung der ersten Regel hat man die Kraftlinien eines Magnetes, also auch die des Erdmagnetismus wie physische Linien oder Fäden zu betrachten, welche mit ihrem Ausgangs- und Endpunkte fest verbunden und unzerreissbar sind. Bewegt man eine Eisenröhre durch das magnetische Feld, so treten fortwährend Kraftlinien aus dem vorderen Theile der Röhre in den hinteren Theil derselben, wobei sie den inneren Hohlraum durchsetzen. Der Leitungsdraht wird also, wenn er sammt der Röhre bewegt wird, ebensoviele Kraftlinien schneiden, als wenn er von der Eisenröhre nicht umgeben wäre.

Was endlich die dritte der angeführten Regeln anbetrifft, so könnte man nach derselben erwarten, dass der mit der Eisenröhre umgebene Draht einen relativ sehr schwachen Inductionsstrom liefern werde, nachdem die vom Erdmagnetismus herrührende elektromagnetische Kraft im Inneren der Röhre thatsächlich viel schwächer ist, als ausserhalb derselben.

Da nun die dritte Regel gleich der zweiten aus dem Principe abgeleitet ist, dass die durch den Inductionsstrom entwickelte Wärme äquivalent ist der bei der Bewegung des Leiters aufgewendeten Arbeit, so folgt, dass die zur Verschiebung der Eisenröhre und des in ihr enthaltenen Drahtes nöthige Arbeit durch die in der Höhlung wirkende elektromagnetische Kraft nicht vollständig bestimmt ist, sondern, dass noch andere Kräfte dabei ins Spiel kommen. Diese Kräfte rühren von der Einwirkung des Stromes auf die durch die Erdkraft magnetisirte Röhre her. Man kann die innerhalb der Röhre wirkende geringe magnetische Kraft betrachten als die Resultante zweier Kräfte, der erdmagnetischen Kraft und derjenigen, mit welcher die durch die Erde magnetisirte Röhre in ihrer Höhlung wirkt und welche der erdmagnetischen Kraft entgegengesetzt ist. Das Entgegenwirken dieser beiden Kräfte bedingt eben die Schwächung des magnetischen Feldes innerhalb der Röhre. Fliesst nun in der Richtung der Axe der

Röhre ein Strom, so kann man auch die auf diesen wirkende Kraft in die zwei Theile zerlegen, in die ungeschwächte Erdkraft und in die entgegengesetzte Kraft der Röhre. Mit einer gleich grossen Kraft wirkt aber auch der Strom auf die Röhre zurück. Wird also der Stromleiter sammt der Röhre bewegt, so tritt die Wechselwirkung zwischen Röhre und Strom ausser Spiel und die zu leistende Arbeit ist durch die ungeschwächte elektromagnetische Erdkraft bestimmt.

Aus dieser Darlegung geht nun auch hervor, dass ein Strom, welcher durch eine Eisenröhre in der Richtung der Axe fliesst, dieser Röhre eine progressive Bewegung ertheilt, welche senkrecht zur Axe der Röhre und zur magnetisirenden Kraft der Erde gerichtet ist.

Ich habe noch einige analoge Versuche mit einem eisernen Hohlprisma ausgeführt. Von zwei rechteckigen Eisenplatten von 15 Ctm. Länge, 10 Ctm. Breite und 1·5 Ctm. Dicke wurde die eine mit zwei zu ihren Langseiten parallelen eisernen Leisten versehen, so dass sie, mit diesen auf die andere Platte gelegt, ein hohles Parallelepiped bildete. Über die untere Platte kann ein schmaler, rechteckiger, mit Kupferdrath umwickelter Holzrahmen geschoben werden. Der eine Theil jeder Windung liegt also in dem Hohlraume des Prisma, der andere ausserhalb. Es ist dies eine Vorrichtung, welche dem Eisenringe mit den um seine Wand laufenden Windungen analog ist.

Legt man das Prisma mit der Breitseite horizontal, so dass die Langseite dem magnetischen Meridian parallel läuft, so kann man die Verticalcomponente des Erdmagnetismus zur Induction benützen. Stellt man das Prisma vertical, mit der Breitseite senkrecht gegen den magnetischen Meridian, so kann die Horizontalcomponente verwendet werden. Aus dem Verhältniss der in beiden Fällen beobachteten Inductionsströme kann man auch erkennen, ob der etwa vorhandene remanente Magnetismus einen Einfluss auf die Erscheinungen hat oder nicht. Auch kann man, um diesen Punkt zu prüfen, die beiden das Prisma bildenden Platten in verschiedenen Arten übereinander legen.

Bringt man das Prisma etwa in die erste der oben angegebenen Lagen, hält es fest und verschiebt den Drahtrahmen, so zeigt das Galvanometer einen Strom an. Man erhält einen Strom von gleicher Intensität, aber entgegengesetzter Richtung, wenn man den Drahtrahmen festhält und den Eisenkörper in derselben Richtung, wie früher, bewegt.

Verschiebt man das Prisma zugleich mit den Drahtwindungen, so erhält man keinen Strom. Es sind dies dieselben Resultate, welche man auch mit dem Cylinder erhält, wenn man denselben nicht um seine Axe dreht, sondern progressiv verschiebt. Aus dem oben festgestellten Verhalten der Kraftlinien in jedem solchen Falle lässt sich das Ergebniss eines jeden Versuches leicht bestimmen.

Über die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen.

Von Dr. **Georg Al. Pick,**
Assistenten am physikalischen Institute der k. k. Universität zu Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. März 1882.)

Zur Entscheidung der Frage, ob ein gegebenes Abel'sches Integral durch Logarithmen algebraischer Functionen ausdrückbar ist und zum Zwecke der wirklichen Aufstellung der Reductionsgleichung, wenn eine solche existirt, können von vornherein zwei verschiedene Wege eingeschlagen werden, welche man in sofort verständlicher Weise als den algebraischen und den transcendenten unterscheiden kann. Den ersteren hat Abel[1] genommen, um das Problem für diejenigen hyperelliptischen Integrale zu lösen, welche für endliche Werthe der Variabeln stets endlich bleiben, also für eine ganz besondere Classe dieser Integrale. Auf den von Abel behandelten Fall hat Tchebichef[2] die Reductionsfrage für allgemeine elliptische Integrale zurückzuführen gesucht, vermittelst eines Verfahrens, welches zufolge der von Weierstrass[3] über dasselbe gemachten Bemerkungen als einer eigentlich principiellen Grundlage entbehrend zu verwerfen ist. Weierstrass weist auf den transcendenten Weg als denjenigen hin, welcher die naturgemässe Lösung des Problems für Abel'sche Integrale überhaupt liefert und gibt dieselbe vollständig für die elliptischen Integrale an.

Für hyperelliptische Integrale von der allgemeinsten Form ist die Reductionsfrage von Koenigsberger[4] behandelt worden.

---

[1] Oeuvres complètes, I., pag. 104. (Crelle's Journal, I.).

[2] Liouville's Journal, 1857, pag. 1.

[3] Berliner Monatsberichte, 1857, pag. 148.

[4] Koenigsberger, Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale, pag. 120ff., 132ff.

Mit Hilfe der Zerlegung des gegebenen Integrals in Normalintegrale wird die angenommene Gleichung in solche einfachere zerfällt, welche nur je ein logarithmisches Glied enthalten; eine Umformung, welche derjenigen entspricht, die auch von Weierstrass zunächst durchgeführt wird. Die weitere Untersuchung gewinnt die Bedingungen für die Existenz solcher Gleichungen sowohl in transcendenter als auch in algebraischer Form.

Die gegenwärtige Abhandlung bildet einen neuen Versuch in der algebraischen Behandlung des in Rede stehenden Problems. Es werden zunächst die Bedingungen in etwas veränderter Gestalt gewonnen. Um die Werthe der Irrationalität eindeutig festzustellen, für welche die Unstetigkeiten stattfinden, hat Tchebichef die Argumente der Logarithmen mit gewissen gebrochenen Functionen in Beziehung gesetzt und so einen Theil der Unstetigkeiten dem Einflusse des Zählers, den andern dem des Nenners der Ausdrücke von der Form

$$\frac{\gamma_1+\gamma\sqrt{D}}{\gamma_1-\gamma\sqrt{D}}$$

zugewiesen. Aus naheliegenden Gründen scheint eine solche Abtheilung nicht correct zu sein und es sind desshalb hier an Stelle einer Gleichung zwei gesetzt worden:

$$a\alpha^2 - c\gamma^2 = m$$
$$a\alpha\beta - c\gamma\delta = n$$

mit den nöthigen Bestimmungen für m und n. Die zweite derselben dient eben zur Fixirung des Vorzeichens jener Werthe von $\sqrt{D}$.

Die weitere Untersuchung bedient sich einer Methode, welche der zahlentheoretischen Behandlungsweise der quadratischen Formen von negativer Determinante vollkommen nachgebildet ist. Es hat sich bald gezeigt, dass diese Methode in genauer Beziehung zu der von Abel[1] steht, dessen Verfahren demjenigen bei den Formen von positiver Determinante analog ist. Auch dieses Verfahren lässt sich in verallgemeinerter Gestalt auf hyperelliptische Integrale mit beliebigen logarithmischen Unstetigkeiten

[1] a. a. O

anwenden, deren Irrationalität die Quadratwurzel aus einem Polynom paaren Grades ist. Da man jedoch Integrale dieser Art durch eine lineare Substitution in solche verwandeln kann, welche unter der Wurzel eine ganze Function unpaaren Grades enthalten, so wird man sich auf diesen letzteren Fall beschränken, für welchen die Untersuchung sich wesentlich einfacher gestaltet.

I.

Die allgemeinste Gleichung zwischen einem hyperelliptischen Integrale und Logarithmen algebraischer Functionen:

$$\int dU = A_1 lg\, V_1 + A_2 lg\, V_2 + \ldots .$$

lässt sich vermittelst der Reduction des Integrals auf sogenannte Normalformen[1] durch eine Anzahl einfacherer Gleichungen ersetzen, welche von der folgenden Form sind:

$$k_1 \int \frac{\sqrt{D_1}\, d\xi}{(\xi - \xi_1)\sqrt{D}} + k_2 \int \frac{\sqrt{D_2}\, d\xi}{(\xi - \xi_2)\sqrt{D}} + \ldots + k_r \int \frac{\sqrt{D_r}\, d\xi}{(\xi - \xi_r)\sqrt{D}}$$
$$= \int \frac{\rho_0\, d\xi}{\sqrt{D}} + \frac{1}{k} \log \left\{ \frac{\gamma_1 + \gamma\sqrt{D}}{\gamma_1 - \gamma\sqrt{D}} \right\}.^2$$

Es bedeutet hierin D ein ganzes Polynom in ξ vom Grade $2p+1$, dessen Linearfactoren sämmtlich verschieden sind; k_1, $k_2, \ldots k_r$ ganze positive Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler; $\xi_1, \sqrt{D_1}$; $\xi_2, \sqrt{D_2}$; $\ldots$ $\xi_r, \sqrt{D_r}$ zusammengehörige Werthepaare von $\xi, \sqrt{D}$; ρ_0 eine ganze Function höchstens vom Grade $p-1$; k eine positive rationale Zahl; γ_1, γ ganze Polynome in ξ ohne gemeinsamen Theiler. Die Grössen der linken Seite sind als gegebene, diejenigen der rechten Seite als zu suchende anzusehen.

Wir schreiben die Reductionsgleichung kürzer:

$$\int \frac{\rho\, d\xi}{\sqrt{D}} = \int \frac{\rho_0 d\xi}{\sqrt{D}} + \frac{1}{k} \log \left\{ \frac{\gamma_1 + \gamma\sqrt{D}}{\gamma_1 - \gamma\sqrt{D}} \right\}, \qquad (1)$$

---

[1] Koenigsberger, a. a. O., pag. 39 ff.

[2] Ebend., pag. 120 ff., 132 ff.

indem wir setzen:

$$\frac{k_1\sqrt{D_1}}{\xi-\xi_1}+\frac{k_2\sqrt{D_2}}{\xi-\xi_2}+\ldots+\frac{k_r\sqrt{D_r}}{\xi-\xi_r}=\rho. \tag{2}$$

Es ist leicht zu sehen, dass der grösste gemeinsame Theiler von γ_1 und D auch grösster gemeinsamer Theiler von $\gamma_1^2-\gamma^2 D$ und γ_1 oder D ist. Wir bezeichnen ihn mit a und setzen

$$\begin{aligned} D &= a.c \\ \gamma_1 &= a.\alpha \\ a\alpha^2 - c\gamma^2 &= m; \end{aligned} \tag{3}$$

$a\alpha^2$ und $c\gamma^2$ sind dann ohne gemeinschaftlichen Theiler.

Die Gleichung (1) verwandelt sich hiedurch in

$$\int\frac{\rho d\xi}{\sqrt{D}}=\int\frac{\rho_0 d\xi}{\sqrt{D}}+\frac{1}{k}\log\left\{\frac{\alpha\sqrt{a}+\gamma\sqrt{c}}{\alpha\sqrt{a}-\gamma\sqrt{c}}\right\}, \tag{4}$$

woraus durch Differentiation und Multiplication mit $\sqrt{D}$ folgt:

$$\rho=\rho_0+\frac{1}{k}.\frac{\mu}{m} \tag{5}$$

unter der abkürzenden Bezeichnung:

$$\mu=a\alpha\left(2c\frac{d\gamma}{d\xi}+\gamma\frac{dc}{d\xi}\right)-c\gamma\left(2a\frac{d\alpha}{d\xi}+\alpha\frac{da}{d\xi}\right). \tag{6}$$

Nun hat man identisch

$$\left.\begin{aligned} \mu\alpha &= m\,(2c\gamma' + c'\gamma) - m'.c\gamma \\ \mu\gamma &= m\,(2a\alpha' + a'\alpha) - m'.a\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

worin, wie üblich durch a', c', α', γ', m' die Ableitungen von a, c, α, γ, m nach ξ bezeichnet sind. Versteht man unter β, δ zwei Polynome, welche der Gleichung

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1$$

genügen, und setzt

$$\begin{aligned} a\alpha\beta - c\gamma\delta &= n \\ \delta(2c\gamma' + c'\gamma) - \beta(2a\alpha' + a'\alpha) &= \nu, \end{aligned}$$

so wird (Gl. 7)

$$\mu(\alpha\delta-\beta\gamma)=\mu=m.\nu+m'.n,$$

oder

$$\frac{\mu}{m} = \nu + \frac{nm'}{m}. \tag{8}$$

Nun ist leicht zu sehen, dass n und m Functionen ohne gemeinsamen Theiler sind. Denn ein solcher kann, da er auch Theiler der Functionen

$$\left.\begin{aligned} \delta m - \gamma n &= a\alpha \\ \beta m - \alpha n &= c\gamma \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

sein müsste, nach dem Früheren nur eine Constante sein.

Hieraus ist klar, dass, sowie die rechte, auch die linke Seite von (8) für jeden Werth von ξ, welcher der Gleichung

$$m = 0$$

genügt, unendlich wird und zwar von der ersten Ordnung, sonst aber endlich bleibt, ausgenommen für $\xi = \infty$; es ergibt sich durch Vergleichung von (3) und (6) leicht, dass der Grad von μ den von m höchstens um die Zahl $p-1$ übersteigt.

Es ist jetzt leicht zu sehen, welches die Lösungen von $m = 0$ sein müssen, wenn die Gleichung (4) oder, was dasselbe ist, (5) bestehen soll. Bedeuten $h_1, h_2, \ldots h_r$ ganze positive Zahlen, so muss m von der Form sein:

$$m = (\xi - \xi_1)^{h_1}(\xi - \xi_2)^{h_2} \ldots (\xi - \xi_r)^{h_r},$$

so dass

$$\frac{m'}{m} = \frac{h_1}{\xi - \xi_1} + \frac{h_2}{\xi - \xi_2} + \ldots + \frac{h_r}{\xi - \xi_r}$$

wird. Hieraus geht hervor, dass $\frac{\mu}{m}$ für die Werthe

$$\xi = \xi_1, \ \xi_2, \ldots \xi_r$$

beziehungsweise unendlich wird, wie die Grössen

$$\frac{h_1}{\xi - \xi_1} \cdot [n]_{\xi = \xi_1}, \ \frac{h_2}{\xi - \xi_2} \cdot [n]_{\xi = \xi_2}, \ldots \frac{h_r}{\xi - \xi_r} \cdot [n]_{\xi = \xi_r}.$$

Für irgend eine Wurzel von $m = 0$ ist aber (Gl. 9)

$$\begin{aligned} -\gamma n &= \alpha a \\ -\alpha n &= \gamma c, \end{aligned}$$

oder

$$\alpha\gamma . n^2 = \alpha\gamma . D,$$

das heisst, weil $\alpha\gamma$ für solche Werthe nicht verschwinden kann,

$$n^2 = D.$$

Also ist

$$[n]_{\xi=\xi_1} = \pm\sqrt{D_1},\ [n]_{\xi=\xi_2} = \pm\sqrt{D_2}, \ldots [n]_{\xi=\xi_r} = \pm\sqrt{D_r}.$$

Die Gleichung (5) erfordert zu ihrem Bestehen, dass in den letzten Relationen überall die oberen Zeichen genommen werden, so dass $[n]_{\xi=\xi_1} = +\sqrt{D_1}$ ist, und so fort. Sie liefert ferner die Bestimmungen

$$h_1 = k_1 . k,\ h_2 = k_2 . k, \ldots h_r = k_r . k,$$

woraus hervorgeht, dass k eine ganze Zahl sein muss. Führt man die Bezeichnung ein

$$M = (\xi - \xi_1)^{k_1} . (\xi - \xi_2)^{k_2} \ldots (\xi - \xi_r)^{k_r},$$

so ist M ein durch die Daten der Aufgabe völlig bestimmtes Polynom. Man hat dann

$$m = M^k.$$

Offenbar lässt sich das Bisherige folgendermassen zusammenfassen:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Reductionsgleichung (1) respective (4) ist die Existenz von vier ganzen Polynomen α, β, γ, δ von der Beschaffenheit, dass

$$\begin{aligned} a\alpha^2 - c\gamma^2 &= m = M^k \\ a\alpha\beta - c\gamma\delta &= n \\ \alpha\delta - \beta\gamma &= 1 \end{aligned}$$

wird, wobei

$$\begin{aligned} ac &= D \\ M &= (\xi - \xi_1)^{k_1} (\xi - \xi_2)^{k_2} \ldots (\xi - \xi_r)^{k_r}, \end{aligned}$$

k eine beliebige ganze positive Zahl ist und n für

$$\xi = \xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_r$$

die Werthe

$$\sqrt{D_1},\ \sqrt{D_2}, \ldots . \sqrt{D_r}$$

annimmt.

II.

Man kann den erlangten Bedingungen eine viel übersichtlichere Form geben, wenn man einige Bezeichnungen der Zahlentheorie entlehnt. Versteht man nämlich in den quadratischen Formen

$$(a,\ b,\ c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

und in den Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \gamma x' + \delta y' \end{cases},$$

welche man auf dieselben anwendet, unter den Grössen a, b, c, α, β, γ, δ nicht ganze Zahlen, sondern ganze Functionen einer Variabeln (ξ), so kann man ohne Weiters von der Äquivalenz zweier solcher Formen sprechen, in analogem Sinne, wie in der Zahlentheorie. Unter Anwendung dieser Anschauungsweise lassen sich alsdann die Bedingungen für die Reduction dahin zusammenfassen, zu entscheiden, ob die beiden Formen $(a,\ 0,\ -c)$, $(m,\ n,\ m_1)$, worin a, c, m, n die frühere Bedeutung haben und m_1 entsprechend gewählt ist, einander äquivalent sind.

Die „Determinante" der Form $(a,\ 0,\ -c)$ ist

$$0 - a.(-c) = D,$$

und folglich muss vor Allem auch

$$n^2 - mm_1 = D$$

sein, oder

$$n^2 \equiv D \pmod{m},$$

wenn man sich der Schreibweise der Zahlentheorie bedient. Man kann aus dieser „Congruenz" wieder sofort schliessen, dass für jede Lösung von $m = 0$ nothwendig

$$n^2 = D$$

werden muss.

Es ist klar, dass die Congruenz

$$x^2 \equiv D \pmod{m}$$

gleichbedeutend mit der Forderung ist, da ssx^2-D durch jede der Grössen $(\xi-\xi_1)^{kk_1}, \ldots (\xi-\xi_r)^{kk_r}$ theilbar sei. Ist nun

$$D = D_1 + D_1'(\xi-\xi_1) + D_1''(\xi-\xi_1)^2 + \ldots$$
$$x = x_1 + x_1'(\xi-\xi_1) + x_1''(\xi-\xi_1)^2 + \ldots$$

in der Entwicklung nach Potenzen von $\xi-\xi_1$, so wird

$$x^2-D = (x_1^2-D_1) + (2x_1x_1'-D_1')(\xi-\xi_1)$$
$$+ (2x_1x_1'' + x_1'^2-D_1'')\,(\xi-\xi_1)^2 + \ldots.$$

Soll x^2-D durch $(\xi-\xi_1)^{kk_1}$ theilbar sein, so müssen die ersten kk_1-Coëfficienten dieser Entwicklung verschwinden. Die Gleichungen, die man so erhält, liefern offenbar für die Grössen $x_1', x_1'', \ldots x_1^{(kk_1-1)}$ eine eindeutige Bestimmung durch x_1 und gegebene Grössen, während sich für x_1 selbst zwei Werthe $\pm\sqrt{D_1}$ ergeben.

In dieser Weise wird man für sämmtliche Lösungen von $m = 0$ zu verfahren haben. Die Zahl der Werthe, die man für x erhält, ist offenbar, abgesehen von Vielfachen von m, die man beliebig hinzufügen kann, gleich 2^r. Trifft man aber die Festsetzung

$$x_1 = +\sqrt{D_1},\ x_2 = +\sqrt{D_2}, \ldots x_r = +\sqrt{D_r},$$

so hat man dadurch unter den 2^r Werthen für x einen bestimmten ausgewählt.

III.

Die Aufgabe, auf deren Lösung die Reductionsfrage zurückgeführt worden ist, lässt eine ganz analoge Behandlung zu, wie die entsprechende der Zahlentheorie. Die Möglichkeit zu entscheiden, ob die Äquivalenz

$$(a, b, c) = (a_1, b_1, c_1)$$

stattfindet, und die Substitutionen herzustellen, welche die eine Form in die andere überführen, wird gegeben sein, wenn man erstens eine Methode besitzt, welche zugleich mit der Entscheidung über die Äquivalenz eine jener Substitutionen liefert, und zweitens alle Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}$$

darzustellen im Stande ist, welche eine der fraglichen Formen, etwa (a, b, c) in sich selbst überführen.

Die letztere Aufgabe wird vermittelst der Relationen

$$\lambda = t - bu, \quad \mu = cu, \quad \nu = au, \quad \rho = t + bu$$

auf die Auflösung der unbestimmten Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

durch ganze Functionen t, u zurückgeführt.

Für den Fall, auf welchen wir uns beschränken können, dass nämlich

$$D = b^2 - ac = b_1^2 - a_1 c_1$$

ein Polynom vom Grade $2p+1$ ist, worin p eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, besitzt diese Gleichung offenbar nur die Lösungen

$$t = \pm 1, \quad u = 0.$$

Die hieraus sich ergebenden Substitutionen sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es erübrigt also nur noch die Herstellung der oben geforderten Methode zur Entscheidung über die Äquivalenz.

Zu diesem Zwecke führen wir „reducirte Formen“ ein, und zwar bezeichnen wir so diejenigen Formen (a, b, c) für welche

$$[b] \leqq [a] - 1$$
$$[a] \leqq [c] - 1$$

ist; hiebei ist für den Grad einer Function f die Bezeichnung $[f]$ verwendet.

Hält man diese Festsetzung mit der Relation

$$b^2 - ac = D$$

zusammen, so folgt offenbar

$$[a] + [c] = 2p+1$$
$$[a] \leqq p$$
$$[b] \leqq p-1$$
$$[c] \geqq p+1.$$

Wendet man nun auf eine beliebige Form

$$(a, b, a_1)$$

die Substitution

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$$

an, wodurch dieselbe in

$$(a_1, b_1, a_2)$$

übergehen mag, so lässt sich jedenfalls δ so bestimmen, dass

$$b_1 = -b - a_1\delta$$

von niedrigerem Grade wird als a_1. Man braucht zu diesem Zwecke blos $(-b)$ durch a_1 zu dividiren, wodurch man δ als Quotienten und b_1 als Rest von der verlangten Beschaffenheit findet.

Für den Fall, dass der Grad von

$$a_2 = a + \delta(b - b_1)$$

niedriger wird als der von a_1, ist nun auf die Form $a_1, b_1, a_2)$ eine neue Substitution

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

anzuwenden, so dass eine dritte Form entsteht

$$(a_2, b_2, a_3),$$

für welche

$$[b_2] \leqq [a_2] - 1$$

ist. Auf diese Weise fortfahrend muss man nach einer endlichen Anzahl von Substitutionen zu einer Form (a_h, b_h, a_{h+1}) gelangen, so dass zugleich

$$[b_h] \leqq [a_h] - 1$$
$$[a_h] \leqq [a_{h+1}] - 1$$

ist, also zu einer reducirten Form. Denn die Reihe

$$[a_1] > [a_2] > [a_3] > \ldots .$$

kann nur eine endliche Zahl von Gliedern enthalten; es muss also ein bestimmtes h existiren, für welches

$$[a_h] \leqq [a_{h+1}]$$

wird. Da nun aber zu gleicher Zeit

$$[b_h] \leqq [a_h] - 1$$

ist, so folgt

$$[a_h] + [a_{h+1}] = 2p + 1,$$

woraus sich ergibt, dass $[a_h]$ nicht gleich $[a_{h+1}]$ sein kann, dass also gewiss

$$[a_h] \leqq [a_{h+1}] - 1 \text{ ist.}$$

Auf diese Weise kann man jede gegebene Form in eine äquivalente reducirte überführen. Es bleibt noch die Äquivalenz reducirter Formen untereinander zu untersuchen.

Sei also

$$(a, b, c) = (a_1, b_1, c_1)$$

durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix};$$

so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 &= a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \\ b_1 &= a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta \\ 1 &= \alpha\delta - \beta\gamma. \end{aligned}$$

Es ist somit

$$aa_1 = (a\alpha + b\gamma)^2 - D\gamma^2,$$

wenn D wieder die Determinante der beiden reducirten Formen bezeichnet. Die rechte Seite enthält die Differenz zweier ganzer Functionen von verschiedenen Graden, da der Grad der einen durch 2 theilbar ist, der der andern aber nicht. Da ferner

$$[a] + [a_1] \leqq p + p \leqq 2p$$

ist, so muss

$$\gamma = 0$$

sein. Daraus folgt

$$\alpha\delta = 1,$$

also sind α und δ constante, von Null verschiedene Grössen.

Es ist weiter

$$a_1 = a\alpha^2,$$

woraus folgt

$$[a_1] = [a].$$

Ferner

$$b_1 = a\alpha\beta + b,$$

was mit Rücksicht auf

$$[b] \leqq [a]-1$$
$$[b_1 \leqq [a_1]-1$$
$$\leqq [a]-1$$

zeigt, dass auch

$$\beta = 0$$

sein muss.

Nun ist, was für einen constanten Werth immer α haben möge,

$$(a, b, c) = (a\alpha^2, b, c.\frac{1}{\alpha^2})$$

durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix},$$

und beide solche Formen sind in der That zugleich reducirt oder nicht.

Das Resultat dieses Abschnittes lautet zusammengefasst:

Um zu entscheiden, ob zwei quadratische Formen der hier betrachteten Art äquivalent sind, suche man zu jeder derselben eine äquivalente reducirte; haben die beiden so erhaltenen Formen denselben mittleren Coëfficienten, während sich die entsprechenden äusseren Coëfficienten nur durch constante Factoren unterscheiden, so findet Äquivalenz statt, sonst nicht. Es gibt zwei und nur zwei Substitutionen, welche eine Form in eine bestimmte andere, ihr äquivalente überführen; sie unterscheiden sich nur durch die Vorzeichen der vier Functionen α, β, γ, δ, welche in beiden die entgegengesetzten sind.

IV.

Die im Abschnitte II vorkommende Form

$$(a, 0, -c)$$

ist durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

der Form

$$(-c, 0, a)$$

äquivalent, und es ist klar, dass eine der beiden eine reducirte sein muss.

Die Form (m, n, m_1) wird nach den im vorigen Abschnitte gegebenen Regeln in eine reducirte verwandelt werden können. Diese muss mit $(a, o, -c)$ oder $(-c, o\ a)$ bis auf constante Factoren von a und c übereinstimmen, wenn zwischen (m, n, m_1) und $(a, o, -c)$ Äquivalenz stattfinden soll.

Über die Functionen a und c ist nichts anderes festgesetzt, als dass ihr Product gleich D ist. Wenn also nur die der Form (m, n, m_1) äquivalente reducirte Form von der Gestalt

$$(\varphi, o, \psi)$$

ist, so kann man

$$\varphi = a, \psi = -c$$

setzen, und a, c als diejenigen beiden Factoren von D betrachten, von welchen im Abschnitte I. ausgegangen worden ist.

Wir sind nun dazu gelangt, folgende Vorschrift für die Behandlung des ursprünglich gestellten Problems zu geben:

Man setze

$$M = (\xi - \xi_1)_{k_1}(\xi - \xi_2)_{k_2} \cdots (\xi - \xi_r)_{k_r}$$

und für m der Reihe nach die Werthe M, M^2, M^3, ...; bestimme für jeden Werth von m die zugehörigen von n und m_1 aus der Gleichung

$$n^2 - mm_1 = D$$

nach der früher auseinandergesetzten Methode und zwar so, dass n für

$$\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$$

die Werthe

$$\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2}, \ldots \sqrt{D_r}$$

erhält. Dann ist für die Existenz einer Reductionsgleichung von der vorausgesetzten Gestalt nothwendig und hinreichend, dass eine der quadratischen Formen

$$(m, n, m_1)$$

einer reducirten äquivalent ist, deren mittlerer Coëfficient identisch verschwindet.

Wenn also für $m = M^k$

$$(a, o, -c) = (m, n, m_1)$$

ist durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

so hat man eine Gleichung von der Form

$$\int \frac{\rho d\xi}{\sqrt{D}} = \int \frac{\rho_0 d\xi}{\sqrt{D}} + \frac{1}{k} \log \left\{ \frac{\alpha\sqrt{a} + \gamma\sqrt{c}}{\alpha\sqrt{a} - \gamma\sqrt{c}} \right\}$$

oder

$$\int \frac{\rho d\xi}{\sqrt{D}} = \int \frac{\rho_0 d\xi}{\sqrt{D}} + \frac{1}{k} \log \left\{ \frac{\alpha a + \gamma\sqrt{D}}{\alpha a - \gamma\sqrt{D}} \right\}.$$

Hieran kann man noch folgende Bemerkungen knüpfen. Setzt man

$$\frac{\alpha a + \gamma\sqrt{D}}{\alpha a - \gamma\sqrt{D}} = V,$$

so sind $V^2, V^3, \ldots$ Grössen von derselben Gestalt wie V. Da nun

$$\frac{1}{k} \log V = \frac{1}{2k} \log V^2 = \frac{1}{3k} \log V^3 = \ldots$$

ist, ist ersichtlich, dass ausser der hingesetzten Reductionsgleichung noch andere existiren, in welchen k durch beliebige Vielfache dieser Grösse ersetzt ist.

Ist andererseits

$$\int\frac{\rho d\xi}{\sqrt{D}} = \int\frac{\rho_0 d\xi}{\sqrt{D}} + \frac{1}{k}\log V$$

und zugleich

$$\int\frac{\rho d\xi}{\sqrt{D}} = \int\frac{\rho'_0 d\xi}{\sqrt{D}} + \frac{1}{k'}\log V',$$

so kann man zwei ganze Zahlen h, h' so bestimmen, dass

$$hk' + h'k' = \varkappa,$$

dem grössten gemeinsamen Theiler von k, k' wird. Man erhält dann aus den früheren Gleichungen durch Multiplication mit hk, beziehungsweise $h'k'$ und nachherige Addition

$$\varkappa\int\frac{\rho d\xi}{\sqrt{D}} = \int\frac{hk\rho_0 + h'k'\rho_0'}{\sqrt{D}}d\xi + \log(V^h \cdot V'^{h'}),$$

woraus ersichtlich ist, dass für $\int\frac{\rho d\xi}{\sqrt{D}}$ eine Reduction mit Hilfe des grössten gemeinschaftlichen Theilers der ursprünglichen Zahlen k, k' besteht.

Man folgert aus diesen Bemerkungen, dass sämmtliche Functionen m, durch welche für ein bestimmtes reductibles Integral Reductionsgleichungen erlangt werden können, eine Reihe von der Form

$$M^k, M^{2k}, M^{3k}, \ldots.$$

bilden.

V.

Die auseinandergesetzte Methode kann mit Vortheil benutzt werden, um in systematischer Weise Integrale aufzustellen, welche durch Logarithmen ausdrückbar sind.

Ein Integral von der Form

$$\int\left[\frac{k_1\sqrt{D_1}}{\xi-\xi_1} + \frac{k_2\sqrt{D_2}}{\xi-\xi_2} + \ldots\right]\frac{d\xi}{\sqrt{D}}$$

ist, wenn nicht besondere Beziehungen zwischen den Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ und dem Polynom D stattfinden, irreductibel. Wenn man also für ein beliebiges k die drei Functionen m, n, m_1 bildet, so wird die der Form (m, n, m_1) äquivalente reducirte Form einen

von Null verschiedenen mittleren Coëfficienten b haben, dessen Grad allgemein zu reden der $(p-1)^{te}$ sein wird, wenn man D vom Grade $2p+1$ voraussetzt. Hieraus ist ersichtlich, dass die in dem Integrale enthaltenen Constanten p Bedingungsgleichungen erfüllen müssen, wenn dasselbe reductibel sein soll; denn dazu ist erforderlich, dass b identisch verschwindet. Bestimmt man jene Constanten den Bedingungsgleichungen gemäss, so hat man in der That ein Integral gewonnen, welches durch einen Logarithmus ausdrückbar ist, abgesehen von Integralen erster Gattung.

Bezüglich der Zahl k kann noch eine untere Grenze festgestellt werden. Wenn nämlich der Grad von m nicht grösser als die Zahl p ist, ist die Form (m, n, m_1) selbst schon eine reducirte und die Bedingung $n = 0$ würde bestimmen, dass m ein Theiler von D sei. Dieser Fall, in welchem das Integral identisch verschwindet, ist auszuschliessen, wie man denn überhaupt m und D ohne gemeinschaftlichen Theiler voraussetzen darf. Es ist also k so gross zu wählen, dass der Grad von m die Zahl p übersteigt.

Zwei einfache Beispiele werden geeignet sein, die Anwendung der Methode zu illustriren. Wir wählen dazu elliptische Integrale, für welche D vom dritten Grade, also $p = 1$ ist.

Sei zunächst

$$\int \frac{\sqrt{D_1}}{\xi - \xi_1} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{D}}$$

das zu reducirende Integral. Wir setzen

$$k = 2;$$

der Fall $k = 1$ ist nach dem früheren auszuschliessen.

Dann ist

$$m = (\xi - \xi_1)^2,$$

und wenn man setzt

$$D = D_1 + D_1'(\xi - \xi_1) + D_1''(\xi - \xi_1)^2 + D_1'''(\xi - \xi_1)^3,$$

so bestimmt sich

$$n = \sqrt{D_1} + \frac{D_1'}{2\sqrt{D_1}}(\xi - \xi_1),$$

$$m_1 = \left(\frac{D_1'^2}{4D_1} - D_1''\right) - D_1'''(\xi - \xi_1).$$

Man erhält ferner

$$\delta = \frac{D_1'}{2D_1'''\sqrt{D_1}},$$

$$n_1 = \sqrt{D_1} + \frac{D_1'}{2D_1'''\sqrt{D_1}}\left\{\frac{D_1'^2}{4D_1} - D_1''\right\},$$

$$m_2 = m + \delta(n - n_1).$$

Hier ist die Form (m_1, n_1, m_2) schon eine reducirte; man hat also zu setzen $n_1 = 0$, oder

$$D_1'^3 + 8D_1^2D_1''' - 4D_1D_1'D_1'' = 0.$$

Wenn man D als gegeben betrachtet, so dient diese Gleichung als Bestimmungsgleichung für ξ_1 und ist in dieser Grösse vom sechsten Grade. Man kann ebensogut umgekehrt ξ_1 willkührlich annehmen und die Constanten von D der Gleichung gemäss bestimmen. In jedem Falle ist $m_2 = m + \delta n$, oder

$$m_2 = \frac{D_1'}{2D_1'''} + \frac{D_1'^2}{4D_1D_1'''}(\xi - \xi_1) + (\xi - \xi_1)^2,$$

und

$$(m_1,\ 0,\ m_2) = (m,\ n,\ m_1)$$

durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} \delta & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endlich bestimmt sich ρ_0 leicht mit Hilfe der Gleichung (5) im ersten Abschnitte und zwar wird

$$\rho_0 = -\frac{D_1'}{4\sqrt{D_1}}.$$

Die Reductionsgleichung lässt sich nun sofort zusammensetzen. Ist zum Beispiel

$$D = 1 + 2\xi - \xi^3$$

$$\xi_1 = 0,\ \sqrt{D_1} = 1,$$

so wird

$$m = \xi^2$$

$$n = 1 + \xi$$

$$m_1 = 1 + \xi$$

$$n_1 = 0$$

$$m_2 = -1 - \xi + \xi^2$$
$$\delta = -1$$
$$\rho_0 = -\frac{1}{2},$$

also

$$\int \frac{(\xi+2)\,d\xi}{\xi\sqrt{1+2\xi-\xi^3}} = \log\left\{\frac{-\sqrt{1+\xi}+\sqrt{1+\xi-\xi^2}}{-\sqrt{1+\xi}-\sqrt{1+\xi-\xi^2}}\right\}.$$

In ähnlicher Weise kann man für $k = 3, 4, \ldots$ verfahren; die Rechnungen lassen sich sehr einfach und übersichtlich durchführen. Man erhält so eine Reihe von Reductionsgleichungen, welche durch lineare Substitutionen leicht in die von Abel angegebenen zu überführen sind, in welchen die logarithmische Unstetigkeit für einen unendlich grossen Werth der Variabeln stattfindet.

Wir wollen nun ein Beispiel der Reduction des Integrals

$$\int\left(\frac{\sqrt{D_1}}{\xi-\xi_1}+\frac{\sqrt{D_2}}{\xi-\xi_2}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{D}}$$

geben. Sei $k = 1$, also

$$m = (\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2),$$

so wird

$$n = \frac{\sqrt{D_1}}{\xi_1-\xi_2}(\xi-\xi_2) - \frac{\sqrt{D_2}}{\xi_1-\xi_2}(\xi-\xi_1),$$

und es kann gesetzt werden:

$$D = \frac{D_1}{\xi_1-\xi_2}(\xi-\xi_2) - \frac{D_2}{\xi_1-\xi_2}(\xi-\xi_1) + (\lambda\xi+\lambda')(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2),$$

wo λ und λ' Constante sind.

Ferner wird

$$m_1 = \left(\frac{\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2}}{\xi_1-\xi_2}\right)^2 - (\lambda\xi+\lambda')$$
$$\delta = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2}}{\xi_1-\xi_2}$$
$$n_1 = \frac{-1}{\lambda}\left(\frac{\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2}}{\xi_1-\xi_2}\right)^3 + \frac{\lambda'}{\lambda}\cdot\frac{\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2}}{\xi_1-\xi_2} - \frac{\xi_1\sqrt{D_2}-\xi_2\sqrt{D_2}}{\xi_1-\xi_1}.$$

Es ist dann wieder zu setzen $n_1 = 0$, oder

$$0 = -\left(\frac{\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2}}{\xi_1-\xi_2}\right)^3 + \lambda'\frac{\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2}}{\xi_1-\xi_2} - \lambda\frac{\xi_1\sqrt{D_2}-\xi_2\sqrt{D_1}}{\xi_1-\xi_2},$$

welche Gleichung man am einfachsten als Bestimmungsgleichung für λ oder λ' ansehen kann. Man hat dann noch

$$m_2 = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2}}{\xi_1-\xi_2}\left\{\frac{\sqrt{D_1}}{\xi_1-\xi_2}(\xi-\xi_2) - \frac{\sqrt{D_2}}{\xi_1-\xi_2}(\xi-\xi_1)\right\} + (\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2),$$

und

$$\rho_0 = -\frac{\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2}}{\xi_1-\xi_2},$$

und somit alle Elemente, welche in die Reductionsgleichung eingehen, gewonnen. Als specieller Fall ergibt sich beispielsweise

$$\int\frac{\xi^2+2\xi-1}{\xi(\xi-1)}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{1+3\xi+\xi^2-\xi^3}} = \log\left\{\frac{-\sqrt{1+\xi}+\sqrt{1+2\xi-\xi^2}}{-\sqrt{1+\xi}-\sqrt{1+2\xi-\xi^2}}\right\}.$$

In ähnlicher Weise fortfahrend kann man die Zahl der gewonnenen reductiblen Integrale beliebig vermehren.

VI.

Aus der Gleichung

$$a\alpha^2 - c\gamma^2 = m,$$

welche im Abschnitte I. aufgestellt worden ist, folgt nach dem Abel'schen Theorem unmittelbar

$$k_1\int_{\xi_1}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{D}} + k_2\int_{\xi_2}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{D}} + \ldots + k_r\int_{\xi_r}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{D}} = \frac{C}{k},$$

wobei $\varphi(\xi)$ ein beliebiges Polynom von niedrigerem als dem $p$ten Grade bedeutet und zur gemeinschaftlichen unteren Grenze der Integrale irgend eine der Wurzeln von $D=0$ genommen ist. Die Grösse C findet sich als eine Summe von Integralen $\int\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{D}}$, deren beide Grenzen Verzweigungswerthe von $\sqrt{D}$ sind. Solche Integrale kann man[1] leicht durch die Periodicitätsmoduln

$$w_1, w_2, \ldots w_{2p}$$

[1] Koenigsberger, a. a. O., pag. 36 ff.

von $\int \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{D}}$ ausdrücken. Man erhält dadurch

$$2C = h_1 w_1 + h_2 w_2 + \ldots + h_{2p} w_{2p},$$

wo die h ganze Zahlen bedeuten.

Setzt man diesen Werth in die frühere Gleichung ein und nimmt dann für $\varphi(\xi)$ p von einander linear unabhängige ganze Functionen, zum Beispiel $1, \xi, \xi^2, \ldots \xi^{p-1}$, so gehen p Gleichungen hervor, welche die Bedingungen der Reduction in transcendenter Form bilden.

Es sei mir gestattet, im Anschluss hieran noch eine Bemerkung über die Verwendbarkeit der früher auseinandergesetzten Methode zu machen.

Die Entscheidung, ob ein gegebenes Integral reducirbar ist, oder nicht, ist nämlich bei dem angegebenen Verfahren an eine Folge von Operationen gebunden, deren Zahl wegen der Unbestimmtheit von k selbst unbestimmt ist. Aus diesem Grunde kann man der Methode den Werth eines Kriteriums nicht zugestehen. In demselben Falle befinden sich jedoch auch die Bedingungen in transcendenter Form, welche das Problem auf die Aufgabe zurückführen, zu entscheiden, ob eine Relation

$$mA + m'A' + m''A'' + \ldots = 0$$

zwischen gegebenen Grössen $A, A', A'', \ldots$ mittelst ganzer Zahlen $m, m', m'', \ldots$ stattfindet. Die einfachste Aufgabe dieser Art, zu untersuchen, ob zwei gegebene Grössen A, A' ein rationales Verhältniss haben, führt ihrer Natur nach schon auf eine Operationenfolge von unbestimmter Ausdehnung, nämlich auf das Verfahren zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A, A'. Und das Verfahren wird wegen der transcendenten Form der gegebenen Grössen überhaupt practisch nicht gut anwendbar sein. Will man jedoch eben von dieser besonderen Form speciellen Gebrauch zur Lösung des Problems machen, so scheint das Abelsche Theorem auf den algebraischen Weg zurückzuweisen.

Astronomische Untersuchungen über Finsternisse.

Von **F. K. Ginzel,**
Astronom zu Wien.

I. Abhandlung.

(Mit 2 Karten.)

Über die zwischen 26 und 103 n. Chr. stattgefundenen Sonnenfinsternisse im Allgemeinen und die Finsterniss des Plutarch insbesonders.

In Plutarch's Schrift „De facie in orbe Lunae" wird über eine sehr bedeutende Verfinsterung der Sonne gesprochen. Diese Finsterniss hat auch die Aufmerksamkeit der Astronomen auf sich gelenkt, und mehrere Male ist die Feststellung des Datums der Erscheinung versucht worden. Prof. Hind hatte in dieser Beziehung, obwohl er nach Hansen's und Leverrier's Tafeln arbeitete und die von ersterem gegebene Säcularacceleration der Mondbewegung benützte, keinen Erfolg, wie aus den folgenden Worten hervorgeht, mit welchen er über seinen Versuch berichtet:

„The Eclipse of 113 May 31. — Kepler, after endeavouring to ascertain the date of a total eclipse mentioned by Plutarch as having „recently occurred about noon", when the darkness was like that of night, and stars were seen in all directions, states he had found none which accorded better with the description than the above. On submitting it to calculation on the modern elements, the central line appears to have passed too far north-over central Germany. I have not succeeded in discovering the date of this eclipse, thoug I have accurately examined several at the close of the first and beginning of the second century." [1]

[1] Nature. Vol. VI, pag. 251 ff. 1872.

Dieses negative Ergebniss war eine der Ursachen, welche mich zur vorliegenden Untersuchung bestimmten und ich glaube, wie dies aus den später folgenden Darlegungen hervorgeht, die Finsterniss des Plutarch unzweifelhaft festgestellt zu haben.

Meine sämmtlichen Rechnungen basiren auf den „Syzygien-Tafeln für den Mond" von Prof. Dr. Th. v. Oppolzer[1], deren Druck soeben vollendet worden ist. Diese neuen ecliptischen Tafeln, welche wohl die genauesten unter den bisher erschienenen sind, repräsentiren das Ergebniss einer neuen auf Hansen's und Leverrier's Arbeiten fussenden, sehr sorgfältigen Analyse und sind in ihrer Anwendung von grosser Bequemlichkeit. Herr Prof. v. Oppolzer hatte die Freundlichkeit, mir die Benützung seines Werkes unmittelbar nach der Beendigung der Tafelrechnungen zu gestatten, so dass ich schon jetzt in der Lage bin, einen Theil meiner Ergebnisse der Öffentlichkeit übergeben zu können.

Die Aufsuchung der oben erwähnten Finsterniss des Plutarch machte, da dieselbe aus später zu erwähnenden Gründen nur in die zweite Hälfte des ersten Jahrhunderts nach Christi fallen kann, eine systematische Durchsuchung dieses Zeitraumes nothwendig. Ich erweiterte die Grenzen, indem ich bis zum Jahre 26 n. Chr. zurückging und alle von den griechischen und lateinischen Autoren erwähnten, wie auch die unter den Kaisern Kuang-wu-ti, Ming-ti, Tschang-ti und Ho-ti in China beobachteten Sonnenfinsternisse eingehend behandelt habe; von den letzteren sind die meisten hier zum ersten Male angezeigt und berechnet. Die bezeichnete Materie ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

In der zweiten später folgenden Abhandlung werde ich die Finsternisse verschiedener Perioden untersuchen und die Ergebnisse zur Ableitung empirischer Correctionen verwenden.

Ich lasse meinen Resultaten eine historische Darstellung der bisher an den für Finsternisse wichtigen Elementen der Mondbahn, insbesonders dem Werthe der Säcularacceleration der Länge vorgenommenen Änderungen vorangehen, wobei ich Gelegenheit haben werde, eine Eigenthümlichkeit der Oppolzer'schen Tafeln zu erwähnen, von der ich bei meinen Rechnungen Gebrauch gemacht habe.

---

[1] Publication der astron. Gesellschaft. XVI, 1881, Leipzig.

I.

Die erste Andeutung über eine Beschleunigung der Bewegung des Mondes findet sich bei Halley.[1] Dieser Astronom stellte die Vermuthung auf, die Bewegung des Mondes in der Zeit zwischen Albategnius und 1700 möge eine grössere gewesen sein, als sie aus den Beobachtungen der Babylonier bis auf Albategnius resultire. Dunthorne[2] schloss aus den Finsternissen des Tycho in der Progymnasmata, denen des Walther und Regiomontan, des Theon, den in Cairo 977 und 978 n. Chr. bemerkten und aus mehreren des Almagest auf eine bestimmte Acceleration der Mondbewegung, worin er mit Tobias Mayer[3] übereinstimmt, der die Beobachtungen Hipparchs, Ptolemäus und der Babylonier mit seinen eigenen Tafeln untersuchte und zum selben Schlusse kam. Lalande[4] bezweifelte die Richtigkeit der Zeitangabe im Almagest und gebrauchte nur die erste Finsterniss von — 720, zog aber die beiden 977 und 978 in Cairo gesehenen Finsternisse des Ebn-Jounis zu Rathe und fand daraus die hundertjährige Beschleunigung der mittleren Bewegung des Mondes = 9'886.

Bürg fand bei der Construction seiner Mondtafeln bei Vergleichung von zweihundert Beobachtungen Flamsteeds mit der Epoche von 1779 eine Verminderung der Mayer'schen Säcularbewegung um 27'6 nothwendig, und mit älteren Greenwicher Beobachtungen erhöht sich diese Correction auf —66". Bürg benützte zur Wegschaffung dieser Grösse in seinen Mondtafeln die von Laplace bei wiederholter Revision der Mondtheorie gefundene Gleichung langer Periode, deren Argument = (apog. ☽ + 2☊—3 apog. ☉) ist, und bestimmte den Coëfficienten dieser Gleichung, da Laplace dessen Herleitung aus der Theorie für fast unmöglich hielt, aus den Correctionen der Epochen für 1691, 1756 und 1801 mit ungefähr 15". Später haben Poisson

---

[1] Emendationes ac notae in vetustas Albatenii observationes astronomicas cum restitutione tabularum lunisolarum. 1693 [Ph. Tr.].

[2] Phil. Tr. Vol. 46.

[3] Commentarii Societatis regiae Gottingensis. T. II. 1752.

[4] Mém. de l'accad. 1757. — Recherche de l'accél. de la Lune par les éclipses de Ibn Younis 977 et 978. (Lalande Astronomie 2. Ausg., III. Bd.)

und Delaunay[1] nachgewiesen, dass die Laplace'sche Gleichung nicht existirt, so lange man sich in der Theorie auf die erste Potenz der störenden Kraft beschränkt. Die Gleichungen, welche das bezeichnete Argument enthalten, repräsentiren Quantitäten der zweiten und dritten Ordnung.

Die hundertjährige Bewegung des Knotensupplementes ist in Bürg's Tafeln $5 \times 360° + 134° 11' 42''$. Bald nach dem Erscheinen dieser Tafeln war Bouvard bemüht, die Bestimmung der Länge des Knotens zu verbessern. Derselbe fand[2] aus der Berechnung der meisten älteren Finsternisse eine Vergrösserung der Säcularbewegung des Bürg'schen Mondknoten von 2' 21'' und eine Verbesserung der Epoche der Knotenlänge für 1801 von —53''. Ideler[3] schloss aus den ersten sieben Finsternissen des Almagest auf die nothwendige Verminderung der Bürg'schen hundertjährigen Bewegung des Knotensupplementes von einigen Minuten. Wurm[4] suchte dieselbe Verbesserung aus zehn Mondfinsternissen des Almagest und findet —3'18''2, aus acht historischen Sonnenfinsternissen, welche durch die Grösse der Verfinsterung auffallend gewesen sind, und zwar denen von —189 März 14, —187 Juli 17, + 1133 August 2, + 1239 Juni 3, (Mirabeau), + 1241 October 6, (Erfurt), + 1560 August 21, (Coimbra), + 1567 April 9 und + 1605 October 12 aber — 3'16''4. Laplace[5] dagegen findet die nothwendige Verminderung nur 2'50'', und Oltmanns[6] erhält aus den Beobachtungen der Finsterniss von + 1239 zu Lesina und Mirabeau, und jener zu Erfurt von + 1241 die Verbesserung des Bürg'schen Werthes = —1'17''1, was nahe mit der Annahme Burkhardt's in dessen Mondtafeln übereinkommt, nämlich $\Omega☽ = 5 \times 360° +$ $+ 134°10'12''$. Oltmanns[7] findet überdies später die erhaltene

---

[1] C. R. T. XLVIII. 1858.

[2] Mon. Corr. XXIII. p. 485.

[3] Über die Sternkunde der Chaldäer. (Abh. d. Berl. Akad. 1814/5.)

[4] Versuch, die Säcularbewegung des Mondknotens durch alte Mond- und Sonnenfinsternisse näher zu bestimmen. (Zeitschr. f. Astr. Lindenau-Bohnenberger, III, p. 29 u. f.)

[5] Conn. d. T. p. VIII.

[6] Berl. Astr. Jahrb. 1817, p. 195.

[7] Berl. Astr. Jahrb. 1824, p. 156.

Knotencorrection bestätigt, indem er mit derselben die Finsterniss des Agathokles hinreichend darstellt. Hansteen[1] dagegen macht eine weitere Verminderung der Burkhardt'schen Säcularbewegung des Mondknotens wahrscheinlich und erhält für die Finsterniss von Stiklastad diese Verminderung = 1'43'5. Zech[2] endlich hat die Damoiseau'schen Tafeln an den Finsternissen des Almagest geprüft und die hundertjährige Knotenbewegung gegen diese Tafeln um 1'7 geringer oder = $5 \times 360° + 134°8'15'$ gefunden, wogegen die säculare mittlere Bewegung um 0'5 zu vermehren sei.

Die Auffindung der für die Darstellung der Finsternisse so wichtigen Säcularacceleration der Mondbewegung in der Theorie wird gewöhnlich Laplace zugeschrieben. Welcher Antheil dabei aber auch Lagrange gebührt, ist von Plana[3] dargelegt worden. Lagrange sagt, dass, nachdem durch ihn im Jahre 1783 die Theorie über die Säcularvariation der Bewegung der Planeten begründet worden, er die theoretischen Resultate auf Jupiter und Saturn angewendet und, als er in der Bewegung dieser beiden Himmelskörper nur ganz unmerkliche Variationen gefunden, die Anwendung der Theorie auf andere Planeten für ganz unnütz gehalten habe. Laplace spricht an verschiedenen Stellen seiner Publicationen wie von einer selbständigen Entdeckung und hat Ende 1787 der Akademie die Anzeige von der Auffindung der Säcularglеichung gemacht. Plana hält dafür, dass man den Thatsachen am besten Rechnung tragen werde, wenn man die Entdeckung der vereinten Anstrengung beider berühmten Geometer zuschreibt.

Laplace hat übrigens nur den ersten Werth der Reihe bestimmt, aus welcher sich die Säcularacceleration zusammensetzt. Plana und Damoiseau folgten dem Wesen nach den Laplace'schen Entwicklungen. Adams zeigte aber, dass Laplace Methode nur ausreichend ist, den ersten Werth richtig zu erhalten, für die Bestimmung der weiteren in höhere Potenzen multiplicirten

---

[1] Astr. Nachr. Ergänzungsheft 1849, p. 41 ff.

[2] Astr. Unters. üb. d. Mondf. d. Almagest. Leipzig 1851.

[3] Recherches histor. sur la prém. explic. de l'équat. séc. (Mém. de l'acad. de sc. d. Turin, T. XVIII. 1857.)

Glieder aber wesentlich modificirt werden muss. Delaunay und Adams hielten sich auf diesem Wege, und der erstere[1] findet für die Säcularacceleration der mittleren Länge + 6"11, ein Werth, der den von Adams aus fast derselben Reihe erhaltenen, der Pariser Akademie im Jänner 1859 mitgetheilten nur um 0"41 überschreitet. Plana[2] dagegen fand unmittelbar aus den im 1. Bande seiner „Théorie du mouvement de la Lune" gegebenen Formeln anfangs 11"51, einen dem Damoiseau'schen sehr nahe kommenden Betrag, berichtigte denselben aber in einem Briefe an Lubbok vom 17. Juni 1860 auf + 7"19, oder mit Zuziehung der Glieder 6. und 7. Ordnung, auf + 5"7, das Resultat Adams.

Einen wesentlich anderen Standpunkt gegenüber dem Werthe der Säcularacceleration der mittleren Länge nahm Hansen ein. Derselbe fand mittelst einer ihm eigenthümlichen numerischen Methode einen beträchtlich grösseren Betrag dieser Function und erhöhte denselben allmälig von 11" auf 12"18, den er in seinen Mondtafeln adoptirte. In der „Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen"[3] haben die Säcularänderungen folgende Werthe:

Säcularänderung der mittleren Länge	$+12''557t^2$	$+ 0''012561t^3$
„ des Perigäums	$-38\cdot577t^2$	$- 0\cdot038590t^3$
„ des Knotens	$+ 6\cdot623t^2$	$+ 0\cdot006625t^3$

Diese Werthe gegenüber den in den Mondtafeln benützten geben bei den Finsternissen von Larissa, Stiklastad, jenen des Thales, Agathokles und Ennius eine bessere Darstellung. Nachdem Hansen schon in einer früheren Abhandlung[4] gezeigt hat, dass den genannten fünf Finsternissen durch die Adams Delaunay'sche Säcularacceleration in keiner Weise genügt werden könne, wiederholt er diesen Versuch in der obengenannten „Darlegung" mit Zuziehung der Säcularänderungen des Perigäums und Knotens und kommt zu dem Schlusse, dass eine befriedigende

[1] Calcul de l'accél. séc. du moy. mouv. d. l. Lune. (C. R. XLVIII. April 1859.)

[2] Mém. sur l'équ. séc. du moy. mouv. de l. L. (Mém. de l'acad. de sc. d. Turin, T. XVIII, 1856.)

[3] Abh. d. k. sächs. G. d. W. XI, Leipzig, 1864.

[4] Quelques remarques sur la var. sécul. (C. R. L. p. 455.)

Darstellung nur durch stärkere Änderungen in diesen drei Elementen möglich sei, als den neueren Beobachtungen zugemuthet werden dürfen; die Übereinstimmung könne aber auch durch die Annahme einer ungleichförmigen Rotation der Erde hervorgebracht werden, indem man voraussetze, jeder Tag sei um den 51. billionsten Theil länger als der ihm vorhergehende.

Airy, der in unermüdlicher Weise die grossen Beobachtungsreihen der Greenwicher Sternwarte mit Damoiseau's Tafeln verglich und zu wiederholten Malen die Correctionen dieser Tafeln angab, untersuchte die Finsternisse des Agathokles, Thales und Xerxes[1] zuerst nach den Damoiseau'schen, später nebst einigen anderen Finsternissen nach den Hansen'schen Tafeln.[2] Er findet mittelst der letzteren für die Finsternisse des Agathokles, Thales und jene von Larissa eine befriedigende Darstellung, besonders, wenn man sowohl in der Säc. Acc. wie in dem Arg. d. Br. noch eine weitere Vergrösserung eintreten lasse. Um die Finsternisse von Stiklastad und Larissa central zu machen, wäre eine Erhöhung der Hansen'schen Säcularacceleration um 0"809, also auf 12"99 und eine Vermehrung des Arguments der Breite um $49'' \frac{j}{100}$ (von 1800) nothwendig.

Die beträchtliche Differenz von mehr als 6" des beobachteten Werthes der Säcularacceleration gegen den theoretischen Betrag veranlasste schon Ferrel[3] zu Erklärungsversuchen. Er findet aus der durch den Mond verursachten Fluthzeit und Fluthhöhe, wenn eine Verlangsamung der Erdrotation vorhanden sei, dass auf eine säculare Mondacceleration von 84" im Säculum geschlossen werden müsste, und da eine solche nicht beobachtet ist, sei anzunehmen, dass dieser durch Sonne und Mond hervorgebrachte Effect wieder durch die Zusammenziehung der Erde infolge Wärmeverlustes der letzteren nahe aufgewogen werde. Delaunay[4]

[1] Ph. Tr. 1853.

[2] On the Eclipse of Agathocles... (Mém. Roy. Soc. XXVI.)

[3] Gould Ast. Journ. III, 1853, und: The influence of the Tides in causing an apparent sec. accel. of the Moons mean motion. (Proc. of the Am. Ac. VI.)

[4] Sur l'existence d'une cause nouvelle... (C. R. LXI.)

suchte ähnliche Erklärungen aus Betrachtungen über Ebbe und Fluth.

Auch Newcomb[1] hat am Schlusse seiner Arbeit über die Mondbewegung die Abweichung der beobachteten gegen die theoretische Acceleration zum Gegenstande zweier Erklärungen gemacht. Es resultiren aus den Beobachtungen der alten Finsternisse, sowie aus den arabischen, mittelalterlichen und neueren Beobachtungen folgende Correctionen gegen Hansen:

Mittlere Mondlänge $\delta\varepsilon$	$= +3''90$	Epoche 1800.
Säc. mittl. Bew. derselben δn	$= -19\cdot03$	
Hansens 'Säc. Acceler. δs	$= -\ 3\cdot36$	

Wenn man annimmt, der Unterschied von 6''18 der beobachteten gegen die theoretische Acceleration liege in einer Verlangsamung der Erdrotation und diese selbst sei als variabel anzunehmen, so erhält man für die Vorauseilung der Erde das Resultat, dass sich diese Variationen der Erdrotation gar nicht in ein Gesetz würden bringen lassen und deswegen die Bestimmung der Mondbewegung für grössere Zeitintervalle unmöglich sein würde. Verlässt man die vorbezeichnete, wenig wahrscheinliche Hypothese und bezeichnet den Unterschied von 6''18 als Resultat einer oder mehrerer Ungleichheiten langer Periode der mittleren Bewegung des Mondes, so kann den Bedingungsgleichungen der Beobachtungen durch einen Werth von der Periode 250 bis 300 Jahre genügt werden.

Hansen hat nun zwei durch die Action der Venus hervorgebrachte Glieder gefunden, deren erstes von Delaunay's theoretischer Untersuchung nicht bestätigt wurde, während beim zweiten die Epoche verschoben werden musste. Acceptirt man demnach dieses zweite Venusglied in der von Newcomb erhaltenen Bestimmung und setzt

$$A = 18\,V - 16\,E - g,$$

wo V die mittlere Länge der Venus, E die der Erde, g die mittlere Anomalie des Mondes, so sind die gedachten Correctionen von der Form

$$\delta\varepsilon + T\delta n + x \sin A + y \cos A$$

---

[1] Researches on the motion of the Moon. — Wash. 1878, Part. I.

und die Correctionen für

$$\left.\begin{aligned}\delta\varepsilon &= -\ 5''04\\ \delta n &= -10\cdot 14\end{aligned}\right\}\ \text{Epoche 1800,}$$

welche die Beobachtungen seit 1625 befriedigend darzustellen vermögen. Die arabischen Beobachtungen fordern eine Verminderung von 3", so dass die beobachtete Säcularacceleration ganz auf die theoretisch berechnete zurückgeführt erscheint. Die beste Darstellung der alten Beobachtungen erreicht man mit der Correction 8"3. Die totale von Newcomb gefundene Correction der mittleren Länge der Hansen'schen Tafeln ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$-1"14-29"17\,T-3"86\,T^2-V_2-0"09\sin A-15"49\cos A,$$

in welchem V_2 der empirische Werth der Venusaction, $A = 18V-16E-g$ und T die Zahl der Jahrhunderte seit 1800 ist. Die Verbesserung der Hansen'schen Bewegung des Mondknotens findet Newcomb $+10"$.

Puiseux[1] zeigte, dass eine der Verminderung der Erdbahnexcentricität ähnliche Wirkung durch eine Änderung der Ekliptik hervorgerufen und hiedurch in der mittleren Länge ein Glied von der Form

$$(c + 0"00328\,t)\,t^2$$

bewirkt werde, dass aber die hiedurch in der Säcularacceleration hervorgerufene Veränderung so gering ist, dass in 25 Säculen seit 1850 der Coëfficient c sich erst um weniger als $^1/_{10}$ einer Secunde vermindern würde.

In neuerer Zeit hat Delaunay[2] die von ihm seinerzeit gegebene Säcularacceleration wesentlich corrigirt, indem er weitere Glieder der theoretischen Resultate in die Rechnung zog und ein verschärftes Verfahren anwandte. Er findet $+6"176$, also eine Vermehrung von $0"066$ gegen den Werth von 1859.

G. Celoria[3] findet aus seiner Untersuchung der Agathoklei'schen Finsterniss, dass dem vorstehenden Delaunay'schen Werthe am besten entsprochen werden könne, wenn man an die

[1] Sur l'accél. séc. du mouvem. d. l. L. (C. R. LXIV, p. 1287.)

[2] Calcul de quelques nouveaux termes de la série qui exprime le coëff. de l'équ. séc. d. l. L. (C. R. LXXII, p. 495.)

[3] Sopra alcuni eclissi di sole antichi .... (Reale Acc. dei Lincei 1879/80.)

Hansen'sche Bewegung des Mondknotens eine säculare von 1800 gerechnete Correction von —25" anbringt, dass aber eine positive Correction von 0 bis 20" angenommen werden müsse, wenn der Fall ausgeschlossen wird, dass Agathokles südlich von Sicilien passirt sei.

Airy[1] hat, von neuen Gesichtspunkten ausgehend, auf Grund seiner 1874 gegebenen Mondtheorie einen neuen Werth für die Säcularacceleration berechnet: + 5"50.

Weniger Verbesserung, als vielmehr Verwirrung hat das Bestreben Seyffarth's[2] zur Folge, welcher sich einer in Leipzig und Danzig beobachteten totalen Sonnenfinsterniss von 1851 bedient, um empirische Correctionen von —17" in der Perigäumslänge, —13" in der mittleren Länge herzuleiten. Selbstverständlich fördert dieses Verfahren ganz eigenthümliche Resultate zu Tage.

In den eingangs erwähnten Tafeln des Herrn Prof. v. Oppolzer sind, abgesehen von der neuen Analyse derselben, die Säcularvariation der mittleren Anomalie, der Abstand des Perigäums vom Knoten und der Knoten selbst den Angaben der Hansen'schen „Darlegung" gemäss corrigirt, ausserdem an die Knotenlänge entsprechend den Resultaten Hansen's und Newcomb's, die Correction $\Delta\Omega = -5''5 + 11''0\frac{j}{100}$ angebracht. Die Tafeln enthalten aber auch Verbesserungen, die sich auf alle Finsternisselemente erstrecken und das Resultat einer empirischen Ausgleichung jener Finsternisse sind, deren Darstellung im „Anhange" des Werkes gegeben ist. Diese empirischen Correctionen sind:

$$\Delta T = + 0{\cdot}0006\, s + 0{\cdot}0009\, s^2 + 0{\cdot}000\ 00009\, s^3$$
$$\Delta(g+\omega) = - 0°019\ s - 0°0004\, s^2 - 0°000\ 0004\ s^3$$
$$\Delta g = + 0°003\ s^2 + 0°000\ 003\ s^3,$$

wo $s = \frac{j}{100}$ die seit 1800·0 verflossenen julianischen Jahrhunderte bedeutet. Während die mit s und s^2 multiplicirten Glieder rein empirischer Natur sind, repräsentiren die von s^3 abhängigen den tausendsten Theil der in s^2 multiplicirten, was sich aus der Art

[1] Month. Not. XL, p. 368 und 578.

[2] Correct. of the present theory of the Moon's motion. (Transact. of Acad. d. Sc. of St. Louis 1878.)

erklärt, wie bei Hansen die Glieder dritter Ordnung berechnet sind. Die Vergleichung der von Hartwig[1] gegebenen Darstellung der Mondfinsternisse des Almagest nach Hansen's Tafeln mit jener, welche im „Anhange" der Oppolzer'schen Tafeln ausgeführt ist, zeigt sofort die Vorzüglichkeit der letzteren. Besonders sind es die Finsternisse Nr. 5, 7, 11, 12, 14, 17, 19, bei welchen eine wesentlich bessere Darstellung erreicht wird, und bei den Sonnenfinsternissen von Stiklastad, Constantinopel (+418), Mirabeau (1239), jenen des Agathokles und Thales erreichen die Oppolzer'schen Tafeln eine gute, zum Theil aber die beste Darstellung, die bis jetzt gefunden worden ist.

Es ist demnach zu erwarten, dass die Oppolzer'schen Correctionen, wenn sie auch derzeit noch Verbesserungen bedürfen sollten, jedenfalls den Weg ebnen, auf welchem man zu einer endlichen sicheren Verbesserung der Elemente der Mondbewegung wird vorschreiten können. Dieser Umstand bewog mich, von diesen der Wahrheit nahe kommenden Correctionen in der folgenden Abhandlung durchgängig Gebrauch zu machen.

II.

Die systematische Untersuchung des Zeitraumes zwischen 26 bis 103 n. Chr. geschah desshalb, um eine vollkommene Übersicht aller in dieser Zeit möglichen Sonnenfinsternisse zu erhalten und um die Entscheidung über die Identität der historischen Phänomene dieser Art mit den von der Rechnung gefundenen Ergebnissen unzweifelhaft treffen zu können. Mondesfinsternisse sind in den folgenden Resultaten nur einige enthalten, welche auf die später zu erwähnende Finsterniss des Plinius Bezug haben.

Ich gebe zuerst eine Übersicht über die Elemente der sämmtlichen Finsternisse. Die Bedeutung der Buchstaben der einzelnen Columnen ist dieselbe wie in den Oppolzer'schen Tafeln und ich erlaube mir in dieser Beziehung auf die letzteren zu verweisen. Bei den partiellen und unmöglichen Finsternissen sind nur jene Grössen angesetzt, welche zur Entscheidung über das Nichteintreten oder die Partialität nöthig sind. Eine Ausnahme davon machen einige partielle Finsternisse, die in historischer Beziehung in Betracht kommen.

[1] Astr. Nachr. LII, Nr. 1241.

Nr.	Conjunction m. Gr. Zt.			L'	Z	ε	P	Q
1	26 n. Chr.	Febr.	5·8190	315°831	4°46	23°693	172°976	175°413
2	26 „	Juli	31·9197	125·878	0·94	23·694	352·125	349 886
3	27 „	Jän.	26·0616	304·794	4·27	23·694	180·822	182·368
4	27 „	Juli	21·5708	115·657	1·14	23·693	0·716	0·081
5	28 „	Jän.	15.0576	293·454	4·01	23·694	188·107	187·778
6	28 „	Juni	10·9483	—	—	—	339·721	—
7	28 „	Juli	10·2853	105·550	1·43	23·694	.9·316	10·805
8	28 „	Dec.	4·4191	—	—	—	163·492	—
9	29 „	Jän.	3·0966	—	—	—	194·450	—
10	29 „	Mai	31·4069	—	—	—	348·484	—
11	29 „	Juni	29·8725	—	—	—	18·028	—
12	29 „	Nov.	23·8899	240·861	2·34	23·695	171·383	169·594
13	30 „	Mai	20·5674	56·728	3·07	23·696	356·711	357·500
14	30 „	Nov.	13·5345	230·052	1·98	23·696	179·245	179·519
15	31 „	Mai	9·5981	46·037	3·44	23·696	4·689	3·537
16	31 „	Nov.	3·1585	219 245	1·63	23·697	187·151	189·262
17	32 „	März	29·3432	—	—	—	343·092	—
18	32 „	April	27·8039	—	—	—	13·011	—
19	32 „	Sept.	22·8987	—	—	—	163·566	—
20	32 „	Oct.	22·5735	—	—	—	195·070	—
21	33 „	März	18·9507	356·760	4·55	23·697	351·598	350·448
22	33 „	April	17·3061	—	—	—	21·672	—
23	33 „	Sept.	11·9204	167·276	0·64	23·696	171·075	171·007
24	34 „	März	8·6509	346·445	4·61	23·696	359·971	0·991
25	34 „	Aug.	31·9691	156·225	0·61	23·696	178·726	176·874
26	35 „	Febr.	26·2483	335·961	4·62	23·696	8·331	10·688
27	35 „	Aug.	21·2978	145·524	0·67	23·695	186·966	184·564
28	36 „	Jän.	16·8443	—	—	—	344·879	—
29	36 „	Febr.	15·5747	—	—	—	16·445	—
30	36 „	Juni	11·5894	—	—	—	165·472	—
31	36 „	Aug.	9·8998	—	—	—	195·454	—
32	37 „	Jän.	4·8173	283·912	3·74	23·694	352·059	351·174
33	37 „	Juli	1·2753	96·769	1·68	23·694	174·126	176·050
34	37 „	Dec.	24·9242	272·594	3·39	23·694	359·508	357·216
35	38 „	Juni	20·7923	86·533	2·03	23·693	182·850	185·224
36	38 „	Dec.	14·3317	261·547	3·03	23·693	7·375	5·235
37	39 „	Mai	11·3802	—	—	—	161·297	—
38	39 „	Juni	10·0117	—	—	—	191·227	—
39	39 „	Nov.	4·4914	—	—	—	343·343	—
40	39 „	Dec.	3·9505	—	—	—	15·231	—
41	40 „	April	29·4310	37·114	3·70	23·692	169·318	167·710
42	40 „	Mai	29·0455	—	—	—	199·212	—
43	40 „	Oct.	24·0754	209·848	1·35	23·691	351·301	353·670
44	41 „	April	18·7189	26·606	3·99	23·690	177·735	175·282
45	41 „	Oct.	13·4098	198·821	1·08	23·690	359·191	1·215
46	42 „	April	8·2889	16·327	4·23	23·690	186·359	184·788
47	42 „	Oct.	2·4622	187·570	0·86	23·690	6·635	7·016
48	43 „	Febr.	27·6253	—	—	—	164·297	—
49	43 „	März	28·9943	—	—	—	194·850	—
50	43 „	Aug.	22·8169	—	—	—	343·184	—
51	43 „	Sept.	21·4644	—	—	—	14·107	—

log p	log ΔL	log q	u'_a	log f_a	B	Art der Phase
0·7164	9·7348	8·7336	0·5533	7·6731	+ 0·6363	ringf.
0·7067	9·7466	8·7432	0·5424	7·6658	— 0·6967	total
0·7375	9·7089	8·7127	0·5690	7·6746	— 0·0784	ringf.
0·6912	9·7633	8·7590	0·5324	7·6646	+ 0·0614	total
0·7443	9·7000	8·7063	0·5749	7·6757	— 0·7827	ringf.
0·7042	—	—	0·5387	—	— 1·7540	unmöglich
0·6951	9·7593	8·7546	0·5343	7·6638	+ 0·8022	total
0·7201	—	—	0·5589	—	+ 1·4914	partiell
0·7320	—	—	0·5664	—	— 1·3462	„
0·7273	—	—	0·5536	—	— 1·0700	„
0·7157	—	—	0·5463	—	+ 1·6074	unmöglich
0·6973	9·7546	8·7523	0·5442	7·6776	+ 0·7462	total
0·7432	9·7038	8·7068	0·5649	7·6626	— 0·3176	ringf.
0·6888	9·7634	8·7610	0·5390	7·6773	+ 0·0644	total
0·7414	9·7059	8·7085	0·5638	7·6630	+ 0·4507	ringf.
0·7015	9·7501	8·7476	0·5464	7·6766	— 0·6261	total
0·7108	—	—	0·5455	—	— 1·4940	partiell
0·7230	—	—	0·5516	—	+ 1·1900	„
0·7359	—	—	0·5666	—	+ 1·5400	„
0·7251	—	—	0·5612	—	— 1·3807	„
0·6921	9·7616	8·7572	0·5351	7·6678	— 0·7191	total
0·7002	—	—	0·5379	—	+ 1·8520	unmöglich
0·7444	9·7004	8·7055	0·5718	7·6710	+ 0·8612	ringf.
0·6920	9·7613	8·7576	0·5361	7·6692	— 0·0025	total
0·7339	9·7140	8·7155	0·5633	7·6698	+ 0·1205	ringf.
0·7106	9·7413	8·7386	0·5481	7·6706	+ 0·7440	ringf.-tot.
0·7115	9·7407	8·7380	0·5471	7·6682	— 0·6241	total
0·7412	—	—	0·5725	—	— 1·4374	partiell
0·7334	—	—	0·5646	—	+ 1·5320	„
0·6900	—	—	0·5313	—	+ 1·2286	„
0·6928	—	—	0·5348	—	— 1·3134	„
0·7425	9·7021	8·7078	0·5741	7·6763	+ 0·7637	ringf.
0·6998	9·7542	8·7497	0·5367	7·6632	— 0·5128	total
0·7256	9·7229	8·7239	0·5623	7·6770	— 0·0456	ringf.
0·7226	9·7292	8·7272	0·5505	7·6627	— 0·2625	ringf.-tot.
0·7021	9·7497	8·7476	0·5472	7·6774	+ 0·6464	total
0·7449	—	—	0·5662	—	+ 1·7824	unmöglich
0·7412	—	—	0·5632	—	— 1·0728	partiell
0·6909	—	—	0·5397	—	— 1·4067	„
0·6892	—	—	0·5393	—	+ 1·2843	„
0·7379	9·7107	8·7124	0·5615	7·6635	+ 1·0138	„
0·7438	—	—	0·5649	—	— 1·8243	unmöglich
0·7084	9·7433	8·7415	0·5499	7·6758	— 0·7727	ringf.-tot.
0·7166	9·7358	8·7332	0·5477	7·6644	+ 0·2058	„
0·7319	9·7160	8·7183	0·5650	7·6748	— 0·0762	ringf.
0·6956	9·7585	8·7544	0·5355	7·6655	— 0·5494	total
0·7445	9·7003	8·7064	0·5733	7·6735	+ 0·6415	ringf.
0·6962	—	—	0·5389	—	+ 1·3447	partiell
0·6908	—	—	0·5333	—	— 1·2575	„
0·7286	—	—	0·5584	—	— 1·5483	„
0·7381	—	—	0·5678	—	+ 1·3335	„

Nr.	Conjunction m. Gr Zt	L'	Z	ε	P	Q
52	44 n. Chr. Febr. 17·1551	326°767	4°58	23°691	172°670	175°100
53	44 „ März 17·6610	—	—	—	203·325	—
54	44 „ Aug. 11·2382	136·507	0·77	23·691	351·481	349·300
55	45 „ Febr. 5·3860	315·783	4·45	23·691	180·561	182·018
56	45 „ Juli 31·8935	126·240	0·93	23·691	0·003	359·517
57	46 „ Jän. 25·3810	304·503	4·26	23·691	187·902	187·457
58	46 „ Juni 22·2514	—	—	—	338·889	—
59	46 „ Juli 21·6010	116·077	1·16	23·692	8·545	10·152
60	46 „ Dec. 15·7755	—	—	—	163·455	—
61	47 „ Jän. 14·4372	—	—	—	194·313	—
62	47 „ Juni 11·6895	—	—	—	347·543	—
63	47 „ Juli 11·1666	—	—	—	17·208	—
64	47 „ Dec. 5·2597	252·088	2·71	23·692	171·372	169·659
65	48 „ Mai 30·8337	67·115	2·71	23·692	355·786	356·464
66	48 „ Nov. 23·9063	241·271	2·35	23·692	179·217	179·597
67	49 „ Mai 19·8690	56·451	3·09	23·693	3·788	2·538
68	49 „ Nov. 13·5220	230·431	1·97	23·693	187·100	189·262
69	50 „ April 9·6548	—	—	—	342·405	—
70	50 „ Mai 9·0959	—	—	—	12·177	—
71	50 „ Oct. 4·2216	—	—	—	163·264	—
72	50 „ Nov. 2·9211	—	—	—	194·990	—
73	51 „ März 30·2789	7·431	4·40	23·694	350·979	349·950
74	51 „ April 28·6177	—	—	—	20·881	—
75	51 „ Sept. 23·2294	178·155	0·73	23·694	170·678	170·498
76	52 „ März 18·9846	357·185	4·55	23·694	359·425	0·569
77	52 „ Sept. 11·2825	167·039	0·63	23·694	178·268	176·347
78	53 „ März 8·5768	346·763	4·61	23·694	7·868	10·249
79	53 „ Aug. 31·6228	156·277	0·61	23·694	186·454	184·076
80	54 „ Jän. 27·1726	—	—	—	344·664	—
81	54 „ Febr. 25·8933	—	—	—	16·062	—
82	54 „ Juli 22·8955	—	—	—	164·696	—
83	54 „ Aug. 21·2299	—	—	—	194·858	—
84	55 „ Jän. 16·1470	295·014	4·02	23·693	351·908	350·920
85	55 „ Juli 12·5844	107·255	1·38	23·693	173·317	175·329
86	56 „ Jän. 5·2718	283·750	3·73	23·692	359·436	357·104
87	56 „ Juli 1·0817	96·970	1·70	23·691	182·000	184·343
88	56 „ Dec. 24·6968	272·753	3·39	23·691	7·351	5·261
89	57 „ Mai 21·6432	—	—	—	160·429	—
90	57 „ Juni 20·2815	86·433	2·03	23·690	190·319	191·395
91	57 „ Nov. 14·8608	—	—	—	343·296	—
92	57 „ Dec. 14·3230	—	—	—	15·223	—
93	58 „ Mai 10·7085	—	—	—	168·463	—
94	58 „ Juni 9·3130	—	—	—	198·314	—
95	58 „ Nov. 4.4324	220·996	1·65	23·689	351·221	353 614
96	59 „ April 30·0188	37·104	3·72	23·688	175·951	174·496
97	59 „ Oct. 24·7464	209·905	1·24	23·688	359·038	0 997
98	60 „ April 18·6072	26 887	3·98	23·688	185·629	184·176
99	60 „ Oct. 12·7825	198·581	1·06	23·688	6·390	6·655
100	61 „ März 9·9622	—	—	—	163·933	—
101	61 „ April 8·3536	—	—	—	194·203	—
102	61 „ Sept. 2·1844	—	—	—	343·294	—

log p	log ΔL	log q	u'_a	log f_a	B	Art der Phase
0·7178	9·7333	8·7323	0·5534	7·6718	+ 0·6662	ringf.
0·7057	—	—	0·5435	—	— 2·0105	unmöglich
0·7052	9·7481	8·7448	0·5422	7·6671	— 0·7513	total
0·7385	9·7079	8·7118	0·5689	7·6731	— 0·0536	ringf.
0·6906	9·7638	8·7595	0·5328	7·6658	+ 0·0003	total
0·7441	9·7005	8·7064	0·5738	7·6744	— 0·7626	ringf.
0·7053	—	—	0·5399	—	— 1·8273	unmöglich
0·6960	9 7582	8·7538	0·5354	7·6648	+ 0·7377	total
0·7188	—	—	0·5579	—	+ 1·4903	partiell
0·7308	—	—	0·5650	—	— 1·3300	„
0 7288	—	—	0·5545	—	— 1·1550	„
0·7171	—	—	0·5476	—	+ 1·5423	„
0·6964	9·7557	8·7533	0·5438	7·6776	+ 0 7456	total
0·7436	9·7031	8·7063	0·5651	7·6624	— 0·4072	ringf.
0·6890	9·7633	8·7609	0·5393	7·6775	+ 0·0668	total
0·7406	9·7069	8·7092	0·5630	7·6626	+ 0·3636	ringf.
0·7027	9·7489	8·7468	0·5475	7·6772	— 0·6233	ringf.-tot.
0·7093	—	—	0·5429	—	— 1·5477	partiell
0·7217	—	—	0·5501	—	+ 1·1115	„
0·7367	—	—	0·5682	—	+ 1·5703	„
0·7263	—	—	0·5626	—	— 1·3773	„
0·6916	9·7623	8·7577	0·5340	7·6665	— 0·7702	total
0·6990	—	—	0·5365	—	+ 1·7820	unmöglich
0·7443	9·7004	8·7057	0·5728	7·6725	+ 0·8990	ringf.
0·6928	9·7610	8·7568	0·5355	7·6678	— 0·0495	total
0·7327	9·7150	8 7167	0·5634	7·6710	+ 0·1633	ringf.
0·7120	9·7397	8·7372	0·5482	7·6692	+ 0·7053	ringf.-tot.
0·7099	9·7421	8·7394	0·5470	7·6697	— 0·5764	total
0·7419	—	—	0·5721	—	— 1·4597	partiell
0·7345	—	—	0·5643	—	+ 1·5013	„
0·6898	—	—	0·5318	—	+ 1·2920	„
0·6921	—	—	0·5353	—	— 1·2620	„
0·7418	9·7030	8·7082	0·5731	7·6753	— 0·7768	ringf.
0·7010	9·7529	8·7484	0·5377	7·6639	+ 0·5846	total
0·7244	9·7244	8·7249	0·5611	7·6763	— 0·0522	ringf.
0·7240	9·7275	8·7257	0·5517	7·6632	— 0·1848	ringf.-tot.
0·7009	9·7509	8·7486	0·5461	7·6770	+ 0·6427	total
0·7450	—	—	0·5660	—	+ 1·8620	unmöglich
0·7418	9·7055	8·7084	0·5638	7·6627	— 0·9885	ringf.
0·6912	—	—	0·5404	—	— 1·4117	partiell
0·6890	—	—	0·5394	—	+ 1·2830	„
0·7369	—	—	0·5603	—	+ 1·0915	„
0·7432	—	—	0·5646	—	— 1·7395	unmöglich
0·7096	9·7418	8·7402	0 5512	7·6767	— 0·7820	ringf.-tot.
0·7151	9·7375	8·7347	0·5462	7·6635	+ 0·3664	total
0·7327	9·7146	8·7173	0·5665	7·6759	— 0·0907	ringf.
0·6947	9·7596	8·7552	0·5342	7·6642	— 0·4857	total
0·7445	9·7000	8 7063	0·5745	7·6749	+ 0·6622	ringf.
0·6973	—	—	0·5388	—	+ 1·3785	partiell
0·6923	—	—	0·5335	—	— 1·2080	„
0·7274	—	—	0·5550	—	— 1·5347	„

Nr.	Conjunction m. Gr. Zt.	L'	Z	ε	P	Q
103	61 n. Chr. Oct. 1·7853	—	—	—	13°721	—
104	62 „ Febr. 27·4840	337°627	4°63	23°688	172·283	174·701
105	62 „ März 28·9626	—	—	—	202·721	—
106	62 „ Aug. 22·5630	147·206	0·66	23·687	350·912	348·789
107	63 „ Febr. 16·7036	326·704	4·56	23·687	180·222	181·580
108	63 „ Aug. 12·2212	136·880	0·77	23·688	359·352	359·009
109	64 „ Febr. 5·6995	315·487	4·45	23·688	187·626	187·073
110	64 „ Juli 31·9199	126·657	0·94	23·688	7·833	9·548
111	64 „ Dec. 26·1304	—	—	—	163·444	—
112	65 „ Jän. 24·7730	—	—	—	195·145	—
113	65 „ Juni 21·9715	—	—	—	346·664	—
114	65 „ Juli 21·4662	—	—	—	16·435	—
115	65 „ Dec. 15·6295	263·312	3·08	23·690	171·361	169·728
116	66 „ Juni 11·0994	77·509	2·36	23·690	354·862	355·425
117	66 „ Dec. 5·2793	252·500	2·72	23·690	179·202	179·693
118	67 „ Mai 31·1389	66·847	2·73	23·691	2·874	1·525
119	67 „ Nov. 24·8870	241·644	2·34	23·691	187·082	189·286
120	68 „ April 19·9631	—	—	—	341·660	—
121	68 „ Mai 19·3866	—	—	—	11·315	—
122	68 „ Oct. 14·5489	—	—	—	163·036	—
123	68 „ Nov. 13·2686	—	—	—	194·927	—
124	69 „ April 9·6026	18·040	4·21	23·692	350·291	349·398
125	69 „ Mai 8·9276	—	—	—	20·079	—
126	69 „ Oct. 3·5412	189·105	0·87	23·692	170·360	170·068
127	70 „ März 30·2984	7·844	4·41	23·691	358·807	0·076
128	70 „ Sept. 22·6028	177·924	0·72	23·691	177·893	175·902
129	71 „ März 19·8984	357·491	4·54	23·691	7·327	9·724
130	71 „ Sept. 11·9551	167·108	0·63	23·691	186·019	183·688
131	72 „ Febr. 7·4919	—	—	—	344·380	—
132	72 „ März 8·2005	—	—	—	15·552	—
133	72 „ Aug. 2·2189	—	—	—	163·983	—
134	72 „ „ 31·5668	—	—	—	194·348	—
135	73 „ Jän. 26·4724	306·058	4·27	23·690	351·698	350·605
136	73 „ Febr. 25·2364	—	—	—	23·186	—
137	73 „ Juli 22·8964	117·785	1·12	23·690	172·553	174·648
138	74 „ Jän. 15·6160	294·867	4·01	23·690	359·318	356·949
139	74 „ Juli 12·3722	107·442	1·38	23·689	181·180	183·484
140	75 „ Jän. 5·0605	283·929	3·72	23·689	7·294	5·262
141	75 „ Juni 1·9118	—	—	—	159·506	—
142	75 „ Juli 1·5517	96·853	1·70	23·689	189·433	190·400
143	75 „ Nov. 26·2326	—	—	—	343·285	—
144	75 „ Dec. 25·6951	273·141	3·39	23·688	15·196	15·093
145	76 „ Mai 20·9843	—	—	—	167·581	—
146	76 „ Juni 19·5804	—	—	—	197·387	—
147	76 „ Nov. 14·7919	232·186	2·01	23·687	351·183	353·592
148	77 „ Mai 10·3170	47·566	3·39	23·687	176·128	173·690
149	77 „ Nov. 4·0866	221·040	1·66	23·686	358·937	0·824
150	78 „ April 29·9217	37·399	3·72	23·685	184·847	183·514
151	78 „ Oct. 24·0869	209·393	1·08	23·685	5·931	5·086
152	79 „ März 21·2926	—	—	—	163·394	—
153	79 „ April 19·6399	—	—	—	193·447	—

log p	log ΔL	log q	u'_a	log f_a	B	Art der Phase
0·7372	—	—	0·5680	—	+ 1·2950	partiell
0·7193	9·7319	8·7308	0·5534	7·6705	+ 0·7035	ringf.
0·7073	—	—	0·5432	—	— 1·9690	unmöglich
0·7038	9·7493	8·7463	0·5423	7·6684	— 0·7986	total
0·7396	9·7070	8·7108	0·5685	7·6718	— 0·0213	ringf.
0·6902	9·7640	8·7599	0·5334	7·6671	— 0·0529	total
0·7440	9·7009	8·7065	0·5729	7·6732	— 0·7360	ringf.
0·6968	9·7570	8·7527	0·5365	7·6658	+ 0·6780	total
0·7177	—	—	0·5567	—	+ 1·4873	partiell
0·7300	—	—	0·5554	—	— 1·4030	„
0·7303	—	—	0·5557	—	— 1·2393	„
0·7186	—	—	0·5493	—	+ 174800	„
0·6955	9·7566	8·7542	0·5430	7·6774	+ 0··448	total
0·7441	9·7027	8·7061	0·5653	7·6625	— 0·4968	ringf.
0·6892	9·7631	8·7607	0·5395	7·6776	+ 0·0681	total
0·7399	9·7080	8·7100	0·5623	7·6624	+ 0·2755	ringf.
0·7037	9·7476	8·7455	0·5483	7·6775	— 0·6231	ringf.-tot.
0·7080	—	—	0·5426	—	— 1·6063	unmöglich
0·7201	—	—	0·5489	—	+ 1·0300	partiell
0·7377	—	—	0·5695	—	+ 1·5947	unmöglich
0·7274	—	—	0·5639	—	— 1·3750	partiell
0·6912	9·7629	8·7582	0·5332	7·6653	— 0·8283	total
0·6979	—	—	0·5355	—	+ 1·7123	unmöglich
0·7440	9·7004	8·7059	0·5735	7·6737	+ 0·9288	ringf.
0·6937	9·7601	8·7559	0·5352	7·6665	— 0·1028	total
0·7315	9·7157	8·7179	0·5635	7·6725	+ 0·1981	ringf.
0·7135	9·7383	8·7357	0·5483	7·6678	+ 0·6593	ringf.-tot.
0·7084	9·7435	8·7409	0·5471	7·6710	— 0·5357	total
0·7423	—	—	0·5719	—	— 1·4873	partiell
0·7356	—	—	0·5642	—	+ 1·4583	„
0·6899	—	—	0·5326	—	+ 1·3508	„
0·6913	—	—	0·5357	—	— 1·2173	„
0·7413	9·7039	8·7086	0·5719	7·6743	— 0·7958	ringf.
0·7446	—	—	0·5685	—	+ 2·1868	unmöglich
0·7021	9·7515	8·7472	0·5391	7·6648	+ 0·6527	total
0·7233	9·7259	8·7261	0·5597	7·6754	— 0·0630	ringf.
0·7253	9·7258	8·7243	0·5532	7·6639	— 0·1094	„
0·6999	9·7520	8·7497	0·5451	7·6763	+ 0·6360	total
0·7449	—	—	0·5659	—	+ 1·9460	unmöglich
0·7425	9·7047	8·7077	0·5647	7·6631	— 0·9060	ringf.
0·6918	—	—	0·5408	—	— 1·4145	partiell
0·6889	9·7638	8·7613	0·5388	7·6770	+ 1·2807	„
0·7356	—	—	0·5594	—	+ 1·1698	„
0·7426	—	—	0·5643	—	— 1·6520	unmöglich
0·7106	9·7403	8·7391	0·5524	7·6772	— 0·7872	ringf.
0·7137	9·7393	8·7360	0·5448	7·6630	+ 0·3493	total
0·7338	9·7133	8·7162	0·5678	7·6766	— 0·1005	ringf.
0·6941	9·7605	8·7560	0·5334	7·6636	— 0·4177	total
0·7453	9·7009	8·7055	0·5683	7·6650	+ 0·5749	ringf.
0·6987	—	—	0·5388	—	+ 1·4280	partiell
0·6918	—	—	0·5327	—	— 1·1438	„

Nr.	Conjunction m. Gr. Zt.	L'	Z	ε	P	Q
154	79 n. Chr. Sept. 13·4502	—	—	—	342°155	—
155	79 „ Oct. 13·1139	—	—	—	13·493	—
156	80 „ März 9·8058	348°417	4°63	23°685	171·811	174°214
157	80 „ April 8·2775	—	—	—	202·055	—
158	80 „ Sept. 1·8937	157·977	0·62	23·685	350·414	348·357
159	81 „ Febr. 27·0150	337·553	4·62	23·685	179·806	181·070
160	81 „ Aug. 22·5531	147·589	0·66	23·685	358·774	358·567
161	82 „ Febr. 16·0124	326·409	4·56	23·686	187·282	186·620
162	82 „ Aug. 12·2420	137·293	0·77	23·686	7·187	5·000
163	83 „ Jän. 6·4837	—	—	—	163·377	—
164	83 „ Febr. 5·1050	—	—	—	194·905	—
165	83 „ Juli 3·2543	—	—	—	345·806	—
166	83 „ Aug. 1·7684	126·897	0·94	23·687	15·720	18·147
167	83 „ Dec. 26·9974	274·518	3·44	23·687	171·329	169·772
168	84 „ Juni 21·3660	87·908	2·01	23·688	353·956	353·399
169	84 „ Dec. 15·6514	263·725	3·09	23·688	179·182	179·777
170	85 „ Juni 10·4095	77·241	2·38	23·687	1·952	0·506
171	85 „ Dec. 5·2524	252·866	2·71	23·688	187·071	189·321
172	86 „ Mai 1·2687	—	—	—	340·866	—
173	86 „ „ 30·6772	66·795	2·74	23·688	10·436	7·996
174	86 „ Oct. 25·8804	—	—	—	162·870	—
175	86 „ Nov. 24·6177	—	—	—	194·886	—
176	87 „ April 20·9224	28·597	3·97	23·689	349·541	348·787
177	87 „ Mai 20·2356	—	—	—	19·203	—
178	87 „ Oct. 14·8659	200·123	1·11	23·689	170·110	169·713
179	88 „ April 9·6351	18·462	4·23	23·689	358·119	359·506
180	88 „ Oct. 2·9307	188·886	0·88	23·689	177·597	175·542
181	89 „ März 30·2134	8·150	4·42	23·689	6·709	9·118
182	89 „ Sept. 22·2938	178·011	0·71	23·689	185·666	183·364
183	90 „ Febr. 17·8049	—	—	—	344·016	—
184	90 „ März 19·5029	357·497	4·55	23·689	14·987	16·592
185	90 „ Aug. 13·5469	—	—	—	163·336	—
186	90 „ Sept. 11·9092	—	—	—	193·707	—
187	91 „ Febr. 6·7926	317·041	4·45	23·689	351·417	350·224
188	91 „ März 8·5355	—	—	—	22·680	—
189	91 „ Aug. 3·2115	128·365	0·91	23·687	171·849	174·014
190	92 „ Jän. 26·9581	305·932	4·25	23·687	359·143	356·741
191	92 „ Juli 22·6651	117·951	1·12	23·687	180·403	182·666
192	93 „ Jän. 15·4206	295·061	4·02	23·686	7·185	5·219
193	93 „ Juli 11·8206	107·299	1·40	23·686	188·537	189.399
194	93 „ Dec. 6·6039	—	—	—	343·277	—
195	94 „ Jän. 5·0644	—	—	—	15·134	—
196	94 „ Juni 1·2602	—	—	—	166·686	—
197	94 „ „ 30·8504	—	—	—	196·575	—
198	94 „ Nov. 26·1525	243·397	2·37	23·685	351·171	353·591
199	95 „ Mai 21·6142	58·006	3·05	23·684	175·279	172·863
200	95 „ Nov. 15·4285	232·209	2·00	23·684	358·874	0·680
201	96 „ Mai 10·2280	47·877	3·40	23·684	184·022	182·823
202	96 „ Nov. 3·4378	220·773	1·64	23·683	6·084	6·119
203	97 „ März 31·6131	—	—	—	162·772	—
204	97 „ April 29·9569	—	—	—	192·664	—

log p	log ΔL	log q	u'_a	log f_a	B	Art der Phase
0·7259	—	—	0·5584	—	— 1·6300	unmöglich
0·7363	—	—	0·5682	—	+ 1·2715	partiell
0·7208	9·7304	8·7293	0·5535	7·6691	+ 0·7488	ringf.
0·7088	—	—	0·5434	—	— 1·9205	unmöglich
0·7026	9·7506	8·7475	0·5424	7·6698	— 0·8396	total
0·7402	9·7062	8·7102	0·5682	7·6705	+ 0·0283	ringf.
0·6899	9·7642	8·7605	0·5341	7·6683	— 0·1048	total
0·7438	9·7014	8·7068	0·5718	7·6719	— 0·7026	ringf.
0·6976	9·7560	8·7519	0·5378	7·6670	+ 0·6236	total
0·7163	—	—	0·5555	—	+ 1·4887	partiell
0·7289	—	—	0·5619	—	— 1·3780	„
0·7315	—	—	0·5569	—	— 1·3210	„
0·7201	9·7317	8·7296	0·5509	7·6657	+ 1·4223	„
0·6947	9·7575	8·7551	0·5424	7·6769	+ 0·7463	total
0·7444	9·7022	8·7057	0·5657	7·6627	— 0·5845	ringf.
0·6896	9·7628	8·7604	0·5396	7·6774	+ 0·0698	total
0·7391	9·7091	8·7109	0·5618	7·6624	+ 0·1868	ringf.
0·7048	9·7463	8·7444	0·5492	7·6776	— 0·6239	ringf.-tot.
0·7068	—	—	0·5410	—	— 1·6684	unmöglich
0·7187	9·7337	8·7308	0·5479	7·6624	+ 0·9478	ringf.-tot.
0·7384	—	—	0·5709	—	+ 1·6130	unmöglich
0·7286	—	—	0·5649	—	— 1·3753	partiell
0·6908	9·7635	8·7584	0·5323	7·6643	— 0·8906	total
0·6969	—	—	0·5348	—	+ 1·6370	unmöglich
0·7437	9·7005	8·7062	0·5742	7·6749	+ 0·9520	ringf.
0·6945	9·7592	8·7549	0·5351	7·6654	— 0·1624	total
0·7304	9·7174	8·7189	0·5637	7·6737	+ 0·2254	ringf.
0·7151	9·7369	8·7343	0·5483	7·6666	+ 0·6061	ringf.-tot.
0·7070	9·7450	8·7423	0·5471	7·6724	— 0·5029	total
0·7429	—	—	0·5714	—	— 1·5233	partiell
0·7368	9·7110	8·7129	0·5641	7·6679	+ 1·4107	„
0·6898	—	—	0·5334	—	+ 1·4037	„
0·6905	—	—	0·5361	—	— 1·1620	„
0·7408	9·7048	8·7090	0·5706	7·6730	— 0·8215	ringf.
0·7444	—	—	0·5706	—	+ 2·1405	unmöglich
0·7033	9·7501	8·7460	0·5405	7·6659	+ 0·7160	total
0·7220	9·7277	8·7274	0·5581	7·6743	— 0·0789	ringf.
0·7266	9·7239	8·7230	0·5547	7·6648	— 0·0375	„
0·6988	9·7532	8·7506	0·5439	7·6754	+ 0·6251	total
0·7430	9·7037	8·7071	0·5657	7·6639	— 0·8213	ringf.
0·6924	—	—	0·5413	—	— 1·4170	partiell.
0·6890	—	—	0·5385	—	+ 1·2758	„
0·7345	—	—	0·5584	—	+ 1·2493	„
0·7419	—	—	0·5642	—	— 1·5743	unmöglich
0·7118	9·7389	8·7377	0·5535	7·6775	— 0·7905	ringf.
0·7121	9·7411	8·7377	0·5437	7·6626	+ 0·4241	total
0·7348	9·7120	8·7153	0·5689	7·6772	— 0·1067	ringf.
0·6934	9·7614	8·7566	0·5326	7·6630	— 0·3462	total
0·7446	9·6995	8·7062	0·5758	7·6765	+ 0·5887	ringf.
0·6993	—	—	0·5382	—	+ 1·4823	partiell
0·6924	—	—	0·5327	—	— 1·0798	„

Nr.	Conjunction m. Gr. Zt.	L'	Z	ε	P	Q
205	97 n. Chr. Sept. 23·7778	—	—	—	341°808	—
206	97 „ Oct. 23·4474	—	—	—	13·388	—
207	98 „ März 21·1205	359°134	4°53	23°683	171·267	173°642
208	98 „ April 19·5873	—	—	—	201·329	—
209	98 „ Sept. 13·2314	168·821	0·65	23·683	350·005	348·015
210	99 „ März 10·3175	348·326	4·62	23·682	179·319	180·464
211	99 „ Sept. 2·8913	158·368	0·62	23·682	358·274	358·203
212	100 „ Febr. 27·3187	337·257	4·62	23·682	186·859	186·085
213	100 „ Aug. 22·5693	147·996	0·66	23·682	6·610	8·515
214	101 „ Jän. 16·8338	—	—	—	163·262	—
215	101 „ Febr. 15·4315	—	—	—	194·591	—
216	101 „ Juli 13·5383	—	—	—	344·980	—
217	101 „ Aug. 12·0745	—	—	—	15·062	—
218	102 „ Jän. 6·3638	285·692	3·78	23·683	171·264	169·793
219	102 „ Febr. 4·8377	—	—	—	202·708	—
220	102 „ Juli 2·6335	98·328	1·68	23·684	353·053	353·390
221	102 „ Dec. 27·0227	274·936	3·45	23·684	179·147	179·851
222	103 „ Jun. 21·6829	87·647	2·02	23·685	1·058	359·517

Mondesfinsternisse

	Opposition:					
1	70 n. Chr. April 13·7255	—	—	—	193·561	—
2	70 „ Sept. 8·5657	—	—	—	343·171	—
3	71 „ März 4·3318	—	—	—	171·238	—
4	71 „ Aug. 28·9170	—	—	—	351·393	—
5	72 „ Febr. 21·8793	331·662	4·59	23·691	179·560	177·980
6	72 „ Aug. 16·9925	142·335	0·70	23·691	359·202	359·543
7	73 „ Feb. 10·5580	—	—	—	187·723	—
8	73 „ Aug. 6·0312	—	—	—	6·984	—
9	74 „ Jän. 31·1758	—	—	—	195·779	—
10	74 „ Juni 26·8866	—	—	—	345·561	—
11	74 „ Dec. 21·8206	269·443	3·26	23·689	171·944	173·359
12	75 „ Jun. 16·5565	82·548	2·19	23·689	354·279	353·728

Von diesen sämmtlichen Finsternissen kommen für die historischen Berichte selbstverständlich die centralen in Betracht, von den partiellen nur einige wenige. Um sogleich das Gebiet, in welches jede centrale Finsterniss fällt, übersehen zu können, habe ich aus den vorstehenden Elementen zu jeder centralen Finsterniss die geographischen Coordinaten jener drei Punkte berechnet, in welchen die Finsterniss bei Sonnenaufgang, im Mittag und bei Sonnenuntergang als eine centrale erscheint. Ein durch diese Punkte gelegter Kreisbogen gibt nämlich eine der

log p	log ΔL	log q	u'_a	log f_a	B	Art der Phase
0·7244	—	—	0·5584	—	— 1·6550	unmöglich
0·7352	—	—	0·5682	—	+ 1·2583	partiell
0·7221	9·7290	8·7279	0·5536	7·6677	+ 0·8006	ringf.
0·7103	—	—	0·5438	—	— 1·8665	unmöglich
0·7014	9·7519	8·7489	0·5424	7·6712	— 0·8728	total
0·7411	9·7055	8·7094	0·5678	7·6691	+ 0·0655	ringf.
0·6898	9·7642	8·7606	0·5348	7·6698	— 0·1475	total
0·7433	9·7022	8·7073	0·5704	7·6705	— 0·6613	ringf.
0·6989	9·7546	8·7509	0·5394	7·6683	+ 0·5754	total
0·7152	—	—	0·5538	—	+ 1·4945	partiell
0·7279	—	—	0·5601	—	— 1·3463	„
0·7328	—	—	0·5583	—	— 1·4010	„
0·7215	—	—	0·5526	—	+ 1·3683	„
0·6940	9·7585	8·7559	0·5414	7·6762	+ 0·7508	total
0·7040	—	—	0·5455	—	— 1·9525	unmöglich
0·7448	9·7018	8·7056	0·5663	7·6632	— 0·6720	ringf.
0·6902	9·7626	8·7601	0·5396	7·6769	+ 0·0730	total
0·7382	9·7102	8·7117	0·5612	7·6627	+ 0·1011	ringf.
zwischen 70—75 n. Chr.						
0·7432	—	—	0·5667	—	— 1·2970	unmöglich
0·7088	—	—	0·5470	—	— 1·4803	„
0·7156	—	—	0·5509	—	+ 0·7914	partiell
0·7320	—	—	0·5615	—	+ 0·8035	„
0·6944	9·7586	8·7547	0·5388	7·6712	+ 0·0380	total
0·7443	9·7014	8·7057	0·5693	7·6677	— 0·0773	„
0·6899	—	—	0·5369	—	— 0·6580	partiell
0·7376	—	—	0·5637	—	+ 0·6645	„
0·7055	—	—	0·5471	—	— 1·3800	unmöglich
0·7052	—	—	0·5398	—	— 1·2648	„
0·7385	9·7070	8·7114	0·5719	7·6772	+ 0·7703	partiell
0·6905	9·7643	8·7590	0·5310	7·6627	— 0·4889	total

genauen Curve der Centralität meist sehr nahe kommende Linie, aus welcher man unmittelbar das Hauptgebiet der Sichtbarkeit der betreffenden Finsterniss beurtheilen kann. Die folgende Zusammenstellung enthält die genannten drei Hauptpunke, deren geographische Längen von Greenwich aus gezählt sind, ferner die Benennung des ungefähren Gebietes der Sichtbarkeit. Jene historischen Finsternisse, welche im Folgenden zur Discussion kommen, sind mit * bezeichnet.

Nr.	Datum	m. Zt. Greenw.	Centrali- bei ⊙ Aufgang		im Mittag	
			λ	φ	λ	φ
1*	26 n. Chr. Feb. 5	19h 39m4	7°01	+ 25°47	63°82	+24°23
2	26 „ Juli 31	22 4·4	329·97	— 33·75	24·94	—25·56
3	27 „ Jän. 26	1 28·8	276·80	— 12·05	342·40	—24·96
4*	27 „ Juli 21	13 42·0	87·73	+ 8·02	155·31	+24·76
5	28 „ Jän. 15	1 22 9	245·48	— 49·85	346·53	—72·98
6	28 „ Juli 10	6 50·8	156·87	+ 48·37	259·85	+75·80
7*	29 „ Nov. 23	21 21·5	0·53	+ 58·53	41·41	+30·63
8	30 „ Mai 20	13 37·1	105·42	— 35·17	156·11	+ 0·07
9*	30 „ Nov. 13	12 49·7	108·14	+ 23·80	165·18	—14·00
10*	31 „ Mai 9	14 21·3	79·36	+ 3·80	138·76	+45·90
11	31 „ Nov. 3	3 48·2	228·17	— 13·70	293·60	—57·89
12	33 „ März 18	22 49·0	301·33	— 74·90	28·45	—56·37
13	33 „ Sep. 11	22 5·4	243·57	+ 84·50	39·19	+83·18
14	34 „ März 8	15 37·3	61·61	— 28·77	128·77	— 5·56
15	34 „ Aug. 31	23 15·5	302·80	+ 33·97	12·33	+17·09
16	35 „ Feb. 26	5 57·6	208·04	+ 20·06	265·94	+47·12
17	35 „ Aug. 21	7 8·8	189·00	— 12·52	246·73	—30·36
18	37 „ Jän. 4	19 36·9	319·72	— 53·78	70·49	—73·86
19	37 „ Juli 1	6 36·4	173·73	+ 35·48	261·23	+54·59
20	37 „ Dec. 24	22 10·8	322·51	— 8·66	28·27	—26·29
21	38 „ Juni 20	19 0·9	15·88	— 10·07	74·01	+ 8·47
22	38 „ Dec. 14	7 57·6	189·51	+ 34·45	241·29	+16·65
23	40 „ Oct. 24	1 48·6	246 63	— 34·26	321·75	—64·37
24*	41 „ Apr. 18	17 15·2	37·56	— 3·88	98·41	+22·66
25	41 „ Oct. 13	9 50·1	149·79	+ 12·33	208·52	—11·99
26	42 „ Apr. 8	6 56·0	197·22	— 49 91	262·08	—28·43
27	42 „ Oct. 2	11 5·6	130·75	+ 57·28	199·18	+39·05
28	44 „ Feb. 17	3 43·3	243 60	+ 26·33	301·81	+30·51
29	44 „ Aug. 11	5 43·0	212·11	— 34·67	268·66	—33·83
30	45 „ Feb. 5	9 15·8	160 48	— 14·16	225·82	—19·39
31*	45 „ Juli 31	21 26·6	331·85	+ 8·42	39·04	+18·93
32	46 „ Jän. 25	9 8·6	130·93	— 52·80	232·35	—69·39
33*	46 „ Juli 21	14 25·4	48·45	+ 47·81	147·83	+68·66
34	47 „ Dec. 5	6 14·0	225·50	+ 54·06	267·73	+27·20
35	48 „ Mai 30	20 0·5	10·75	— 36·09	60·17	— 3·13
36	48 „ Nov. 23	21 45·1	334·64	+ 19·96	31·62	—16·64
37*	49 „ Mai 19	20 51·4	343·00	+ 1·73	42·56	+42·12
38	49 „ Nov. 13	12 31·7	95·93	— 16·24	164·10	—59·75
39	51 „ März 30	6 41·6	200·49	— 78·70	269·79	—58·30
40	51 „ Sep. 23	5 30·3	30·93	+ 87·30	imag.	
41	52 „ März 18	23 37·8	302·68	— 32·14	8·26	— 4·37

tät bei ⊙ Untergang		Hauptgebiet der Sichtbarkeit
λ	φ	
116°76	+ 49°13	Ob. Egypten, Südarabien, n. Indien, China.
75·38	— 47·49	Atl. Ocean, Südafrika, südl. Eismeer.
41·72	+ 3·61	Südamerika, Atl. Ocean, Central-Afrika.
218·89	— 1·49	Hinter-Indien, Manilla, Südsee.
77·72	— 42·81	Südl. Eismeer.
0·02	+ 46·47	Frankreich, Irrland, Grönland, Behringsstr., Küste von Kamtschatka.
96·02	+ 28·19	Mitteleuropa, Kleinasien, Palästina, persischer Golf, Indien.
215·13	+ 0·81	Neuholland, Neu-Guinea, Südsee.
234·18	— 16·86	Südchina, Neu-Guinea, Fidschi, Südsee.
226·61	+ 46·54	Indisches Meer, Hinter-Indien, China, Korea, Kamtschatka, Gr. Ocean.
36·84	— 59·45	Gr. Ocean, Feuerland, Südarct. Continent.
90·44	— 16·46	Südl. Eismeer, atl. Meer.
102·72	+ 29·95	Nordpol, Sibirien, Ende in China.
189·93	+ 28·49	Atl. Ocean, südl. Sundainsel, Neu-Guinea, Gr. Ocean.
68·38	— 20·44	Central-Afrika, Madagaskar.
316·36	+ 72·50	Gr. Ocean, Verein. Staaten, Huds. Bay, Labrador.
298·58	— 61·05	Südsee, Gr. Ocean, Südspitze von Feuerland.
153·33	— 34·27	Südarc. Continent, südl. Neuholland.
335·78	+ 20·16	Gr. Ocean, Huds. Länder, Labrador, atl. Ocean.
88·19	+ 3·89	Atl. Ocean, Capland, südl. Madagaskar, ind. Meer.
129·67	— 17·61	Central-Afrika, ind. Meer, nördl. Neuholland.
291·85	+ 37·87	Gr. Ocean, Mexico, Florida, atl. Meer.
63·78	— 63·00	Südpolarland, Südpatagonien.
168·52	+ 27·10	Ostküste von Afrika, ind. Meer, Indien, Südchina, Gr. Ocean.
273·64	— 20·97	Austr. Inseln, Gr. Ocean.
324·03	— 15·84	Gr. Ocean, Bolivia, Brasilien.
258·97	+ 21·88	Südsp. v. Kamtschatka, Gr. Ocean, Ende in Mexico.
357·80	+ 53·97	Mexico, Atl. Ocean, Ende in England.
319·21	— 58·83	Südsee, Patagonien, südl. Eismeer.
283·86	+ 8·30	Austr. Inseln, Gr. Ocean, Ende in Panama.
100·42	— 8·39	Sudan, Ob. Egypten, Arabien, Vorder-Indien.
315·85	— 38·38	Südl. Eismeer, Südpatagonien, atl. Meer.
236·30	+ 38·54	Russland, Sibirien, Gr. Ocean.
320·78	+ 31·67	Orregon, Golf von Mexico, atl. Meer.
116·67	— 7·87	Südafrika, Zanzibar, ind. Meer, Sumatra, Küste von Borneo.
100·32	— 12·88	Senegambische Küste, Südafrika, Mozambique, ind. Ocean.
124·96	+ 37·80	Senegambien, Sahara, Kleinasien, Südsibirien, Nordchina (Peking).
267·45	— 55·08	SW. Küste von Neuholland, südl. Eismeer.
331·09	— 20·92	Südl. Eismeer, Patagonien, Laplata, atl. Ocean.
350·19	+ 34·06	
71·13	+ 26·50	Südam. Küste, atl. Ocean, Central-Afrika, Ob. Egypten, Arabien, Beludschistan.

Nr.	Datum	m. Zt. Greenw.	Centrali- bei ⊙ Aufgang		im Mittag	
			λ	φ	λ	φ
42	52 n. Chr. Sep. 11	6h 46m8	191°19	+ 38°04	259°44	+15°87
43*	53 „ März 8	13 50·6	88·11	+ 15·81	146·80	+47·89
44	53 „ Aug. 31	14 56·8	70·43	— 7·35	128·99	—31·01
45	55 „ Jän. 16	3 31·7	196·53	— 58·90	314·80	—74·98
46*	55 „ Juli 12	14 1·5	56·20	+ 43 86	151·87	+59·25
47	56 „ Jän. 5	6 31·4	196·57	— 13·45	264·58	—26·01
48	56 „ Juli 1	1 57·6	269·00	— 1·73	329·98	+12·79
49*	56 „ Dec. 24	16 43·4	56·73	+ 29·84	109·77	+16·44
50	57 „ Juni 20	6 45·4	233·26	— 62·5	258·51	—56·86
51	58 „ Nov. 4	10 22·7	113·95	— 36·84	194 04	—68·18
52*	59 „ Apl. 30	0 27·1	284·45	+ 7·52	348·48	+36·07
53	59 „ Oct. 24	17 54·8	28·16	+ 9·70	86·79	—16·92
54	60 „ Apl. 18	14 34·4	84·89	— 43·70	145·53	—19·67
55*	60 „ Oct. 12	18 46 8	20·84	+ 54·10	82·62	+32·62
56	62 „ Feb. 27	11 37·0	122·16	+ 27·67	193·24	+38·08
57	62 „ Aug. 22	13 30·7	91·30	— 36·89	149·98	—42·69
58	63 „ Feb. 16	16 53·2	46·70	— 15·20	111·09	—13·99
59	63 „ Aug. 12	5 18·5	214·01	+ 8·74	280·57	+12·86
60	64 „ Feb. 5	16 47·3	20 03	— 55·10	119·16	—64·76
61	64 „ Juli 31	22 4·7	298 49	+ 47·83	34·10	+61·90
62*	65 „ Dec. 15	15 6·5	89·79	+ 49·76	134·19	+25·03
63	66 „ Juni 11	2 23·1	275·81	— 36·90	324·22	— 7·16
64	66 „ Dec. 5	6 42·2	200·25	+ 15·74	258·25	—18·54
65*	67 „ Mai 31	3 20·0	246·97	+ 0·36	306·76	+38·21
66	67 „ Nov. 24	21 17·3	322·98	— 19·54	34·57	—61·23
67	69 „ Apl. 9	14 27·7	114·28	— 80·50	152·50	—62·18
68	69 „ Oct. 3	13 3·6	231·52	+ 82·40	imag.	
69	70 „ März 30	7 9·7	191·42	— 34·95	254·90	— 3·58
70*	70 „ Sep. 22	14 28·0	78·10	+ 40·77	143·85	+13·91
71*	71 „ März 19	21 33·7	331·21	+ 11·74	30·39	+47·76
72	71 „ Sep. 11	22 55 3	309 71	— 3·39	8·70	—32·35
73	73 „ Jän. 26	11 20·3	73 80	— 64·45	200·25	—76·47
74*	73 „ Juli 22	21 30·8	296·96	+ 52·18	41·52	+ 63·66
75	74 „ Jän. 15	14 47·0	71·93	— 18·34	141·90	—25·12
76	74 „ Juli 12	8 56·0	161·76	+ 6·39	225·80	+16·12
77	75 „ Jän. 5	1 27·1	284·13	+ 25·24	338·70	+17·32
78	75 „ Juli 1	13 14·4	116·76	— 49·27	159·64	—42·27
79	76 „ Nov. 14	19 0·3	340·51	— 39·57	66 17	—71·08
80	77 „ Mai 10	7 36·5	175·81	+ 9·06	241·35	+37·98
81	77 „ Nov. 4	2 5·0	265·53	+ 6·73	324·34	—21·17
82	78 „ Apl. 29	22 7·2	332·33	— 36 77	30·52	—11·20
83	78 „ Oct. 24	2 5·1	274·27	+ 48·73	331·25	+24·98
84*	80 „ März 9	19 20·4	2·04	+ 30·49	64·23	+46·80
85	80 „ Sep. 1	21 26·9	327·56	— 39·59	29·16	—52·04
86	81 „ Feb 27	0 21·6	295·19	— 15·06	358·07	— 7·71

t ä t bei ⊙ Untergang		Hauptgebiet der Sichtbarkeit
λ	φ	
316°64	— 19°44	Gr. Ocean, Küste von Mexico, Peru, Brasilien.
210·83	+ 72·53	Hint. Indien, chin. Süd- und Ostküste, Kamtschatka.
187·65	— 61·14	Ind. Meer, westl. Neuholland.
33·38	— 31·75	Südl. Eismeer, atl. Ocean.
225·92	+ 20·72	Sibirien, Kamtschatka, Gr. Ocean.
322·76	+ 7·99	Südsee, Peru, nördl. Brasilien.
25·33	— 17·66	Nörd. Südam., atl. Ocean, Golf von Guinea.
158·43	+ 41·75	Beludschistan, centrales Vorder- und Hinter-Indien, Manilla, Gr. Ocean.
270·53	— 65·58	Südl. Eismeer.
299·92	— 59·90	Südl. Eismeer.
65·10	+ 33·84	Nördl. Südamerika, atl. Ocean, Südspanien, Süd-Italien, Hellespont, Armenien, Caspisee.
153·05	— 19·82	Ostafrika, ind. Meer, nördl. Neuholland.
206·83	— 12·95	Neuholland, austr. Inseln.
140·77	+ 20·93	Ostpreussen, südl. Russland, Turan, Südchina.
242·44	+ 59·67	Gr. Ocean, Westküste von Nordamerika.
201·88	— 64·23	Südküste von Westaustr., Vandiemensland, südl. Eismeer.
168·69	+ 12·83	Madagaskar, südl. Sundagruppe, Neu-Guinea.
340·95	— 14·52	Gr. Ocean, Central-Amerika, Venezuela, atl. Meer.
195·82	— 33·83	Südarct. Continent, Küste von Neuseeland.
113·97	+ 31·34	Neufoundland, Schweden, Russland, Sibirien, China.
185·63	+ 35·53	China, Gr. Ocean.
18·08	— 16·97	Peru, Brasilien, atl. Ocean, Westküste v. Süd-Afrika.
325·73	— 8·59	Gr. Ocean, Brasilien.
23·59	+ 28·99	Gr. Ocean, Central-Amerika, atl. Ocean, Spanien.
136·22	— 50·62	Südl. Eismeer, atl. Ocean.
212·85	— 27·11	Südarct. Continent, südl. Eismeer.
234·48	+ 38·32	
318·98	+ 23·23	Südsee, Central-Amerika, Cuba, atl. Ocean.
202·23	— 18·03	Nördl. China, Gr. Ocean, Neu-Irrland.
107·03	+ 70·23	Senegambien, Tunis, Griechenland, Russland, Sibir.
74·60	— 60·66	Ostküste von Südamerika, südl. Eismeer.
275·20	— 30·24	Südl. Polarland, Gr. Ocean.
114·80	+ 21·72	Schweden, Russland, China.
198·75	+ 11.69	Central-Neuholland, Südsee.
280·90	— 17·89	Gr. Ocean.
26·02	+ 45·67	Antillen, atl. Ocean, Marokko, Tunis, Ende in Illirien.
188·36	— 61·28	Vandiemensland, südl. Eismeer.
172·59	— 56 02	Südarct. Polarland.
317·85	+ 29·65	Gr. Ocean, Vereinigte Staaten, atl. Meer.
31·22	— 17·62	Columbia, Brasilien, atl. Ocean, Südafrika.
91·63	— 10·68	Südafrika, ind. Meer.
28·22	+ 19·32	Canada, atl. Ocean, Senegambien, Sahara.
132·11	+ 65 40	Tunis, Kleinasien, Caspisee, Sibirien.
84·58	— 71·25	Atl. Ocean, südl. Eismeer.
56·14	+ 17·16	Brasilien, Atl. Ocean, Central-Afrika.

Nr.	Datum	m. Zt. Greenw.		Centrali- bei ⊙ Aufgang		im Mittag	
				λ	φ	λ	φ
87*	81 n. Chr. Aug. 22	13	16·5	94·52	+ 8·47	160·15	+ 6·24
88	82 „ Feb. 16	0	17·9	274·28	— 55·24	6·96	—57·68
89	82 „ Aug. 12	5	48·5	187·28	+ 48·01	278·62	+55·23
90	83 „ Dec. 26	23	56·3	314·48	+ 45·87	1·45	+24·48
91	84 „ Juni 21	8	47·0	179·77	— 37·97	227·68	—12·17
92	84 „ Dec. 15	15	38·0	65·93	+ 11·37	125·46	—19·51
93	85 „ Juni 10	9	49·7	150·58	— 0·51	210·63	+33·99
94	85 „ Dec. 5	6	3·5	190·00	— 23·33	265·51	—62·17
95	86 „ Mai 30	16	15·2	8·15	+ 49·73	imag.	
96	87 „ Apl. 20	22	8·3	31·98	— 78·85	36·40	—71·41
97	87 „ Oct. 14	20	46·9	101·94	+ 77·70	imag.	
98	88 „ Apl. 9	15	14·5	72·30	— 37·19	133·32	— 3·26
99	88 „ Oct. 2	22	20·2	322·89	+ 42·01	25·38	+11·32
100	89 „ März 30	5	7·3	217·25	+ 8·00	276 71	+46·91
101	89 „ Sep. 22	7	3·1	187·02	— 0·69	246·22	—34·24
102	91 „ Feb. 6	19	1·3	310·57	— 70·37	87·07	—79·46
103	91 „ Aug. 3	5	4·6	175·69	+ 60·34	290·01	+68·06
104	92 „ Jän. 26	22	59·7	308·26	— 23·21	19·68	—23·78
105*	92 „ Juli 22	15	57·7	53·93	+ 14·16	120·93	+18·54
106	93 „ Jän. 15	10	5·7	152·66	+ 20·70	208·80	+19·04
107	93 „ Juli 11	19	41·7	13·08	— 37·92	61·58	—34·51
108	94 „ Nov. 26	3	39·6	206·64	— 42·55	298·48	—73·27
109*	95 „ Mai 21	14	44·4	64·28	+ 16·43	134·35	+45·11
110	95 „ Nov. 15	10	17·0	142·11	+ 3·03	201·80	—24·69
111	96 „ Mai 10	5	28·3	221·40	— 29·36	278·71	— 3·20
112	96 „ Nov. 3	10	30·4	151·33	+ 46·06	204·57	+21·67
113	98 „ März 21	2	53·5	243·44	+ 34·79	309·14	+56·57
114	98 „ Sep. 13	5	33·2	200·57	— 42·43	266·01	—61·33
115	99 „ März 10	7	37·2	186·64	— 13·70	247·84	— 0·74
116	99 „ Sep. 2	21	23·5	332·61	+ 7·99	37·27	— 0·18
117	100 „ Feb. 27	7	38·9	169·59	— 56·36	256·63	—52·22
118*	100 „ Aug. 22	13	39·8	74·16	+ 48·20	160·71	+48·62
119	102 „ Jän. 6	8	43·9	179·55	+ 42·55	229·21	+25·61
120	102 „ Juli 2	15	12·2	40·77	— 39·64	130·47	—18·58
121	102 „ Dec. 27	0	32·7	291·70	+ 7·03	352·99	—19·42
122*	103 „ Juni 21	16	23·4	52·94	— 0·91	113·25	+29·47

III.

Um die Wirkung der in den vorstehenden Sonnenfinsternissen berücksichtigten Oppolzer'schen Correctionen zu zeigen, sind sämmtliche in den Bereich des Zeitraumes dieser Abhandlung fallenden historischen Sonnenfinsternisse näher untersucht und mit den Überlieferungen verglichen worden. Eine grössere Zahl

t ă t bei ⊙ Untergang λ	φ	Hauptgebiet der Sichtbarkeit
220·66	— 20·14	Malakka, Philippinen, austr. Inseln, Südsee.
77·07	— 27·97	Südl. Eismeer, südl. ind. Meer.
352 19	+ 25·08	Hudsonsbay-Länder, Labrador, atl. Ocean.
51·38	+ 39·83	Atl. Ocean, Marokko, Unt. Egypten, Mesopotamien.
279·06	— 26·29	Südsee, Gr. Ocean.
191·25	— 4·07	Ind. Ocean, Nordneuholland, Neu-Guinea, Südsee.
282·05	+ 20·15	Gr. Ocean, Vereinigte Staaten, Golf von Mexico.
4·01	— 46·16	Südsee, südl. Eismeer.
277·17	+ 68·00	
95·15	— 35·07	Südl. Polarmeer.
115·39	+ 42·71	
197·91	+ 18·79	Ind. Ocean, Sundainseln, Neu-Guinea, Südsee.
84·95	— 16·16	Marokko, Central-Afrika, indisch. Ocean.
1·42	+ 66·00	Gr. Ocean, Californien, Vereinigte Staaten, Labrador, Grönland.
319·17	— 59·40	Südsee, Südspitze von Südamerika.
159·07	— 30·03	Südpolarland, Südostküste von Neuholland.
2·31	+ 23·26	Nördl. Polarländer, Grönland, atl. Meer.
75·82	+ 14·76	Atl. Ocean, Capland, ind. Meer, südl. Indien.
175·95	— 18·13	Vorder-Indien, Hinter-Indien, Luzon, Südsee.
255·77	+ 49·45	Gr. Ocean, Neucalifornien.
96·78	— 58·88	Capland, atl. Meer, südl. Eismeer.
42·97	— 51·80	Südl. Polarland.
213·50	+ 30·27	Vorder-Indien, China, Gr. Ocean.
268·49	— 14·57	Neu-Brittanien, Neuhebriden, Südsee.
339·93	— 8·97	Südsee, Ecuador, Brasilien, atl. Meer.
260·05	+ 22·38	Gr. Ocean, Ende in Mexico.
28·52	+ 70·83	Vereinigte Staaten, Labrador, atl. Meer.
330·09	— 77·30	Gr. Ocean, südl. Polarland.
307·29	+ 21·13	Gr. Ocean, Mexico, Florida, atl. Meer.
99·03	— 24·66	Küste von Guinea, Central-Afrika, ind. Meer.
322·72	— 24·52	Südl. Polarmeer, Patagonien.
229·67	+ 19·65	Südsibirien, Sachalin, Gr. Ocean.
277·93	+ 44 56	Gr. Ocean, Californien, Vereinigte Staaten.
179·33	— 36·04	M. v. Madagaskar, Neuholland.
56·89	+ 0·59	Nordbrasilien, atl. Meer, Südafrika.
179·76	+ 11·47	Ind. Ocean, Indien, China, Gr. Ocean.

von Finsternissen wird durch diese Correctionen in bessere Übereinstimmung gebracht, als es durch die Rechnung nach Hansen's Grundlagen möglich ist. Auf jene Finsternisse, die noch Verbesserungen der Mondbewegung zu fordern scheinen, werde ich in der zweiten Abhandlung zurückkommen.

Noch soll hier hervorgehoben werden, dass bei der Ableitung der empirischen Correctionen in den Oppolzer'schen

Tafeln keine der in vorliegender Abhandlung enthaltenen Finsternisse benützt worden ist.

Auf die Vergleichung der historischen Überlieferungen ist im Folgenden weit mehr Sorgfalt verwendet worden, als es von astronomischer Seite bei Behandlung des gleichen Gegenstandes sonst zu geschehen pflegt. Die in Betracht kommenden Stellen sind nämlich durchaus vollständig mitgetheilt, aus den Autoren unmittelbar entlehnt und auf die Textkritik sowie auf die Commentirung ziemlich viel Raum verwendet, auch die chinesischen Finsternisse sind aus den Quellen entnommen und die Berichte ins Deutsche übertragen. Es geschah diese den Abschluss der Abhandlung sehr verzögernde und Manchem vielleicht überflüssig erscheinende Arbeit aus dem Grunde, weil ich jede historische Finsterniss in einer solchen Form zu geben beabsichtigte, dass ein späterer astronomischer Bearbeiter des historischen Theils der Untersuchung in Zukunft ganz enthoben sein möge.

Was zuerst die griechischen und römischen historischen Sonnenfinsternisse anbelangt, so verdanke ich die Herstellung des Textlichen der freundlichen Hilfe des Herrn Dr. W. Kubitschek, Professor am Gymnasium zu Oberhollabrunn. Derselbe hatte nicht nur die Güte, die nöthigen Stellen aus den classischen Autoren zu entlehnen und ihre Übersetzung zu revidiren sondern hat auch meine Resultate in philologischer Richtung verfolgt. Ich drücke ihm hier an öffentlicher Stelle für sein Entgegenkommen meinen verbindlichsten Dank aus.

Alle nachgenannten griechisch-römischen Finsternisse sind von Seyffarth in der pag. 10 erwähnten Abhandlung, einige derselben von Petavius,[1] Struyck,[2] Lambert,[3] Zech[4] und Hofmann[5] untersucht und berechnet worden. Ich habe diese verschiedenen älteren Rechnungsresultate, soweit sie mir in den einzelnen Fällen von Wichtigkeit erschienen, mit meinen Ergebnissen

[1] Opus de doctrina temporum.

[2] Inleid. tot de algem. Geogr. Amsterd. 1740. (No. V. d. angeh. Abhdlgn.)

[3] Sammlung astr. Tafeln, 2. Bd. (Unter Aufs. d. k. pr. Ak. d. W. Berlin 1776.)

[4] Astr. Unters. über d. wichtigeren Finstern. etc. Lpz. 1853.

[5] Die Sonnen- u. Mondfinst. in d. röm. Geschichte des Cassius Dio (Progr. d. k. k. Gymn. Triest. 1868). Über eine von Plutarch erwähnte Sonnenfinst. (Progr. d. k. k. Gymn. Triest. 1873.)

verglichen; man wird daraus am besten den Gewinn gegen die älteren Damoiseau'schen und Hansen'schen Grundlagen beurtheilen können. Die beiden unten notirten Programmschriften Hofmann's sind in der Folge immer mit Progr. I und Progr. II bezeichnet.

Bezüglich der Seyffarth'schen Resultate noch eine kurze Bemerkung. Die pag. 10 erwähnten Correctionen Seyffarth's betragen in dem vorliegenden Zeitraume

	Mondlänge	Apsidenlänge	Knotenlänge	Zeit
für 0	$-1°18'36''$	$-1°45'42''$	$-3°42'37''$	$2^h24^m24^s$
„ 100 n. Chr.	$-1\ 10\ 33$	$-1\ 34\ 48$	$-3\ 19\ 48$	$2\ 9\ 36$;

ich werde Gelegenheit haben, mehrere Resultate, die aus diesen Correctionen entstehen, anzuführen.

Indem ich nun die einzelnen Finsternisse ihrer Zeitfolge nach behandle, bleibt mir noch die Bemerkung zu machen, dass die vielleicht überflüssig erscheinende deutsche Übersetzung neben dem griechischen oder lateinischen Citate aus dem Grunde angesetzt worden ist, um keinen Zweifel über den Sinn zu lassen, in welchem der Autor aufgefasst wurde.

1. Sonnenfinsterniss zu Nicäa. (Nr. 7, Verz. II.)

29 n. Ch., 23. November, $23^h\ 20^m$ 7 m. Zt. Nicäa.

Paullus Diaconus enthält [historia miscella rec. F. Eyssenhardt, Berlin 1869 VII 24] in der nachstehenden, aus Eusebius entlehnten Stelle den im 17. Jahre des Tiberius erfolgten Tod Christi, hierauf die Wunder, wie sie in der Bibel berichtet werden, dann das Folgende:

eodem quoque die a sexta hora diei usque in horam nonam sol in totum obscuratus taetraque nox subito obducta terris est et sicut dictum est „impiaque aeternam timuerunt saecula noctem“. usque adeo autem neque lunam lumini solis neque nubes obstitisse manifestum est, ut quartam decimam ea die lunam tota coeli regione interiecta longissime a conspectu solis abfuisse et stellas tunc

Am selben Tage verdunkelte sich in der sechsten bis neunten Stunde die Sonne gänzlich und grause Nacht zog sich über das Land und, wie es heisst, fürchtete das gottlose Zeitalter ewige Nacht. Keineswegs stand der Mond oder die Wolken dem Sonnenlichte im Wege, vielmehr war, wie berichtet wird, der vierzehnte Mondtag um die ganze Entfernung der Himmelsgegenden am weitesten

diurnis horis vel potius in illa horrenda nocte toto caelo fulsisse referatur, quod non solum sanctorum evangeliorum fides sed etiam aliquanti Graecorum libri adtestantur, quamquam nono decimo anno Tiberii haec facta referantur. scribens autem inter ceteros et Phlegon, qui olympiadas super ipsis enumerat in tertio decimo sermone eisdem verbis asserit haec „porro quarto anno ducentesimae secundae olympiadis facta est defectio solis maxima et nox hora sexta diei facta est ita ut etiam stellae in caelo apparerent. terrae motus etiam magnus in Bithynia factus plurimam Nicaenae partem urbis subvertit."

von der Sonne entfernt und die Sterne funkelten zur Tageszeit oder vielmehr in jener schrecklichen Nacht am ganzen Himmel. Das bestätigt nicht nur die Autorität der heiligen Evangelisten, sondern auch einige Schriften der Griechen, wiewohl sie diese Ereignisse auf das neunzehnte Jahr des Tiberius beziehen. Unter andern auch Phlegon, welcher die Olympiaden aufzählt, im dreizehnten Buche mit folgenden Worten: „Hierauf ereignete sich im vierten Jahre der zweihundertzweiten Olympiade eine sehr grosse Sonnenfinsterniss und zur sechsten Tagesstunde entstand Nacht, so dass sogar die Sterne am Himmel erschienen. Auch entstand ein grosses Erdbeben in Bithynien und zerstörte den grössten Theil der Stadt Nicäa."

Eusebius selbst [ed. Schöne (1875/6) p. 148] bei Syncellos (pag. 324 *d*) berichtet [Fragm. hist. Graec. ed Müller III 607]:

Ἰησοῦς ὁ Χριστός, ὁ υἱὸς τοῦ Θεοῦ, ὁ κύριος ἡμῶν, κατὰ τὰς περὶ αὐτοῦ προφητείας ἐπὶ τὸ πάθος προσήει ἔτους ιϑ'[1] τῆς Τιβερίου βασιλείας, καϑ' ὃν καιρὸν καὶ ἐν ἄλλοις μὲν Ἕλλησιν ἔς ὑπομνήμασιν εὕρομεν ἱστορούμενα κατὰ λέξιν ταῦτα· ὁ ἥλιος ἐξέλιπε· Βιϑυνία ἐσείσϑη· Νικαίας τὰ πολλὰ ἔπεσεν· ἃ καὶ συνάδει τοῖς περὶ τὸ πάθος τοῦ σωτῆρος ἡμῶν συμβεβηκόσ· γράφει δὲ καὶ Φλέγων ὁ τὰς Ὀλυμπιάδας γράψας περὶ τῶν αὐτῶν ἐν τῷ ιγ' ῥήμασιν αὐτοῖς τάδε· τῷ δ' ἔτει τῆς σβ' ὀλυμπιάδος ἐγένετο ἔκλειψις ἡλίου μεγίστη τῶν ἐγνωρισμένων πρότερον καὶ νὺξ ὥρᾳ ἕκτῃ τῆς ἡμέρας ἐγένετο ὥστε καὶ ἀστέρας ἐν οὐρανῷ φανῆναι. σεισμός τε μέγας κατὰ Βιϑυνίαν γενόμενος τὰ πολλὰ Νικαίας κατεστρέψατο· καὶ ταῦτα μὲν ὁ δηλωϑεὶς ἀνήρ. τεκμήριον δ' ἂν γένοιτο

Jesus Christus, der Sohn Gottes, ging nach den über ihn geschehenen Prophezeiungen im 19. Jahre des Tiberius zu seinem Leiden; für diese Zeit finden wir in griechischen Denkbüchern dies erzählt: die Sonne erlosch, Bithynien ward erschüttert, der grösste Theil von Nicäa stürzte ein, — das stimmt auch mit dem, was sich beim Leiden unseres Herrn ereignete. Also meldet besonders Phlegon, der die Olympiaden aufzählt, hierüber im dreizehnten Buche Folgendes wörtlich: „im vierten Jahre der zweihundertzweiten Olympiade geschah die grösste Sonnenfinsterniss unter den früher bekannten und in der sechsten Tagesstunde ward es Nacht, so dass die Sterne am Himmel sich zeigten, und ein grosses Erd-

[1] Bei Hieronymus „XVIII".

τοῦ κατὰ τόδε τὸ ἔτος πεπονθέναι τὸν σωτῆρα ἡ τοῦ κυρίου κατὰ Ἰωάννην εὐαγγελίου μαρτυρία, ἥτις μετὰ τὸ ιε' ἔτος Τιβερίου τριετῆ χρόνον τῆς διδασκαλίας αὐτοῦ διαγενέσθαι μαρτυρεῖ....

beben, das in Bithynien entstanden, zerstörte den grössten Theil Nicäa's." So viel der genannte Mann. Als Bestätigung dessen, dass der Heiland in diesem Jahre gelitten, mag nach Johannes Evang. das Zeugniss des Herrn gelten, welches bezeugt, dass nach dem 15. Jahre des Tiberius drei Jahre seiner Lehrzeit verflossen ....

Georg. Syncellos p. 222 *d* aus Julius Africanus (Müller, a. a. O.):

Φλέγων ἱστορεῖ ἐπὶ Τιβερίου Καίσαρος ἐν πανσελήνῳ ἔκλειψιν ἡλίου γεγονέναι τελείαν ἀπὸ ὥρας ἕκτης μέχρις ἐννάτης· δῆλον ὡς ταύτην....

Phlegon erzählt, dass zur Zeit des Kaiser Tiberius eine vollständige Sonnenfinsterniss von der 6. bis 9. Stunde bei Vollmond eingetreten sei. Offenbar unsere.

Die Angabe Phlegon's, welche die Sonnenfinsterniss in das vierte Jahr der 202. Olympiade setzt, ist hier offenbar im Sinne der bei den Kirchenvätern und Geschichtschreibern usuellen sogenannten „spätern Olympiadenrechnung" zu verstehen, nach welcher das bezeichnete Jahr auf 29 n. Chr. fallen und seinen Beginn im September haben würde. Das Jahr der Finsterniss ist somit unzweifelhaft festgestellt. Die Centralitätszone hat folgenden Gang:

Nördliche Grenze		Südliche Grenze	
$\lambda =$ 0°2 v. Par.	$\varphi = +58°2$	$\lambda =$ 0°5 v. Par.	$\varphi = +57°4$
9·8	53·0	10·0	52·1
18·5	47·4	18·6	46·3
26·2	41·7	26·2	40·4
33·0	36·3	33·0	35·1
39·1	31·5	39·0	30·3

Demnach war, wie die der vorliegenden Abhandlung beigegebene Karte (Taf. I) zeigt, die Finsterniss in Thracien, Bithynien und Syrien total. Die Stadt Nicäa ($\lambda = 29°799$ v. Gr., $\varphi = +40°33$) fällt mitten in die Zone der Centralität und die grösste Phase beträgt daselbst um $22^h\ 47^m\ 1$

12·02 Zoll,

Rechnungsresultate, welche den Berichten völlig entsprechen, da die Finsterniss in der sechsten Tagesstunde (nach Phlegon

zwischen der sechsten und neunten), also um Mittag stattgefunden und alle Erscheinungen der Totalität mit sich geführt hat. Die Oppolzer'schen Correctionen geben hier offenbar eine weit bessere Darstellung als die Rechnung nach Hansen, weil bei Hind[1] die Curve der Centralität westlich von Odessa gegen Sinope, Ninive und den persischen Golf läuft, und also für Bithynien nur partiell bleibt.

Zu welchen Consequenzen die von Seyffarth angenommenen Correctionen führen, ist bereits bei dieser Finsterniss ersichtlich: Seyffarth hält die Finsterniss vom 11. September 33 n. Chr. (Nr. 13, Verz. II) für die nicäische, dieselbe, welche nur in Centralasien sichtbar ist, wie die Verbindung der am a. O. gegebenen drei Hauptpunkte der Centralität lehrt.

Von Africanus, Eusebius und seinen Epitomatoren[2] wird die Finsterniss, den mitgetheilten Textstellen gemäss, auf den Tod Christi bezogen. Es ist über die Erscheinungen, welche nach der Bibel bei Christi Kreuzigung stattgefunden haben und die zu verschiedenen Malen auch astronomisch gedeutet worden sind, schon so vielfach geschrieben worden, dass es vielleicht überflüssig erscheinen mag, hierauf zurückzukommen; indessen mögen doch einige Bemerkungen darüber hier Platz finden.

Der Zeitperiode nach würde die nicäische Finsterniss ganz gut auf das Todesjahr Christi passen. Zumpt[3] grenzt den Zeitraum, in welchen dieses Jahr fällt, von 29 bis 32 n. Chr. ab und beweist, dass jede Rechnung, welche den Tod Christi nach 32 setze, zu verwerfen sei. Aus einer sehr eingehenden, sorgfältigen Untersuchung, insbesonders der Berichte des Tertullian und durch Aufklärung der Erzählung des Lukas findet Zumpt das 15. Jahr des Tiberius als wahrscheinlichstes, in welchem die Kreuzigung erfolgt sein kann, d. h. das Jahr 29. Auch Sepp[4] erhält dasselbe Resultat, und für Christi Geburt das Jahr 6 vor unserer Zeitrechnung,[5] mit Zumpt im Wesentlichen übereinstim-

[1] Nature a. a. O. (Finsterniss Nr. 8.)

[2] s. Müller (Fragm. hist. Graec. III.)

[3] Das Geburtsjahr Christi. Lpz. 1869.

[4] Thaten und Lehren Jesu. Schaffhausen 1864.

[5] Dieselben Resultate folgen aus den Untersuchungen Ideler's Handb. d. math. u. tech. Chron. Berlin 1826, 2. Bd.).)

mend. Lässt sich also die nicäische Sonnenfinsterniss — die überdies auch für Jerusalem noch sehr beträchtlich bleibt — ganz wohl auf die angebliche bei Christi Tode eingetretene Verfinsterung der Sonne beziehen, so steht dem die sehr entscheidende Angabe entgegen, dass die Kreuzigung im Frühjahre stattgefunden hat, während die nicäische Finsterniss in den November fällt. Zwar behauptet Zumpt, dass die genauere Angabe des Todes Christi geradezu als eine Erfindung der ersten Christen zu betrachten sei [der gewöhnlich als Todestag angenommene 25. März lässt sich, da an diesem Tage das letzte Mondviertel war, nicht mit dem erst nach Christi Tod stattgefundenen Paschafeste vereinigen], allein von der Jahreszeit der Bibelangabe wird man sich nicht allzusehr entfernen dürfen. Da nun der Identificirung durch diese Umstände widersprochen wird und andererseits, wie aus der Durchsicht der im Verz. II gegebenen Finsternisse erhellt, keine weitere in Jerusalem sichtbare Sonnenfinsterniss möglich ist, so wird man von astronomischer Seite die Versuche, die Worte der Bibel auf eine Sonnenfinsterniss zu deuten, gänzlich aufgeben müssen, ein Resultat, das übrigens schon bekannt ist und hier nur eine neue Bestätigung erfährt.

Es ist ferner versucht worden, die Erzählung bei Matthäus (XXVII, 50) durch eine Mondesfinsterniss zu erklären. Ich gehe auch auf diese Hypothese ein, indem ich jene Mondesfinsternisse hier ansetze, die zwischen 29 und 33 überhaupt stattfinden, und ferner die näheren Umstände ihrer Sichtbarkeit für Jerusalem angebe. Es sind folgende:

	Mittlere Zeit Jerusalem		In Jerusalem
1) 28 n. Chr. Dec. 20.			
Total. Mitte der Finst.	2^h	44^m5	ganz unsichtbar.
2) 29 n. Chr. Juni 14. Tot.			
Anfang der part. Finst.	8	28·8	der ganze Verlauf sichtbar
Ende	12	6·8	
3) 29 n. Chr. Dec. 9. Part.			
Anfang der part. Finst.	9	4·6	
Ende	11	36·4	" " " "

	Mittlere Zeit Jerusalem	In Jerusalem
4) 30 n.Chr. Juni 3. Patiell. Mitte der Finst. . . .	$0^h\ 29^m2$	ganz unsichtbar.
5) 30 n. Chr. October 29. Vollmond	15 21·7	Finsterniss unmöglich.
6) 30 n. Chr. Novemb. 28. Vollmond	11 17·6	„ „
7) 31 n. Chr. Apr. 25. Partiell. Anf. d. part. Finst.	9 35·7	ganzer Verlauf sichtbar.
Ende	11 41·7	
8) 31 n. Chr. October 18. Partiell. Anf. d. p. Finst.	16 49·9	Anfang und Mitte sichtbar,
Ende	18 43·1	Ende unsichtbar.
9) 32 n.Chr. Apr. 13. Total. Mitte der Finsterniss .	23 39·1	ganz unsichtbar.
10) 32 n. Chr. October 7. Total. Mitte der Finst.	2 54·6	„ „
11) 33 n. Chr. April 3. Partiell. Anf. d. part. Finst.	4 2·6	Anfang u. Mitte nicht sicht-
Ende	6 53·8	bar, Ende sichtbar.

Demnach fallen in die Frühjahrszeit nur zwei in Jerusalem sichtbare Mondesfinsternisse, nämlich 7) und 11), von denen überdies nur die zweite ungefähr dem Umstande entspricht, dass die Verfinsterung am Nachmittage bei Sonnenuntergang stattgefunden habe. Das Bemerkenswerthe ist, dass das Datum dieser zweiten Finsterniss der 14. Nisan ist und auf einen Freitag fällt, was beides mit den traditionellen Anschauungen der Kirche über den Todestag Christi in vollkommenster Übereinstimmung steht. Diese einzig annehmbare Finsterniss, auf die schon mehrere Male von verschiedener Seite aufmerksam gemacht worden ist,[1] lässt sich demnach sehr wohl mit dem Todestage Christi der Kirche vereinigen, nicht aber mit jenem auf historischem Wege gefundenen Resultate, nach welchem Christus im Jahre 29 gestorben sein muss.

[1] Calvisius erwähnt schon diese Finsterniss.

2. Sonnenfinsterniss des Claudius. (Nr. 31, Verz. II.)

45 n. Chr. 31. Juli $22^h\ 16^m\ 5$ m. Zt. Rom.

Hierüber gibt Cassius Dio (LX 26, 1) folgenden Bericht:

καὶ ἐπειδὴ ὁ ἥλιος ἐν τοῖς γενεθλίοις αὐτοῦ (sc. Κλαυδίου) ἐκλείψειν ἔμελλεν, ἐφοβήθη τε μή τις ἐκ τούτου ταραχὴ γένηται, ἐπεὶ ἄλλα ἄττα τέρατα συνεβεβήκει, καὶ προείγραψεν οὐ μόνον ὅτι τε ἐκλείψει καὶ ὁπότε καὶ ἐφ' ὁπόσον, ἀλλὰ καὶ τὰς αἰτίας δι' ἃς ἀναγκαίως γενήσεσθαι τοῦτο ἔμελλεν.

Und da sich die Sonne an seinem (des Claudius) Geburtstage verfinstern sollte, besorgte er, es möchte, da auch einige andere Wundererscheinungen eingetroffen waren, dies eine Verwirrung veranlassen und liess daher nicht bloss das Eintreten der Finsterniss und die Zeit und Grösse derselben, sondern auch die dieselbe mit Nothwendigkeit herbeiführenden Gründe bekannt machen.

Hieran schliessen sich Erörterungen über die Entstehung der Sonnen- und Mondesfinsternisse. Weder das Factum der wirklichen Beobachtung dieser Finsterniss findet sich erwähnt, noch ist die Grösse der Verfinsterung bezeichnet. Das Datum der Finsterniss steht sicher, denn Kaiser Claudius feierte seinen Geburtstag am 1. August (Sueton. Claud. 2, Cassius Dio LX 5). Das Phänomen wird, so lange Hansen's Mondtafeln die Grundlage für Finsternisse abgeben, für die Stadt Rom niemals zu einem auffallenden gemacht werden können, ohne völlig unberechtigte, bedeutende Correctionen in Rechnung zu bringen. Die Finsterniss läuft viel zu südlich, als dass sie in Rom hätte von Bedeutung sein können, und wird vielmehr nur in Oberägypten auffallend gewesen sein, wie die folgende Zone der Centralität zeigt:

Nördliche Grenze		Südliche Grenze	
$\lambda = 17°6$ v. Par.	$\varphi = +21°9$	$\lambda = 17°6$ v. Par.	$\varphi = +19°8$
20·7	22·0	20°7	19·9
23·8	22·0	23·8	19·8
26·8	21·8	26·8	19·6
29·8	21·5	29·7	19·3
32·7	21·1	32·6	18·8
35·6	20·4	35·5	18·2

Die grösste Verfinsterung der Sonne für Rom ($\lambda = 12°57$ v. Gr., $\varphi = +41°90$) ist:

um $21^h\ 20^m$ w. Zt.
3·91 Zoll.

Hofmann[1] findet nach Hansen's Tafeln 3·8 Zoll, Lambert's[2] ältere Rechnung 5·3 Zoll, und wenn Seyffarth[3] sagt die Verfinsterung müsse in Rom nahe total gewesen sein, so lässt sich diese historisch nicht erwiesene Totalität nur mit seinen Correctionen bewirken.

Die Centralitätszone der Finsterniss fällt ausserhalb des Bereiches der dieser Abhandlung beigegebenen Karte.[4]

Auf classischen Boden fällt auch die ringförmige Finsterniss vom 19. Mai 49 n. Chr., über welche die römischen und griechischen Autoren nichts zu erwähnen scheinen. Die Finsterniss ist dieselbe, über die unter dem 25. Jahre des Kaisers Kuang-wu-ti berichtet wird, und müsste im centralen Kleinasien, sowie im Westen von Cypern bedeutend gewesen sein; da möglicher Weise noch Überlieferungen auffindbar wären, so gebe ich die genaueren Grenzcurven der Centralität hier an:

Nördliche Curve		Südliche Curve	
$\lambda = 21°7$ v. Par.	$\varphi = +30°3$	$\lambda = 22°2$ v. Par.	$\varphi = +28°7$
24·4	32·7	24·9	31·0
27·1	34·9	27·5	33·3
29·8	37·0	30·2	35·4
32·5	38·9	32·9	37·3
35·4	40·6	35·7	39·1
38·3	42·2	38·6	40·7

3. Die campanisch-armenische Sonnenfinsterniss. (Nr. 52, Verz. II.)

59 n. Chr. 30. April, $1^h\ 17^m$ 0 m. Zt. Rom.

Mehrere der classischen Schriftsteller beziehen bekanntlich jene Zeichen, die der Tödtung Agrippina's, der Mutter Nero's

[1] Progr. I.p. 36.

[2] L. c.

[3] L. c. pag. 456.

[4] Siehe H. Lehmann (Claudius und Nero und ihre Zeit I. 1858, p. 254, der auch Seneca quaest. nat. VII 25, 3 auf dieses Ereigniss bezieht.

gefolgt sein sollen, auf die Zeit, innerhalb welcher die von dem Senate beschlossenen Dankgebete und Opferfeierlichkeiten abgehalten wurden. Der Meuchelmord fiel in das Fest der Quinquatrus, das letztere währte zur Zeit vom 19.—23. März.[1] — Unter den bald nach dem Tode Agrippina's eingetretenen Zeichen berichtet Tacitus:

Annales XIV 12 [ed. Nipperdey]:

iam sol repente obscuratus et tactae de coelo XIV urbis regiones.	Schon ward plötzlich die Sonne verfinstert und der Blitz traf die 14 Regionen der Stadt [Rom].

Cassius Dio bezieht die Erscheinung unmittelbar auf die Opferfeierlichkeiten:

LXI 16, 4.

ὁ μέντοι ἥλιος σύμπας ἐν μέσαις ταῖς θυσίαις ταῖς ἐπὶ τῇ Ἀγριππίνῃ κατὰ τὸ ψήφισμα γενομέναις ἐξέλιπεν, ὥστε καὶ τὰς ἀστέρας ἐκφῆναι.	Die Sonne aber verfinsterte sich mitten in den auf Beschluss des Senates wegen Agrippina's abgehaltenen Opferfeierlichkeiten ganz und gar, so dass selbst die Sterne sichtbar wurden.

Durch Plinius wird die Sichtbarkeit auch auf Campanien und Armenien ausgedehnt:

Hist. nat. II 70, 180 [ed. Detlefsen. 1866].

solis defectum Vipstano et Fonteio cos., qui fuere ante paucos annos, factum pridie Kalendas Maias Campania hora diei inter septimam et octavam sensit, Corbulo dux in Armenia inter horam diei decimam et undecimam prodidit visum circuitu globi alia aliis detegente et occultante.	Die unter den vor wenigen Jahren im Amt gewesenen Consulen Vipstanus und Fontejo, am 30. April eingetretene Sonnenfinsterniss sahen die Leute in Campanien zwischen 7 und 8^h; der Heerführer Corbulo aber in Armenien bezeugte, sie zwischen 10 und 11^h gesehen zu haben, da ja die Kugelgestalt der Erde dem Einen dies, dem Andern jenes zeigte oder verbarg.

Die Finsterniss ist sowohl von Zech[2] als auch von Hofmann[3] behandelt worden.

Ersterer findet für Campanien 9·94, für Armenien 10·43 Zoll, der zweite Berechner 10·1, resp. 11·2 Zoll. Hofmann findet

[1] Mommsen-Marquardt, Handb. d. röm. Alterth. VI p. 417.

[2] L. c. pag. 52.

[3] Progr. I, pag. 37 und Progr. II, pag. 9—11.

ausserdem für den Verlauf der Centralitätscurve nach Hansen's Mondtafeln eine Linie, die über Algier, die Südspitze von Sicilien, den Peloponnes und Südkleinasien läuft. Dem gegenüber setze ich zuerst die von mir erhaltenen Grenzen der Zone der Centralität an:

Nördliche Curve		Südliche Curve	
$\lambda = 349°2$ v. Par.	$\varphi = +37°6$	$\lambda = 349°2$ v. Par.	$\varphi = +36°9$
352·3	38·5	352·3	37·8
355·6	39·3	355·5	38·6
358·7	39·9	358·7	39·3
2·0	40·4	2·0	39·8
5·5	40·8	5·4	40·2
8·9	41·1	8·9	40·5
12·5	41·3	12·5	40·7
16·2	41·3	16·1	40·8
19·9	41·3	19·8	40·8
23·7	41·1	23·7	40·6
27·7	40·8	27·6	40·3
31·7	40·3	31·6	39·9
35·8	39·8	35·7	39·4
40·0	39·1	40·0	38·8
44·4	38·3	44·3	38·0
48·9	37·4	48·8	37·2
53·5	36·4	53·4	36·2
58·2	35·3	58·2	35·1

Der Vergleich der nach diesen Coordinaten in die beiliegende Karte eingezeichneten Zone mit Hofmann's Resultat zeigt sofort eine durch die Mitnahme der Oppolzer'schen Correctionen bewirkte beträchtliche Verschiebung nach Norden, also in einem den Überlieferungen durchaus günstigen Sinne. Denn während Hofmann aus seiner Rechnung schliessen muss „das Sichtbarwerden von Sternen war im Peloponnes, nicht aber in Campanien und noch weniger in Rom möglich", rückt meine Zone der römischen Capitale beträchtlich nahe, Neapolis fällt mitten in das Gebiet der Centralität und Nicäa hat zum zweiten Male, nachdem kaum 30 Jahre seit eines solchen Phänomens für diese Stadt verflossen sind, die seltene Erscheinung einer totalen Verfinsterung

der Sonne. Die nähere Untersuchung für die Städte Rom und Neapolis ($\lambda = 14°24$ v. Gr. $\varphi = +40°86$) ergibt:

	Rom	Neapolis
	$2^h\ 26^m9$ w. Zt.	$2^h\ 36^m7$ w. Zt.
Grösste Phase	11·68 Zoll.	12·01 Zoll.

Demnach können immerhin in Rom Sterne sichtbar geworden sein und noch viel wahrscheinlicher in der Landschaft Campanien, und es dürfte also der wegen seiner Freigebigkeit mit totalen Sonnenfinsternissen sonst übel beleumundete Dio Cassius diesmal Recht behalten haben. Da in Campanien die siebente und achte Tagesstunde zwischen Mittag und $2^1/_4{}^h$ fällt, so stimmt auch die Zeit, so weit sie sich mit der beiläufigen Angabe des Plinius vergleichen lässt. Zech hat auch bereits[1] darauf aufmerksam gemacht, dass sich der Ort, wo Corbulo zur Zeit der Finsterniss in Armenien stand, aus den Classikern nicht mit Sicherheit feststellen lässt, wesshalb ich von der näheren Bestimmung der Finsterniss für Armenien Abstand nehme.

Seyffarth nimmt vermöge seiner Correctionen die am 12. October 60 n. Chr. (Nr. 55, Verz. II) stattfindende Finsterniss für die campanisch-armenische, dieselbe, welche von den Chinesen unter dem dritten Jahre des Kaisers Ming-ti erwähnt wird und in Europa nur in Russland bedeutend ist.

4. Sonnenfinsterniss des Apollonius. (Nr. 65, Verz. II.)

67 n. Chr. 31. Mai, $4^h\ 9^m$ 9 m. Zt. Rom.

Philostratus berichtet aus dem Leben des Apollonius von Tyana Folgendes:

{τὰ ἐς τὸν Τυανέα Ἀπολλώνιον[2] ed. Kayser, 1870] IV. c. 43 (p. 183).

ὑπωπτεύετο δέ, ὡς ἔφην, καὶ πολὺ μᾶλλον ἐφ' οἷς καὶ περὶ τῆς διοσημίας

Man beargwöhnte, wie ich gesagt habe, ihn (Apoll.) noch mehr wegen

[1] L. c. pag. 52.

[2] Apollonius von Tyana, ein griech. Philosoph und Thaumaturg, häufig mit Christus zusammengestellt, lebte unter Kaiser Claudius und starb etwa unter Nerva, seine Lebenszeit fällt demnach ungefähr zwischen die Jahre 40—98 n. Chr. Die Schrift des Philostratus (mehr Roman als Geschichtswerk) ist auf Veranlassung der Kaiserin Julia, Gemalin Alex. Severus', geschrieben.

εἶπε. γενομένης γάρ ποτε ἐκλείψεως ἡλίου καὶ βροντῆς ἐκδοθείσης, ὅπερ ἥκιστα ἐν ἐκλείψει δοκεῖ συμβαίνειν, ἀναβλέψας εἰς τὸν οὐρανὸν....

dessen, was er über das Wunder gesprochen: denn als einmal eine Sonnenfinsterniss erfolgte und Donner rollte, was, wie es scheint, am wenigsten bei einer Sonnenfinsterniss geschieht, blickte er zum Himmel auf....

Apollonius befand sich damals in Rom, und die mystische Äusserung, welche er gelegentlich der Finsterniss gethan, soll von dem Consul Telesinus und einigen Anderen gehört worden sein. Demnach fällt das Ereigniss in die Regierungszeit Nero's, und zwar 66 oder 67 n. Chr. Die einzige mögliche Finsterniss ist aber, wie aus dem Verzeichniss II hervorgeht, die vom 31. Mai 67.[1] Wie die folgende Zone der Centralität zeigt, ist sie in Spanien, Numidien und in der römischen Provinz Africa sichtbar.

Nördliche Grenze		Südliche Grenze	
$\lambda = 342°4$ v. Par.	$\varphi = +42°1$	$\lambda = 342°2$ v. Par.	$\varphi = +40°6$
346·2	41·4	345·9	39·9
350·1	40·6	349·8	39·0
354·1	39·6	353·8	38·0
358·2	38·5	357·9	36·9
2·4	37·3	2·1	35·7

In Rom erschien die Finsterniss noch gross genug, um die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich zu lenken; sie betrug um $5^h\ 55^m5$ w. Zt.

9·25 Zoll.

5. Plutarch's Sonnenfinsterniss. (Nr. 71, Verz. II.)

71 n. Ch. 19 März, $22^h\ 23^m$ 6 m. Zt. Rom.

Die in Plutarch's Gespräch „De facie in orbe lunae" enthaltene Beschreibung einer totalen Sonnenfinsterniss lautet:

---

[1] Hamaker hat in seinen „lect. Philostr." (Lpz. 1816), pag. 120, diese Sonnenfinsterniss mit der campanisch-armenischen identificiren wollen.

c. 19.

ὅτι μὲν γὰρ οὐδὲν οὕτως τῶν περὶ τὸν ἥλιον γενομένων ὅμοιόν ἐστιν ὡς ἔκλειψις ἡλίου δύσει, δότε μοι, ταύτης ἐναγχος τῆς συνόδου μνησθέντες, ἣ πολλὰ μὲν ἄστρα πολλαχόθεν τοῦ οὐρανοῦ διέφηνεν, εὐθύς ἐκ μεσημβρίας ἀρξαμένη, χρᾶσιν δὲ, οἵαν τὸ λυκαυγὲς τῷ ἀέρι παρέσχεν.

Dass von allen Erscheinungen an der Sonne nichts so ähnlich ist als eine Sonnenfinsterniss dem Sonnenuntergange, gebt ihr mir zu, wenn ihr euch der neulichen Zusammenkunft [von Mond und Sonne] erinnert, welche, nachdem sie gleich nach Mittag begonnen hatte, viele Sterne an vielen Punkten des Himmels sichtbar machte und der Luft eine Färbung gleich der Dämmerung verlieh.

Der chronologischen Fixirung dieser der Beschreibung nach unzweifelhaft totalen Sonnenfinsterniss steht besonders die Schwierigkeit entgegen, dass sich die Entstehungszeit der Schrift „De facie“ (deren Anfang überdies verloren gegangen) nicht feststellen lässt. Dass die physikalischen Schriften Plutarch's in die erste Hälfte seines Lebens fallen, ist sicher, ebenso, dass viele derselben, jedoch nicht alle, zu den Jugendschriften zu zählen sind. Die in Rede stehende Schrift macht ihrem Gehalte nach nicht den Eindruck, als ob sich Plutarch zur Zeit der Abfassung in einem noch gar jugendlichen Alter befunden haben möchte.

Gehe ich von der unter den verschiedenen Annahmen über das Geburtsjahr Plutarch's wahrscheinlichsten Hypothese aus, dass als solches das Jahr 45 n. Chr. zu betrachten sei, so hätte Plutarch die Finsterniss im Alter von 26 Jahren beobachtet, was jedenfalls annehmbarer ist, als das jugendliche Alter von 19 Jahren, welches Hofmann findet, indem er das Geburtsjahr Plutarch's noch um fünf Jahre früher voraussetzt und die Beobachtung auf die Finsterniss von 59 n. Chr. bezieht. Einige Anhaltspunkte über das Alter Plutarch's um die in Rede stehende Zeit und seinen damaligen Wohnsitz, erhellen aus der Schrift „De εἶ apud Delphos“, indem nach c. 1 Plutarch und einige Andere mit ihrem Lehrer Ammonius sich in Delphi philosophischen Betrachtungen hingaben, καθ' ὃν καιρὸν ἐπεδήμει Νέρων (zur Zeit, da Nero sich dort aufhielt = 66—67 n. Chr.) und dass er c. 17 zu den νέοι (jungen Männern) gerechnet wird. Einen längeren Aufenthalt zu Delphi nahm Plutarch erst nach seiner Rückkehr von Rom, indem er ein Priesteramt am Tempel des pythischen

Apollo erhielt, sonst aber scheint er den grössten Theil seiner Lebenszeit in seiner Vaterstadt Chäronea ansässig gewesen zu sein. Demnach müsste, wenn das obige Datum als Beobachtungsfactum unzweifelhaft ist, die Beobachtung der Finsterniss in eine Zeit fallen, wo Nero Griechenland schon mehrere Jahre verlassen hatte. Zweifelhaft bleibt zugleich, ob die Wahrnehmung zu Delphi oder Chäronea geschah.

Stehen also die biographischen Nachrichten über das Leben Plutarch's mit der Festsetzung der Finsterniss auf das Jahr 71 n. Chr. nicht im Widerspruch, so gewinnt letztere durch die Rechnung eine ganz besondere Sicherheit. Als Bedingung der Identität einer Finsterniss mit der Plutarch'schen muss nach den Textworten zweierlei festgehalten werden: dass die Finsterniss für Chäronea, resp. Delphi, von ganz besonderer Grösse werde, und dass sie kurz nach Mittag falle. Hiezu kommt als Nebenbedingung, dass sie in das jüngere Alter Plutarch's eingeschlossen sei. Dem letztern Umstande wird, wie dies oben bemerkt wurde, Genüge geleistet, die Erfüllung der beiden Hauptbedingungen aber lässt sich bei der systematischen Durchrechnung der für die Mittelmeerländer in Betracht kommenden Finsternisse an den Eigenschaften der letzteren nachweisen. Die im Verz. II durchgeführte Bestimmung der Centralitätspunkte der sämmtlichen, zwischen 26 und 103 n. Chr. möglichen centralen Finsternisse zeigt, wenn man die zu einer jeden Finsterniss gehörenden drei Punkte auf einer geeigneten Karte einträgt und zu einem Kreisbogen verbindet, dass von allen diesen Finsternissen nur drei für Griechenland bedeutend gewesen sein können: die campanisch-armenische vom 30. April 59, die vom 19. März 71 und die vom 5. Jänner 75 n. Chr. Das Verhalten dieser drei Finsternisse bezüglich ihrer Sichtbarkeit in Griechenland stellt sich wie folgt:

a) Die Centralitätszone der campanisch-armenischen läuft, wie ein Blick auf die beiliegende Karte zeigt, zu nördlich und die Finsterniss würde eher in Thessalien, Larissa bedeutend sein. Ausserdem lehrt schon der Augenschein, dass sie, nachdem sie in Neapolis erst nach $2^1/_2{}^h$ fällt, in den um 9—10° östlicher gelegenen griechischen Städten noch später sichtbar werden musste und nicht auf den Mittag fallen konnte.

b) Die von mir mit der Plutarch'schen identificirte Finsterniss vom 19. März 71 dagegen läuft, wie aus der Karte und der folgenden Centralitätszone ersichtlich, in nächster Nähe von Delphi und Chäronea nach Norden:

Nördliche Curve		Südliche Curve	
$\lambda = 11°5$ v. Par.	$\varphi = +30°3$	$\lambda = 11°7$ v. Par.	$\varphi = +29°7$
14·1	33·1	14·2	32·7
16·6	36·2	16·8	35·7
19·3	39·3	19·4	38·8
22·0	42·3	22·1	41·9
24·9	45·4	25·0	45·0

Für Chäronea tritt die grösste Phase ein 54 Minuten vor Eintritt des wahren Mittags im Betrage von

11·65 Zoll;

für das 1′ westlicher und 23′ südlicher gelegene Delphi ($\lambda = 22°47$ v. Gr. $\varphi = +38°47$) ist die grösste Phase

11·73 Zoll,

also höchst bedeutend.

c) Die dritte Finsterniss endlich, die vom 5. Jänner 75, bleibt zu bedeutend westlich von Griechenland, wie man aus der folgenden, auf der Karte eingetragenen Zone ihrer Centralität beurtheilen kann:

Nördliche Curve		Südliche Curve	
$\lambda = 351°2$ v. Par.	$\varphi = +26°9$	$\lambda = 351°1$ v. Par.	$\varphi = +26°1$
354·5	29·2	354·5	28·4
358·1	31·6	358·1	30·8
1·9	34·1	1·9	33·4
6·0	36·6	5·9	36·0
10·3	39·2	10·2	38·6
14·8	41·6	14·7	41·1

Sie erreicht ihr Maximum in Chäronea um $4^h\ 9^m$ w. Zt. im Betrage von

10·37 Zoll,

und stimmt also weder der Zeit noch der Grösse nach.

Nachdem, wie bereits bemerkt, alle andern centralen Finsternisse für die Identificirung mit der Plutarch'schen gegenstandslos sind und von den oben angeführten drei allein in Betracht kommenden, nur die zweite es vermag, in jeder Hinsicht eine völlig befriedigende Übereinstimmung mit den Worten Plutarch's sowohl wie mit seinen äusseren Lebensverhältnissen zu geben, so bleibt nur die, wie ich glaube, zwingende Annahme, die Finsterniss vom 19. März 71 als mit der von Plutarch beschriebenen identisch anzunehmen.

Wie früher bemerkt, identificirt Hofmann die campanisch-armenische Finsterniss mit der in Rede stehenden; nach seiner eigenen Rechnung bleibt aber die Curve, über Griechenland, Argolis, die Insel Aegina gehend, noch viel zu weit von Chäronea und Delphi entfernt, als dass die Finsterniss an diesen Orten besonders auffallend resultiren kann. Wie man aus Allem ersieht, ist die Entstehung meines Resultates vornehmlich die Folge der Verschiebung der Curven, folgend aus der Wirkung der in dieser Zeit bereits erheblichen Oppolzer'schen Correctionen; die Anwendung dieser bringt nicht allein die vollständige Übereinstimmung der Rechnung mit dem Berichte über die campanisch-armenische Finsterniss zuwege, sondern lässt auch die Finsterniss vom Jahre 71 an Bedeutung gewinnen, nachdem sie von fast allen Rechnern bisher kaum eine weitere Beachtung erfahren hat.[1]

Seyffarth wird bei der Untersuchung der römisch-griechischen Finsternisse[2] vermöge seiner Correctionen darauf geführt, die Plutarch'sche Finsterniss mit der vom 22. Juli 73 (Nr. 74, Verz. II) zu identificiren, dieselbe, welche nach meiner Rechnung in China, Lappland und Norwegen sichtbar ist und von den Chinesen unter Kaiser Ming-ti im 16. Jahre erwähnt wird. Hierüber bedarf es wohl keiner Bemerkung.

---

[1] Struyck scheint der Einzige zu sein, der in der Finsterniss vom Jahre 71 die Plutarch'sche vermuthet hat. Wenn auch auf noch sehr unvollkommene Tafeln angewiesen, beschreibt er (l. c. pag. 101) doch den Weg, den die Finsterniss nimmt, schon ziemlich richtig.

[2] L. c. pag. 481/2.

6. Sonnen- und Mondesfinsterniss zu Rom.

An die Plutarch'sche Finsterniss schliesst sich den Ergebnissen meiner Rechnung nach sofort eine weitere Verfinsterung der Sonne, die von Plinius wie folgt erwähnt wird:

Hist. nat. II 13, 57.

Intra ducentos annos Hipparchi sagacitate conpertum est et lunae defectum aliquando quinto mense a priori fieri, solis vero septimo, eundem bis in triginta diebus supra terras occultari, sed ab aliis hoc cerni, quaeque sunt in hoc miraculo maxime mira, cum conveniat umbra terrae lunam hebetari, nunc ab occasus parte hoc ei accidere, nunc ab exortus, quanam ratione, cum solis exortu umbra illa hebetatrix sub terra esse debeat, semel iam acciderit, ut in occasu luna deficeret, utroque super terram conspicuo sidere. Nam ut quindecim diebus utrumque sidus quaereretur et nostro aevo accidit, imperatoribus Vespasianis patre tertium filio[1] consulibus.

Seit 200 Jahren hat man durch Hipparch's scharfsinnige Berechnung erfahren, dass eine Mondfinsterniss zuweilen im 5., eine Sonnenfinsterniss aber im 7. Monat der zuletzt vorangegangenen folgt und dass die Sonne in 30 Tagen zweimal über der Erde verdunkelt wird, dass man aber dies nur von diesem, bald von jenem Orte aus wahrnehmen könne. Bei dieser wunderbaren Erscheinung ist jedoch am wenigsten zu begreifen, dass die Verfinsterung des Mondes, die doch durch den Erdschatten bewirkt wird, bald von seiner westlichen Seite eintrete, bald von seiner östlichen beginne und warum sogar schon einmal, während beide Gestirne noch über der Erde standen, der Mond beim Untergange verfinstert wurde, da doch der verfinsternde Schatten beim Aufgang der Sonne hätte unter die Erde fallen sollen. Denn dass beide Gestirne innerhalb 15 Tagen vermisst wurden, geschah auch in unserm Zeitalter, als Kaiser Vespasian u. zw. der Vater zum dritten Mal und sein Sohn das Consulat verwalteten.

Die Stelle bedarf zuerst des Nachweises, in welcher Weise für Rom zur Zeit Vespasians die Sonnen- und Mondesfinsternisse aufeinander gefolgt sind und welche davon in Betracht kommen können. Zu dem Zwecke sind bereits am Schlusse des Verz. I die Elemente der zwischen 70—75 stattfindenden Mondfinsternisse mitgetheilt worden. Die Reihenfolge der in diesem

[1] So emendirt von W. Henzen, Bulletino dell' instituto archeologico 1582, 95 fg.

Zeitraume stattfindenden Mondesfinsternisse und der in Europa sichtbaren grösseren Sonnenfinsternisse ist folgende:

☾	70	n. Chr.	13.	April	$18^h\,14^m6$	m.	Zt.	Rom unmöglich,
☾	70	„ „	8.	September	14 24·5	„	„	„ „
☾	71	„ „	4.	März	8 47·7	„	„	„ partiell,
☉	71	„ „	19.	„	22 23·6	„	„	„ ringf. total,
☾	71	„ „	28.	August	22 50^m4	„	„	„ partiell,
☾	72	„ „	21.	Februar	21 56·1	„	„	„ total,
☾	72	„ „	17.	August	0 39·1	„	„	„ „
☾	73	„ „	10.	Februar	14 13·4	„	„	„ partiell,
☉	73	„ „	22.	Juli	22 20·7	„	„	„ total,
☾	73	„ „	6.	August	1 34·8	„	„	„ partiell,
☾	74	„ „	31.	Jänner	5 3·1	„	„	„ unmöglich,
☾	74	„ „	26.	Juni	22 6·6	„	„	„ „
☾	74	„ „	21.	December	20 31·6	„	„	„ partiell,
☉	75	„ „	5.	Jänner	2 17·0	„	„	„ total,
☾	75	„ „	1.	Juni	22 42·9	„	„	„ unmöglich.

Aus dieser Zusammenstellung ist ersichtlich, dass, da die Sonnenfinsterniss vom 22. Juli 73 nur im östlichen Europa gesehen werden konnte, eine Aufeinanderfolge einer bedeutenden Sonnenfinsterniss auf eine Mondfinsterniss innerhalb 15 Tagen in dem gedachten Zeitraume für Rom nur zweimal möglich war, und zwar ist dies der Fall bei

der Mondfinsterniss 71. März 4
und der Sonnenfinsterniss 71. „ 19,
der Mondfinsterniss 74. December 21
und der Sonnenfinsterniss 75. Jänner 5.

Der Gang der Centralitätszone der Sonnenfinsterniss vom 19. März 71 ist schon unter Nr. 5 angegeben worden; danach konnte die Finsterniss in Rom immerhin noch beträchtlich sein, ich finde als Maximum

9·88 Zoll

um $22^h\,15^m6$ w. Zt., also gegen Mittag. Die zugehörige 15 Tage früher eintretende Mondfinsterniss begann in Rom um $7^h\,54^m$, endete um $10^h\,7^m$ m. Zt. und hatte eine Grösse von

5·05 Zoll.

Die Zone der zweiten in Frage kommenden Sonnenfinsterniss vom 5. Jänner 75 geht, wie aus den ebenfalls unter Nr. 5 mitgetheilten Zahlen erhellt, über Numidien, Süditalien, Illirien,[1] so dass die Erscheinung in Rom auffallend genug bleibt; die Grösse daselbst beträgt um $3^h\ 18^m$ w. Zt.

11·24 Zoll.

Die ihr um 15 Tage vorangehende Mondesfinsterniss vom 21. December 74 begann in Rom um $19^h\ 26^m$ m. Zt., endete um $21^h\ 56^m$ und betrug

5·11 Zoll.

Wie schon Zech[2] gegen die zweite Mondesfinsterniss geltend gemacht hat, findet dieselbe für Rom so zeitlich (kurz vor Sonnenaufgang) statt, dass es nicht sehr wahrscheinlich ist, als dass sie allgemein hätte bemerkt werden müssen. Die ersten beiden Finsternisse fallen dagegen ganz in die Zeit bürgerlicher Thätigkeit: um Mittag und Abends. Im Widerspruche mit der Annahme des Jahres 71 als Beobachtungsjahr beider Finsternisse scheint nur der Schluss der Stelle bei Plinius zu stehen, nachdem in diesem Jahre Vespasian zum dritten Male Consul war und dasselbe gleichzeitig mit Coccejus Nerva bekleidete. Wie aber Zech gleichfalls schon wahrscheinlich gemacht hat, rührt der Zusatz „filio iterum" von einem Abschreiber her und ist richtig nur „imp. Vespasianis cons. III." zu lesen.

Ist aber die letztere Lesart die richtige und somit die Sonnenfinsterniss vom 19. März 71 mit der Mondfinsterniss vom 4. März 71 als die von Plinius erwähnte Erscheinung zu betrachten, so ergibt sich weiters, dass die Plinius'sche Sonnenfinsterniss auch mit jener des Plutarch identisch ist, ein Schluss,

[1] Hofmann (Progr. II, pag. 12) behauptet, dass diese Finsterniss in Rom gar nicht sichtbar sein könne und dass bei Zech [der diese Finsterniss ebenfalls berechnet hat] ein Fehler liegen müsse. Die Finsterniss falle zwischen den südlichen Wendekreis und den Äquator. Dieser Bemerkung gegenüber kann ich Zech's Ergebniss nur bestätigen: die aus den Oppolzer'schen Tafeln resultirende Rechnung ergibt mit den gegen die gewöhnliche Form der Bestimmungsstücke gänzlich veränderten Finsternisselementen, wie oben ersichtlich ist, die Centralitätszone direct nach Italien fallend und für Rom eine Grösse von 11·24 Zoll.

[2] L. c. pag. 52.

der, so viel mir bekannt ist, hier zum ersten Mal gezogen wird und der nur von der Richtigkeit der Zech'schen Lesart abhängt.

Der Zeitfolge nach müssen hier noch zwei Sonnenfinsternisse erwähnt werden, die in die Länder des Mittelmeeres fallen und über die noch keine Überlieferung gefunden worden ist.

Die erste ist die ringförmige Finsterniss vom 9. März 80 n. Chr.; ihre Centralitätszone ist folgende:

Nördliche Curve		Südliche Curve	
$\lambda = 27°1$ v. Par.	$\varphi = +32°1$	$\lambda = 27°3$ v. Par.	$\varphi = +31°4$
30·6	32·9	30·8	32·2
34·0	33·8	34·2	33·2
37·2	34·9	37·4	34·3
40·4	36·1	40·5	35·5
43·4	37·5	43·6	36·9
46·4	39·0	46·6	38·4
49·4	40·6	49 6	40·0

Die Finsterniss ist dieselbe, welche unter dem 5. Jahr des Kaisers Tschang-ti erwähnt wird, und sollte nach der vorstehenden Zone in den Vormittagsstunden in Unterägypten und Palästina auffallend gewesen sein.

Die zweite Finsterniss ist die totale vom 26. December 83 n. Chr., welche, wie die folgende Zone zeigt, ebenfalls in Ägypten und Palästina, aber am Nachmittag stattgefunden hat:

Nördliche Grenze		Südliche Grenze	
$\lambda = 7°4$ v. Par.	$\varphi = +25°1$	$\lambda = 7°3$ v. Par.	$\varphi = +23°7$
10·4	25·4	10·3	24·1
13·6	26·1	13·4	24·7
16·8	26·9	16·7	25·5
20·2	27·9	20·0	26·7
23·8	29·2	23·6	28·0
27·5	30·7	27·3	29·5

7. Die fragliche Finsterniss des Apollonius.

Philostratus berichtet in der früher genannten Schrift aus dem Leben des Apollonius von Tyana folgende Begebenheit:

VIII c. 23, p. 365.

περὶ δὲ τὸν χρόνον, ὃν τῇ Ἑλλάδι ἐνεσπούδαζεν, ἐπεῖχε τὸν οὐρανὸν διοσημία τοιαύτη.

τὸν τοῦ ἡλίου κύκλον περιελθών στέφανος ἐοικὼς ἴριδι τὴν ἀκτῖνα ἠμαύρου. ὅτι μὲν δὴ ἐς νεώτερα ἡ διοσημία ἔφερε, δῆλα ἦν πᾶσιν, ὁ δ' ἄρχων τῆς Ἑλλάδος καλέσας αὐτὸν ἐξ Ἀθηνῶν ἐς Βοιωτίαν „ἀκούω σε", εἶπεν „Ἀπολλώνιε, σοφὸν εἶναι τὰ δαιμόνια" ....

In der Zeit, die er für Griechenland verwendete, geschah am Himmel folgendes Wunder:

Ein einem Regenbogen vergleichbarer Kranz, der sich um die Sonnenscheibe herumlegte, verminderte ihr Licht. Alle sahen ein, dass das Wunder auf etwas Neues hindeute; der Statthalter von Griechenland rief ihn (Apoll.) aus Athen nach Böotien und sprach: „Ich höre, o Apollonius, dass du in übernatürlichen Dingen erfahren bist" ....

Apollonius domicilirte, wie aus Cap. 24 hervorgeht, damals zwei Jahre in Griechenland, reiste dann sammt seiner Schule nach Jonien und hielt sich in Smyrna, Ephesus und anderen Städten auf. Da im darauffolgenden Cap. 25 schon die Ermordung Domitian's erzählt wird mit den Worten: „Die Götter stiessen schon Domitian von der Herrschaft über die Menschen", so fällt das Phänomen vor das Jahr 96 (18. Sept.); überdies wurde dasselbe, wie aus der citirten Stelle klar ist, in Griechenland (wahrscheinlich Böotien) bemerkt, und es würde sich also, wenn die Erzählung eine Finsterniss betrifft, um die Aufsuchung einer in Griechenland sichtbaren, kurz vor dieses Datum fallenden Sonnenfinsterniss handeln. Aber eine solche ist nicht möglich. Eine einzige Finsterniss, die vom 3. August 91, wäre in Spanien sichtbar; eine andere vom 21. Mai 95, der Zeit nach wahrscheinlicher, fällt nach China, Vorderindien, und kommt, weil sie für Griechenland verschwinden muss, gar nicht in Betracht. Struyck findet die Grösse dieser Finsterniss für Ephesus 1 Zoll, Apollonius aber befand sich, wie die citirte Stelle zeigt, nicht in dieser Stadt, sondern zu Athen. Das in Rede stehende Phänomen mag wie immer gedeutet werden, eine Erklärung desselben als Sonnenfinsterniss ist von Seite der Rechnung ganz unzulässig.

8. Sonnenfinsterniss nach Nerva's Tod.

Pseudo-Aurel. Victor erzählt von einer beim Tode des Kaisers Nerva (96—98 n. Chr.) stattgefundenen Sonnenfinsterniss:

epit. XII. 12.

eoque die, quo (Nerva) interiit, solis defectis facta est. .... An dem Tage, wo er (Nerva) starb, wurde die Sonne verfinstert.

An dem Todestage Nerva's, der auf den 17. Jänner 98 n. Chr. festgesetzt wird, ist überhaupt keine Finsterniss möglich. In das Jahr 96 fallen nur zwei Finsternisse, die beide in Amerika sichtbar sind, im Jahre 97 ist keine grössere Sonnenfinsterniss vorhanden, im Jahre 98 zwei, deren eine in den grossen Ocean fällt, während die andere (21. März 98) in Nordamerika, Island und gegen Sonnenuntergang in Norwegen sichtbar wird. Es hat somit nur die letztere Finsterniss einige Wahrscheinlichkeit für den in Rede stehenden Fall und würde 63 Tage nach Nerva's Tode, oder, wenn derselbe auf Ende Januar gesetzt wird, wie Petavius, Lambert u. A. thun, 50 Tage nach Nerva fallen. Wie man aus der Verbindung der unter Nr. 113, Verz. II angegebenen drei Hauptpunkte der Centralität ersieht, muss die Finsterniss aber für Rom so unauffällig bleiben, dass auf eine Wahrnehmung derselben kaum geschlossen werden darf. Struyck findet in der That für Rom nur 3 Zoll. Es bleibt somit die Finsterniss ziemlich zweifelhaft.

Seyffarth macht geltend, dass das Todesjahr Nerva's keineswegs sicher gestellt sei; wenn man nach Petavius annehme, dass Domitian im Jahre 97 gestorben sei und der Tod Nerva's 16 Monate später erfolgte, so falle letzterer in das Jahr 99 n. Chr. (Annahmen, welche Historiker kaum statthaft finden dürften): für diese Zeit bringt Seyffarth die Finsterniss vom 2. September in Beziehung. Nach meinem Ergebniss (Nr. 116, Verz. II) geht aber diese Finsterniss durch Centralafrika und ist in Rom noch unauffälliger, als die vom 21. März 98 n. Chr.

4.

Ich gelange endlich zur Behandlung der innerhalb des dieser Abhandlung zu Grunde gelegten Zeitabschnittes enthaltenen, in China gesehenen und historisch überlieferten Sonnenfinsternisse. Bekanntlich erfahren die älteren Beobachtungen der Chinesen seit langem eine besondere Berücksichtigung von Seite der Astronomie und es wird daher nur gerechtfertigt sein, wenn ich neben den römischen und griechischen Traditionen auch die

chinesischen Überlieferungen hier hervorhebe und mit der Rechnung vergleiche.

Die Aufschliessung des Textes ist, wie bei den römischen und griechischen Finsternissen, unmittelbar aus den Quellen geschöpft worden. Die Möglichkeit der Herstellung der chinesischen Überlieferung verdanke ich der freundlichen Mitwirkung des privatim mit dem Studium des Chinesischen höchst erfolgreich beschäftigten Herrn Franz Kühnert, Assistenten bei der österreichischen Gradmessung. Derselbe hatte nicht nur die Güte, die in Betracht kommenden Finsternisse sämmtlich in den chinesischen Originalien aufzusuchen und ins Deutsche zu übersetzen, sondern auch kritisch sorgfältig zu behandeln, ein Verdienst, welches in Betracht der oft genug Schwierigkeiten bietenden Textirungen wohl hier besonders hervorzuheben ist. In der That dürfte im Hinblick auf die Vollständigkeit der bei den einzelnen Finsternissen im Folgenden angesetzten Texte bei einer etwaigen neuerlichen Vergleichung dieser Finsternisse mit Rechnungsergebnissen ein Zurückgreifen auf die chinesischen Angaben ganz überflüssig werden.

Das Werk, welches Herrn Kühnert bei der Übersetzung vorlag, war das Heu-han-schu [1] oder Geschichte der späteren Han von Fan-ji; [2] besonders benützt wurde das Capitel Wu-hing-tschi [3] (Berichte über die Einflüsse der Elemente), das Capitel Ti-ki [4] (kaiserliche Aufzeichnungen) nur dort, wo es sich um die Feststellung besonderer Nachweise handelte. Die Auszüge betreffen die sämmtlichen Sonnenfinsternisse, deren während der Regierung der Kaiser Kuang-wu-ti, Ming-ti, Tschang-ti und Ho-ti (25—107 n. Chr.) irgendwie Erwähnung gethan wird. Ich gebe zuerst eine Übersicht der Finsternisse mit Ansetzung der chinesischen Zeitangaben:

---

[1] 後漢書
[2] 范曄
[3] 五行志
[4] 帝紀

I. Kaiser Kuang-wu-ti

1. Zweites	Jahr, erster	Monat, Tag:	kja-tszy	(Neumondstag)	
2. Drittes	„ fünfter	„ „	: ji-mao	(letzter Tag)	*
3. Sechstes	„ neunter	„ „	: ping-jin	(„ „)	*
4. Siebentes	„ dritter	„ „	: kuei-hai	(„ „)	*
5. Sechzehntes	„ dritter	„ „	: sin-tscheu	(„ „)	*
6. Siebzehntes	„ zweiter	„ „	: ji-wei	(„ „)	
7. Zweiundzwanzigstes	„ fünfter	„ „	: ji-wei	(„ „)	*
8. Fünfundzwanzigstes	„ dritter	„ „	: wu-schen	(„ „)	*
9. Neunundzwanzigstes	„ zweiter	„ „	: ting-szy	(Neumondstag)	*
10. Einunddreissigstes	„ fünfter	„ „	: kuei-jeu	(letzter Tag)	*
11. Zweiunddreissigstes	„ eilfter	„ „	: kja-tszy	(„ „)	*

II. Kaiser Ming-ti

1. Drittes	Jahr, achter	Monat, Tag:	shen-schen	(letzter Tag)	*
2. Achtes	„ zehnter	„ „	: shen-jin	(„ „)	*
3. Dreizehntes	„ zehnter	„ „	: kja-tschen	(„ „)	*
4. Sechzehntes	„ fünfter	„ „	: wu-wu	(„ „)	
5. Achtzehntes	„ eilfter	„ „	: kja-tschen	(„ „)	

III. Kaiser Tschang-ti.

1. Fünftes	Jahr, zweiter	Monat, Tag:	keng-tschen	(erster Tag)	
2. Sechstes	„ sechster	„ „	: sin-wei	(letzter Tag)	
3. Achtes	„ achter	„ „	: ji-wei	(„ „)	

IV. Kaiser Ho-ti.

1. Zweites	Jahr, zweiter	Monat, Tag:	shen-wu		
2. Viertes	„ sechster	„ „	: wu-sju	(erster Tag)	
3. Siebentes	„ vierter	„ „	: sin-hai	(Neumondstag)	
4. Zwölftes	„ siebenter	„ „	: sin-hai	(„)	
5. Fünfzehntes	„ vierter	„ „	: kja-tszy	(letzter Tag)	

Von diesen Finsternissen sind in Lambert's Tafel (Sammlung astr. Tafeln, unter Aufsicht der k. pr. Akad. Berlin 1776, 2. Bd.) nur die mit * bezeichneten aufgeführt.

Die Form, in welcher das Heu-han-schu über die Finsternisse berichtet, ist dieselbe, wie sie auch von den meisten anderweitigen chinesischen Annalen für die Erwähnung solcher Ereignisse gebraucht wird: den Beginn macht eine genaue Angabe des Regierungsjahres, Monats und cyklischen Tages, neben welcher die Bezeichnung der Mondstation, in der die Sonne am Tage der Finsterniss sich befand, Platz findet; hierauf folgen verschiedene Bemerkungen, die theils selbständige Notizen des Werkes, theils anderen historischen Berichten entlehnt sind.

Was zuerst die Zeitangaben des Heu-han-schu anbelangt, so lassen dieselben vermöge ihrer Correctheit ohne jede Unsicherheit die Übertragung auf das entsprechende Datum der julianischen Periode zu. Nur bei zwei Finsternissen bietet die Bestimmung des Datums einige Schwierigkeit; es stellt sich aber heraus, dass in beiden Fällen jene historisch erwiesene Monatsverschiebung, welche in der Ordnung der chinesischen Zeitrechnung unter der Tsin-Dynastie statt hatte und deren Beendigung unter Kuang-wu-ti angegeben wird, sich in einzelnen Provinzen noch bis in die Zeiten der späteren Kaiser[1] erhalten haben muss, ein Umstand, der für den mit chronologischen Untersuchungen beschäftigten Historiker nicht ohne Interesse sein wird. Zu wiederholten Malen gibt das Heu-han-schu das Datum der Finsternisse auch nach dem Ku-kin-tschu;[2] die bisweilen auftretende Abweichung der Angaben beider Werke findet sich in den Noten zu den einzelnen Finsternissen erklärt. Hervorzuheben ist aber hier, dass das Ku-kin-tschu in seinen Angaben um ein Jahr mehr zählt und dass überdies diesem Werke, wie aus der am Fusse

---

[1] Die erste dieser Finsternisse zeigt die Existenz dieser Monatsverschiebung noch im 13. Jahre des Kaisers Ming-ti, die zweite beweist das Vorhandensein einer solchen Zählung (wenngleich die Finsterniss für China unmöglich ist) im 8. Jahre Tschang-ti's.

[2] Das Ku-kin-tschu (古今注) [Neue Untersuchungen der Alterthümer] wurde unter der Han-Dynastie von Tsui-Pao verfasst, soll aber verloren gegangen und eine Neuverfassung, respective Erweiterung des Werkes im vierten Jahrhundert n. Chr. von Ma-kao vorgenommen worden sein. Die wahrscheinlichste Erklärung der oben berührten Eigenthümlichkeit des Ku-kin-tschu in der Jahreszählweise ist die, dass das Werk vermuthlich das Todesjahr eines Kaisers als das erste Regierungsjahr seines Nachfolgers betrachtet. Übrigens sind, worauf auch der Titel hinweist, jedenfalls die meisten Zeitangaben dieses Werkes nur Resultate von Rechnungen und keineswegs traditionelle Angaben, wie die meisten des Heu-han-schu. Wie nicht anders zu erwarten, erweisen sich in Folge dieser des historischen Commentars entbehrenden Rectification die Zeitangaben für Finsternisse als blosse, bisweilen mangelhafte Bestimmungen von Neumondseintritten oder als Finsternisse, die für China entweder ganz unsichtbar oder doch nur sehr unbedeutend sein mussten. — Es liegt somit ein Beweis für die schon längst über die älteren chinesischen Beobachtungen gemachte Behauptung vor, dass die Chinesen nicht selten Ergebnisse ihrer Rechnungen für Beobachtungen ausgegeben haben.

der vorhergehenden Seite angesetzten zweiten Note hervorgeht, hier nur eine untergeordnete Bedeutung beigelegt werden kann. Die Übertragung der chinesischen Zeitangaben auf die Aera der julianischen Periode wurde mittelst der Tafeln R. Schram's[1] vorgenommen, auf welche hier besonders aufmerksam gemacht werden soll.

Die auf die Zeitangaben folgende (beobachtete oder gerechnete?) Ortsbestimmung der Sonne zur Zeit der Finsternisse durch die Anführung der Mondstationen ist in dieser Abhandlung nur in ganz roher Weise mit der Rechnung verglichen worden: einestheils sind die Angaben für eine schärfere Vergleichung zu ungenau, anderntheils ist die Lage der Mondstationen, besonders aber die Abgrenzung derselben immer noch manchem Zweifel unterworfen. Die treffliche Arbeit Schlegel's[2] hat mir bei der Bestimmung der Sonnenorte als Grundlage gedient. Die von den Chinesen angegebenen Positionen sind in chinesischen Graden zu verstehen, von welchen $365\frac{1}{4}$ auf die Peripherie gehen. Die Bestimmung der Sonnenorte nach diesen Angaben bildet übrigens auch eine Controle für die Richtigkeit der Datumumsetzung. — Obwohl den chinesischen Mondhäusern im Allgemeinen nur eine astrologische Bedeutung zuzuerkennen ist, so deuten hier doch einige Stellen auf einen anderen und zwar geographischen Zusammenhang.[3] Ob diese Conjectur in ähnlicher Weise bei allen Mondstationen, wie die geographische Beziehung der „Häuser" und „Trigone" der mittelalterlichen europäischen Astrologie zu speciellen Territorien vorhanden ist, lässt sich im Hinblick auf unsere derzeit noch sehr unvollständige Kenntniss des Wesens der älteren chinesischen Sterndeutungskunde nicht entscheiden.

Die weiteren, die Berichte ergänzenden Bemerkungen des Heu-han-schu betreffen politische und sociale Ereignisse, sind

[1] Hilfstafeln für Chronologie. [Denkschriften d. k. Akad. d. W. zu Wien, Bd. 45.]

[2] G. Schlegel, Sing chen khao youen, Uranographie chinoise. La Haye, Leyde. 1875. II Vol.

[3] Beispiele für solche geographische Beziehungen der Mondhäuser zu Ortschaften und Provinzen finden sich bei den Finsternissen im dritten, zweiundzwanzigsten und einunddreissigsten Jahre Kuang-wu-ti's.

aber bisweilen rein astrologischer Natur und finden sich oft in wunderlicher Weise hinter einander gestellt. Der Herr Übersetzer hat bei der kritischen Sichtung des Textes dasjenige, was nicht im Zusammenhange mit den Finsternissen zu stehen schien, sogleich ausgeschieden. Manches, was solche Beziehungen verrieth, ist dagegen wiedergegeben worden, um dem Anspruch auf Vollständigkeit des die Erscheinung der Finsternisse betreffenden Textes zu genügen. Was in den Bemerkungen des Heu-han-schu vermisst wird, sind die Nachrichten über die näheren Umstände, unter welchen die Erscheinungen der Finsternisse stattfanden. Nur an einigen Stellen ist die ungefähre Tageszeit angegeben, die Schilderung des Eindruckes der Totalität oder sonst bedeutender Lichtabnahme fehlt fast ganz und muss mehr errathen werden. Auch mit den geographischen Angaben, in welchen Städten oder Provinzen die Finsternisse gesehen wurden, ist das Heu-han-schu sehr sparsam. Es ist selbstverständlich, dass in einem Werke, welches über die Geschichte der Dynastie berichtet, bei vielen Finsternissen erwähnt wird, ob dieselben in der Residenz gesehen wurden oder nicht, und es scheint, dass für die meisten Finsternisse der Wohnsitz des Kaisers als Hauptort betrachtet wird. Indessen wird in einigen Fällen auch von bedeutenden Finsternissen gesprochen, die in der damaligen Residenz nicht gesehen werden konnten und von denen also die Kunde durch die Berichte der Provinzialgouverneure in die Hauptstadt gelangt sein mag. Als Sitz der östlichen Han-Dynastie ist von 25 n. Chr. an die Stadt Lojang zu betrachten, für deren Coordinaten bei der Rechnung angenommen worden sind:

$$\lambda = 112°67 \text{ v. Gr.}$$
$$\varphi = +34·78$$

Ob Peking bei den Finsternissen des vorliegenden Zeitraumes überhaupt in Betracht gezogen werden dürfe, ist, da es damals als Residenz gar nicht bestand, mehr als fraglich. [1] Um so

[1] Ideler (Zeitrechnung der Chinesen, pag 43, Anmerkung 1) sagt über Peking das Folgende: Es existirte früher eine Stadt, welcher die Nebendynastie der Kiu im Jahre 1153 n. Chr. den Namen Tschung-tu (Residenz der Mitte) beigelegt hatte. Tschinghis-Chan zerstörte sie. Chubilaï (der Eroberer China's um 1260 n. Chr.) stellte sie wieder her und

eigenthümlicher ist das Verfahren Lambert's, der mehrere der in Rede stehenden Finsternisse für Canton und Peking berechnet und demnach die Quellen gar nicht berührt haben kann.

Die Anordnung der Rechnungsergebnisse ist bei den folgenden Finsternissen so getroffen, dass zuerst das umgesetzte Datum und die Zeit des Neumondes in mittlerer Zeit für den Meridian von Peking angegeben werden, letzteres aus dem Grunde, um gleich die ungefähre Tageszeit, zu welcher die betreffende Finsterniss etwa im eigentlichen China sichtbar sein konnte, übersehen zu können. Dann folgt die Art der Finsterniss, der chinesisch-deutsche Text mit commentirenden Noten am Fusse des Blattes. Für alle wichtigeren und mehr das eigentliche China treffenden Finsternisse sind die genauen Grenzcurven berechnet worden, innerhalb welcher die Erscheinung central gewesen sein muss. Diese Finsternisse sind, um sofort den Weg, den sie beschreiben, anschaulich zu machen, in die der Abhandlung beiliegende Karte (Taf. II) eingetragen, nur einige mehr ausserhalb des eigentlichen China fallenden Sonnenfinsternisse haben in der Karte keine Aufnahme finden können. Die Berechnung der grössten Phase, welche an einem bestimmten Orte überhaupt möglich war, habe ich überall, wo es der chinesische Text forderte, oder wo es mir sonst wünschenswerth schien, vorgenommen. Alle jene commentirenden Noten, welche sich auf den Text beziehen, sind mir von dem Herrn Übersetzer freundlichst zur Verfügung gestellt worden. Ich kann nicht umhin, Herrn Kühnert für die bedeutende Arbeit, die er mit der Herstellung der chinesischen Überlieferung gehabt hat, meinen besonderen Dank auszusprechen.

I. Finsternisse unter Kaiser Kuang-wu-ti.

1. Über eine im ersten Regierungsjahre Kuang-wu-ti's vorgefallene Finsterniss enthält das Heu-han-schu einen Nachweis

---

erbaute nahe dabei, nur 3 Li entfernt, eine neue Stadt Chan-baligh, d. i. königliche Stadt (dem heutigen Peking). Baligh ist eine Verkürzung des mongolischen balgassum, Stadt. Die Chinesen sagten dafür Tai-tu (grosse Residenz) oder Pe-king (Hof des Nordens), im Gegensatze zu Nan-king (Hof des Südens). Die gewöhnliche Benennung ist jetzt King-sse (die Hauptstadt).

nur insofern, als es eine Stelle des Ku-kin-tschu anführt, welche besagt, dass die Nachricht von einer Verfinsterung der Sonne

古今注曰建武元 年正月庚牛朔日 有蝕之即更始三 年	am Neumondstage keng-wu im Anfangsjahre kjen-wu [1] vielleicht in das beginnende dritte Jahr abzuändern sei.

Diese Bemerkung, sowie der Umstand, dass das Ti-ki von einer fraglichen Finsterniss keine Erwähnung macht, beweist, dass im ersten Regierungsjahre Kuang's in China keine Finsterniss beobachtet worden ist.

2. Sonnenfinsterniss vom 6. Februar 26 n. Chr. ($3^h\ 25^m$ 3 m. Zt. Peking.) [Ringförmig.]

1.

建武二年正月甲 子朔日有蝕之在 危八度	Im zweiten Jahre Kjen-wu am Neumondstage kja-tszy des ersten Monats [2] fand eine Sonnenfinsterniss statt. Es war in (der Behausung) des Schicksals $8^{gr.}$ [3]

---

[1] Kjen-wu ist der Regierungsname des Kaisers in der ersten Zeit seiner Herrschaft.

[2] Die Umsetzung dieser Zeitangabe gibt das Datum 6. Februar 26 n. Chr.

[3] Die Mondstation 危 = Wei (Schicksal), gelegen im südlichen Theil des Pegasus, beginnt nach Schlegel vor α Aquarii und hat eine Ausdehnung von 15°40, scheint aber auch beträchtlich in das Gebiet der Station 虛 = Hju zu greifen. Demgemäss ist für 26 n. Chr. der Anfangspunkt = 305°7, also der Ort der Sonne nach der chinesischen Angabe: $AR = 313°7$. Die Rechnung aus den Elementen der Finsterniss gibt:

$$AR_{\odot} = 318°35$$
$$D = -16·26$$

2.

春秋潛潭巳云甲
子蝕有兵敵强臣
昭案

Im Tschun-ts'iu tsjen-tan pa[1] heisst es: Am Tage Kja-tszy der Finsterniss hatten die Truppen einen heftigen Kampf, der Beamte machte das Ereigniss bekannt.

3.

京房占曰北夷侵
忠臣有謀後大水
在東方

King-fang[2] der Vorausverkünder sagt: Die nördlichen Barbaren dringen ein, der Minister gebraucht eine Kriegslist, nachher grosses Wasser im Osten.[3]

4.

春秋漢含孳曰臣
子謀日乃蝕

Die Annalen der Residenz der Han berichten: Am Tage der Finsterniss machten Beamte und Volk ein Complott.

5.

是時世祖祖興天
下賊亂未除虛危
齊也賊張朮擁兵

Zu dieser Zeit begann der erste Ahnherr das Weltreich glücklich zu machen. Die Empörer aber stifteten Unruhen, sie waren noch nicht unterdrückt. Hju und Wei

---

[1] Die Bedeutung dieses Titels ist zweifelhaft. Nach der wörtlichen Übersetzung würde derselbe lauten: Geheime Annalen, sorgfältig gesammelt. Übrigens können darunter auch speciell die Annalen eines Districtes im Norden Hunans in der Gegend von Tschang-scha-fu am Tung-ting-See gemeint sein, was wahrscheinlicher.

[2] King-fang (1. Jahrhundert v. Chr.), Philosoph und Astronom, soll durch bedeutende Kenntnisse in der Wissenschaft des Ji-king und der Planetenbewegung hervorragend gewesen sein. Er wurde im Jahre 30 n. Chr. wegen geheimer Rechnungen, welche verboten waren, zum Tode verurtheilt. Die Eintheilung des Jahres in 72 Perioden (侯) wird ihm zugeschrieben.

[3] Unter Osten (Tung-fang = 東方) kann speciell das heutige Schan-tung verstanden sein.

諭降伏遣上齊操
稱叛復旋降許术
破迺中年五至王

sind gleichbedeutend.[1] Die Empörer dehnten sich schrittweise aus und besetzten mit Waffengewalt Tsi.[2] Man schickte einen Bevollmächtigten zu Hofe, damit man insgeheim durch ein Edict gestatte, dass die Truppen gegen die Rebellen aufgerufen würden. Als der Fürst im 5. Jahre ankam, da unterdrückte er (die Verschwörung).

Aus den mitgetheilten Stellen[3] geht hervor, dass die in Rede stehende Finsterniss in die Zeit bedeutender Aufstände fiel. Die Stellen 2 und 4 deuten darauf hin, dass die Verfinsterung der Sonne in jenen Landstrichen gesehen wurde, welche im Aufruhr begriffen waren. Über die Lage dieser Gegenden selbst gibt das Heu-han-schu keinen Aufschluss, nur könnte man nach 5 die Vermuthung wagen, dass die Revolte den Osten des Reiches nicht berührt habe. Ist diese Voraussetzung richtig und fand also die Finsterniss in dem westlichen Theile China's statt, so würde sie durch die folgenden Curven ihre Bestätigung finden, welche

---

[1] Diese Stelle hat einen rein astrologischen Sinn. Nach dem Historiographen Tschang-heng stehen die Stationen Hju und Wei dem Tode, dem Klagen und Weinen vor.

[2] Tsi-kuo ein grosser Theil der heutigen Provinz Schan-tung und Tschihli, Tsi-tscheu dagegen die alte Bezeichnung für ganz China. Was unter Tsi hier zu verstehen sei, ist demnach sehr zweifelhaft.

[3] Hieher gehört eigentlich noch die Erklärung, welche das Heu-han-schu von der Entstehung der Sonnenfinsternisse gibt. Entgegengesetzt der bei den ostasiatischen Völkerschaften und den Chinesen selbst gangbaren Auffassung der Sonnenfinsternisse als Kämpfe und Bedrohungen der Sonne durch mythische Thiere, werden hier die beiden sehr alten philosophischen Principien Jang und Jin herangezogen und die Finsternisse als das Resultat der Gegenwirkung dieser Principien betrachtet. Tu-ju (222—284 n. Chr.) gibt dagegen schon eine völlig richtige Erklärung: „Die Ursache einer Mondfinsterniss besteht darin, dass zur Zeit des Vollmondes das von der Sonne stammende Mondlicht aus der Ferne ausgetilgt werde. Kommen Sonne und Mond zusammen und verdeckt der Mond die Sonne, so ist dies die Ursache der Sonnenfinsterniss. Dass die Finsterniss allmälig beginnt und abnimmt, rührt daher, dass der Mond gehend die grösste Höhe erreicht, beim Herabsinken die leuchtende Sonnenscheibe frei wird u. s. w."

die Orte abgrenzen, in denen die Finsterniss central gewesen sein muss.

Nördliche Curve:		Südliche Curve:	
$\lambda =$ 74°5 v. P.	$\varphi = +31°8$	$\lambda =$ 74°5 v. P.	$\varphi = +31°3$
77·8	33·7	77·8	33·2
81·3	35·7	81·3	35·1
85·0	37·6	84·9	37·0
88·9	39·6	88·8	38·9
93·0	41·6	92·9	40·8
97·3	43·5	97·2	42·7
101·8	45·4	101·6	44·5

3. Sonnenfinsterniss vom 22. Juli 27 n. Chr. (21. Juli $21^h\ 27^m9$ m. Zt. Peking.) [Total.]

1.

三年五月乙卯晦
日有蝕之

Im dritten Jahre am letzten Tage ji-mao des fünften Monats war eine Sonnenfinsterniss. [1]

2.

潛潭巴日乙卯蝕
雷不行雪殺草不
長。
在柳十四度柳河
南也

Im Tsjen-tan-pa heisst es: Am Finsternisstage brachte das Gewitter den Schnee nicht zum Verschwinden, die todte Vegetation begann nicht zu sprossen.

Es war in der Behausung der Weide 14^{sr}, im Süden des Weidenstromes. [2]

---

[1] = 22. Juli 27 n. Chr.

[2] Mondstation 柳 = Liu (Weide) nach Schlegel im vorderen Theile der Hydra gelegen, 13°3 lang, endend vor α Hydrae. Ort der Sonne nach obiger Angabe $AR = 118°$, Rechnung $AR_\odot = 117°7$
$D = +21·2$.
Der Weidestrom (Liu-kjang) ist ein Zweig des Perlstromes in der Provinz Kuang-si. Im Süden desselben liegt die Präfectur Lieu-tscheu-fu mit der Hauptstadt Lieu-tscheu. Die Mondstation hat also hier neben ihrer astronomischen Bedeutung auch eine geographische Beziehung.

3.

時世祖在雒陽。謀
赤眉降賊樊崇發覺
作亂其七月
皆伏誅

Zu dieser Zeit war der Stammherr in Lojang. Die rothen Augenbrauen[1] unterwarfen sich. Der Empörer Fan-tschung forderte zur Rebellion auf, indem er im 7. Monate aussprengte, Alle seien enthauptet worden.

4.

古今注曰四年五
月乙卯晦日有蝕
之

In den neuen Untersuchungen der historischen Alterthümer heisst es: im 4. Jahre[2] am letzten Tage ji-mao des fünften Monats war eine Sonnenfinsterniss.

Die Grenzcurven für die Centralität sind folgende:

Nördlich:		Südlich:	
$\lambda = 111°7$ v. P.	$\varphi = +19°5$	$\lambda = 111°9$ v. P.	$\varphi = +17°4$
115·5	20·8	115·7	18·8
119·2	22·0	119·3	20·0
122·8	23·1	122·8	21·0
126·2	24·0	126·3	21·9
129·5	24·8	129·6	22·7
132·8	25·4	132·9	23·3

Die Finsterniss fand in den ersten Vormittagsstunden statt und muss für die Orte an der Südküste China's sehr bedeutend gewesen sein. Für die Stadt Lieu-tscheu südlich des Weidestroms ($\lambda = 109°$ v. Gr., $\varphi = +24°$) finde ich die grösste Phase, die daselbst gesehen werden konnte, $9^1/_2$ Zoll. Für Canton, welches der Centralitätszone noch bedeutend näher liegt, wird die Finsterniss natürlich viel auffallender, Lambert gibt sie auch für diese Stadt als total an.

---

[1] Insurgenten unter dem Führer Fan-tschung, der das nordwestliche China unsicher machte.

[2] Es ist Eingangs bemerkt worden, dass das Ku-kin-tschu in seinen Zeitangaben um ein Jahr mehr zählt.

4. Sonnenfinsterniss vom 14. November 30 n. Chr.

(13. November $20^h\ 35^m$ 6 m. Zt. Peking.) [Total.]

1.

六年九月丙寅晦日有蝕之

Im Verlaufe des sechsten Jahres am letzten Tage ping-jin des neunten Mondes fand eine Sonnenfinsterniss statt.[1]

2.

潛潭巴曰丙寅蝕久于多有故。京房曰有小早災

Im Tsjen-tan-pa heisst es: am Tage ping-jin dauerte die Finsterniss lange, denn es wurde viel (von der Sonne) aufgezehrt. Nach King-fang fand das Unglück am Himmel zeitlich Morgens statt.

3.

史官不見郡国聞。本紀都尉詡以聞

Die Geschichtsschreiber sahen nichts, die Hauptstadt hörte es nur. Eigentlich erzählt man, der Gouverneur der Hauptstadt hörte davon als von einer allbekannten Sache.

4.

在尾八度。朱浮上疏以郡縣(當)群陽騷動所致見(常)日

Das Ereigniss geschah in der Behausung des Schweifes 8gr.[2] Tschu-feu[3] begann seinen Bericht mit jenen Provinzen und Districten, in denen es sich zutrug, dass alles Licht vertrieben wurde, ging dann auf jene über, wo man das Ende sah und auf jene, bei denen es immer Tag war.[4]

[1] = 14. November 30 n. Chr.

[2] Mondstation 尾 = Wei, im südlichen Theil des Scorpion, beginnend mit ε Scorpii, Ausdehnung 19°1. Ort der Sonne nach obiger Angabe: $AR = 228°$, Rechnung: $AR_\odot = 227°55$

$D = -17·95$

[3] Ein Würdenträger unter den Han.

[4] Die im chinesischen Worttexte eingeklammerten Zeichen sind in der benützten Ausgabe des Heu-han-schu an diesen Stellen undeutlich.

Die Zone der Centralität dieser Finsterniss ist durch nachstehende Grenzen gegeben:

Nördliche Grenze:		Südliche Grenze:	
$\lambda = 109°5$ v. P.	$\varphi = +23°1$	$\lambda = 109°5$ v. P.	$\varphi = +22°1$
114·3	21·3	114·3	20·2
118·8	19·3	118·8	18·1
123·2	17·2	123·1	15·9
127·3	14·9	127·2	13·6
131·2	12·5	131·1	11·1
134·9	10·0	134·7	8·6
138·3	7·5	138·2	6·0

Die Finsterniss fällt demnach, wie die vorhergehende, in den Süden China's und ist in den Provinzen Kuang-si und Kuang-tung total. In ersterer Provinz muss sie zu Lieu-tscheu wenige Minuten nach Sonnenaufgang, an der Küste in den ersten Morgenstunden des 14. November bemerkt worden sein. Für Lieu-tscheu geht die Sonne um $6^h\ 10^m$ auf, der Beginn der Totalität fällt $6^h\ 22^m$, die Dauer derselben beträgt $2^m\ 29^s$ und die grösste Phase um $6^h\ 16^m$ m. Zt.:

12·05 Zoll.

Die Stelle 2 bestätigt den frühzeitigen Eintritt des Phänomens und mit den Angaben 3 und 4 steht das schon aus dem Gange der Centralitätszone erhellende Ergebniss in Übereinstimmung, dass die Finsterniss im Laufe des ganzen Vormittags den Süden China's berührte, für die Südprovinzen zum grössern Theile total, für das Flussgebiet des Hoang-ho und Jang-tzy-kjang partiell und für die Residenz Lojang nicht mehr auffallend gewesen sein muss.

5. Sonnenfinsterniss vom 10. Mai 31 n. Chr. (9. Mai $22^h\ 7^m$ 2 m. Zt. Peking.) [Ringförmig.]

1.

七年三月癸亥晦
日有蝕之

Im siebenten Jahre am letzten Tage kuei-hai des dritten Monats[1] trat eine Sonnenfinsterniss ein.

[1] = 10. Mai 31 n. Chr.

2.

潛潭巴日癸亥天
人崩。鄭興日頃
年日蝕每多在晦
行疾也君亢急臣
下促迫

Im Tsjen-tan-pa heisst es: Am Tage der Finsterniss ging der Himmelsmann[1] zu Grunde. Nach Tsching-hing[2] bestand das Unglück der Sonnenfinsterniss des heurigen Jahres darin, dass Viele in der Krankheit wandelten. Der Fürst zwang die aufständischen unglücklichen Beamten sich zu entfernen.

3.

在畢五度。畢爲
邊兵。秋隗鼂反
侵安定冬廬芳所
置朔方雲中太守
各舉郡降

Es war in der Behausung des Netzes 5gr. Das Gestirn Pi stellt die Grenztruppen vor.[3] Im Herbste kehrte Wei-Hjao[4] zurück, nachdem er in Ngan-ting eingefallen war. Im Winter befestigten sich die Lu, indem sie im Lande Jun[5] einen Prinzen aufstellten. Alle stiegen wieder in der Achtung, als sich die Provinz unterwarf.

Ferner enthält das Ti-ki die folgende bemerkenswerthe Stelle:

„Der Fürst verbarg sich am letzten Tage Kuei-hai, als die Sonne sich verfinsterte, in den innern Gemächern des Palastes. Er berief die Truppen ab, ohne das Weitere abzuwarten. Nach fünf Tagen verkündete er durch einen Erlass: ‘Durch meine Nichtbeachtung der Tugend habe ich das Himmelsunglück verursacht. Ich werde überlegen, warum wir Sonne und Mond

---

[1] 天人 = Tjen-shin steht hier für Chinese oder chinesisches Volk im Allgemeinen.

[2] Der Träger dieses Namens ist zweifelhaft.

[3] Das Haus des Netzes 畢 = Pi wird gebildet durch die Hyaden, beginnt mit ε Tauri und umfasst 17°4. Ort der Sonne nach obiger Angabe: $AR = 43°$, Rechnung: $AR_{\odot} = 43°5$
$D = +16·8$

[4] Ein Competent von Kuang-wu-ti um die Herrschaft China's. Seine Macht behauptete er mehrere Jahre im westlichen China.

[5] Das seenreiche Gebiet nördlich vom Jang-tszy-Flusse

zitternd, mit Entsetzen und erschreckt durch den Himmel gesehen haben.'"

Die Finsterniss gehört zu den bedeutendsten, die in China gesehen worden sind, fällt in die bevölkertsten Theile des Reiches und muss die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben. Die Centralitätszone ist folgende:

Nördliche Curve:		Südliche Curve:	
$\lambda = 110°9$ v. P.	$\varphi = +25°5$	$\lambda = 111°6$ v. P.	$\varphi = +23°5$
113·7	28·3	114·3	26·3
116·3	31·0	116·9	29·0
118·9	33·6	119·5	31·7
121·5	36·2	122·1	34·3
124·2	38·6	124·7	36·7
126·9	40·8	127·4	39·0

Für Lojang ergibt sich die grösste Phase:

$9^h\ 14^m$ w. Zt. Morgens
$9^7/_{10}$ Zoll.

Ideler[1] bemerkt, dass die Finsterniss zu Lojang zwar nicht total gewesen sein kann, wie Couplet (Tab. chronol. pag. 38) angibt, aber so beträchtlich, dass sie der allgemeinen Aufmerksamkeit nicht entgehen konnte. Ideler citirt auch Kirch (Miscell. Berol., T. II, pag. 133), nach welchem sie zu Peking um 9^h Vormittag eingetreten sei und $6^7/_{10}$ Zoll betragen habe. Meine Rechnung gibt für die Sichtbarkeit zu Peking die Zeit der grössten Phase

$9^h\ 15^m$ w. Zt.
9·34 Zoll.

Die Finsterniss würde, um sie für Lojang total zu machen, ziemlich starke Änderungen an der Mondbahn bedingen, wozu aber keine hinreichenden Gründe vorhanden sein dürften, da aus der Stelle des Ti-ki nicht recht klar ist, ob die Verfinsterung eine vollständige war. Auch bleibt es etwas zweifelhaft, ob als Beobachtungsort die Stadt Lojang anzusehen ist, obwohl in der Erzählung von einem „Palaste" gesprochen wird.

[1] Zeitrechnung der Chinesen.

6. Sonnenfinsterniss vom 30. April 40 n. Chr. (29. April 18^h 6^m 5 m. Zt. Peking.) [Partiell.]

1.

十六年三月辛丑
晦日有蝕之

Im sechzehnten Jahre am Tage sin-tscheu, dem letzten des dritten Monats[1] verfinsterte sich die Sonne.

2.

潛潭巴曰辛丑日
蝕壬疑王

Im Tsjen-tan-pa heisst es: Am Tage der Finsterniss fürchtete sich der Fürst zu regieren.

3.

在昴北度昴爲獄
事時者郡太守坐
度田不實世祖怒
殺十餘人然後深
悔之

Es war in der Behausung der untergehenden Sonne 7^{gr}. Das Gestirn Mao stellt die Gerichtsbarkeit vor.[2] Der Präfect der Hauptstadt war (in seiner Pflichterfüllung) nachlässig, denn er vermass das Land nicht sorgfältig. Der Fürst tödtete im Zorne bei zehn Menschen, bereute es aber später sehr.

Diese Finsterniss ist nach den Oppolzer'schen Tafeln nur eine partielle. Ich finde für die Residenz Lojang die Zeit der grössten Phase

$4^h\ 55^m$ w. Zt.
6·84 Zoll.

Der Kaiser mag von dieser Finsterniss durch sein mathematisches Collegium im Voraus Kunde gehabt haben und, eingedenk der neun Jahre vorher stattgefundenen grossen Finsterniss, in Furcht gerathen sein, wie die Worte des Tsjen-tan-pa besagen.

---

[1] = 30. April 40 n. Chr.

[2] Das ziemlich unbestimmte Mondhaus 昴 = Mao (untergehende Sonne) geht dem „Netz" voran, umschliesst die Plejaden und hat ein Intervall von 11°3. Ort der Sonne nach obiger Angabe: $AR = 34°2$, Rechnung:

$$AR_\odot = 34°7$$
$$D = +14·0$$

7. Sonnenfinsterniss vom 19. April 41 n. Chr.

(19. April $1^h\ 1^m$ 1 m. Zt. Peking.) [Ringförmig-total.]

1.

十七年二月乙未晦日有蝕之

Am letzten Tage ji-wei des zweiten Monats im siebzehnten Jahre[1] war eine Sonnenfinsterniss.

2.

潛潭巴曰乙未蝕天下多邪氣孿孿若若

Nach dem Tsjen-tan-pa wurde am Tage der Finsterniss ji-wei das Weltreich viel durch schlechte Luft geplagt, eine an sich alte Plage.

3.

在胃九度胃爲廩倉

Es trug sich in der Behausung des Getreidewächters bei 9gr zu. Wei stellt die öffentlichen Kornböden vor.[2]

Im Weitern berichtet das Heu-han-schu von Hungersnoth. Die Finsterniss fällt in den Süden China's und die Grenzcurven ihrer Centralität sind:

Nördliche Curve:		Südliche Curve:	
$\lambda =$ 96°1 v. P.	$\varphi = +22°8$	$\lambda =$ 96°1 v. P.	$\varphi = +22°3$
98·8	24·1	98·9	23·6
101·6	25·2	101·6	24·8
104·5	26·3	104·5	25·9
107·4	27·3	107·4	26·8
110·4	28·1	110·5	27·7
113·4	28·9	113·4	28·5

[1] = 19. April 41 n. Chr.

[2] Station 胃 = Wei (Getreidewächter) wird von dem Sternbilde der Fliege gebildet und nimmt seinen Anfang im 3[illegible] Ceti. Intervall 15°6. Ort der Sonne nach Obigen: $AR =$

$AR_\odot =$ 24[illegible]

$D = +1$[illegible]

8. Sonnenfinsterniss vom 22. Juli 46 n. Chr. (21. Juli 22^h 11^m 3 m. Zt. Peking.) [Total.]

1.

乙月之五蝕年有二日十晦二未

Im zweiundzwanzigsten Jahre am Tage ji-wei, dem letzten des fünften Monats[1] verfinsterte sich die Sonne.

2.

也穀爲都祀鬼京祭輿度倉鬼乜上輿柳爲近廟在柳也宗

Es fand in der Behausung der Weide bei 7gr und in der kaiserlichen Residenz statt.[2] Das Gestirn Liu stellt das oberste Magazin für das Opfergetreide vor. Nahe dabei ist ju-kuei. Ju-kuei stellt die Ahnenhalle vor.

3.

秦㠯所祫遂心闕司廟處廟年墮有有四廟高三簡道中帝詔就此有之也年近有且至廟宗象九立之定之立祖示十請祭末祭不奉故

Im 19. Jahre haben die Minister mittelst eines Memorandums aufgefordert, zu dem vom Kaiser festgesetzten Zeitpunkte in allen Tempeln zu opfern. Es wurde auch verordnet, dass jene Orte, wo noch kein Tempel errichtet ist, im hohen Tempel gemeinsam opfern. Die gemäss dessen bis zum dritten Jahre noch keinen Tempel errichteten, haben durch diese lässige Handlung ihr Herz (mit Schuld) belastet. Damit sie den Weg der Vorfahren wandeln, erschien zum Beweise ihrer Schuld dieses Wahrzeichen.[3]

---

[1] = 22 Juli 46 n. Chr.

[2] „Kaiserliche Residenz" würde nach dem jetzigen Sprachgebrauche Peking bedeuten, doch kann im vorliegenden Falle wohl nur Lojang darunter verstanden sein. — Ort der Sonne in der Weide: $AR = 111°5$, Rechnung:

$$AR_{\odot} = 118°12$$
$$D = +21·15$$

[3] Diese Stelle bezieht sich auf die Sitte der gemeinsamen Opfer, hja genannt, welche alle drei Jahre abgehalten wurden.

Die Finsterniss fällt ausser des Bereiches der dieser Abhandlung beigegebenen Karte. Die grösste Phase für Lojang ist um $20^h\ 30^m$ w. Zt. nur

1·93 Zoll.

9. Sonnenfinsterniss vom 20. Mai 49 n. Chr.
(20. Mai $4^h\ 37^m$ 3 m. Zt. Peking.) [Ringförmig.]

1.

二十五年三月戊申日有蝕之

Am letzten Tage wu-schen des dritten Monats im 25. Jahre[1] verfinsterte sich die Sonne.

2.

潛潭巴曰戊申蝕
地動猶侵兵强一
口主兵弱諸侯强
在畢十五度畢爲
邊兵

Im Tsjen-tan-pa heisst es: Am Tage wu-schen war eine Sonnenfinsterniss, die Erde bebte, die Invasionstruppen waren gewaltsam, man sagt, die kaiserlichen Truppen hätten grausam alle Edelleute getödtet. — Es war in der Behausung des Netzes bei 15er. Das Gestirn Pi stellt die Grenztruppen vor.[2]

3.

古今注曰二十六
年二月戊子日有
蝕之盡

Nach dem Ku-kin-tschu verfinsterte sich im 26. Jahre am Tage wu-tszy des zweiten Monats[3] die Sonne vollständig.[4]

---

[1] = 20. Mai 49 n. Chr.

[2] Ort der Sonne im Netze: $AR = 53°7$, Rechnung: $AR_\odot = 54°09$
$D = +19·57$

[3] Die Zeitangabe des Ku-kin-tschu gäbe, wenn man berücksichtigt, dass dieses Werk um ein Jahr mehr zählt, den 30. oder 25. April 49 n. Chr. und ist jedenfalls entweder durch Abschreib- oder Druckfehler entstellt, oder ist auf einen Fehler zurückzuführen, der von Tsui-Pao bei der Revidirung der historischen Daten begangen wurde.

[4] Das Zeichen 盡 = tsin wurde hier mit „vollständig" übersetzt, heisst aber eigentlich ausschöpfen, erschöpfen, in Verbindung mit 食 aufzehren und deutet somit unzweifelhaft auf Totalität der Finsterniss.

Im Weitern wird noch von Kämpfen gegen die barbarischen Völkerschaften des südlichen China berichtet. Die Zone der Centralität ist durch folgende Curven gegeben:

Nördliche:		Südliche:	
$\lambda =$ 81°6 v. P.	$\varphi =$ +49°0	$\lambda =$ 81°3 v. P.	$\varphi =$ +47°4
85·6	48·6	85·3	47·0
89·6	48·1	89·3	46·4
93·8	47·4	93·4	45·6
98·1	46·5	97·8	44·7
102·4	45·5	102·0	43·6
106·8	44·5	106·4	42·4
111·4	43·0	110·9	41·0
116·0	41·5	115·7	39·4

Da nach den Worten des Ku-kin-tschu auf eine totale Verfinsterung der Sonne geschlossen werden darf, habe ich die grösste Phase für Lojang gerechnet:

$6^h\ 20^m$ w. Zt.
9·43 Zoll.

Für Peking wäre, wie man aus der Karte ersieht, die Verfinsterung viel bedeutender.

10. Sonnenfinsterniss vom 9. März 53 n. Chr. (8. März $21^h\ 36^m$ 5 m. Zt. Peking.) [Ringförmig-total.]

1.

二十九年二月丁巳朔日有蝕之

Am ersten Tage ting-szy des zweiten Monats im neunundzwanzigsten Jahre[1] verfinsterte sich die Sonne.

2.

潛漳巴日丁巳蝕下有敗兵。在東

Im Tsjen-tan-pa heisst es: Am Tage ting-szy wurde das Heer vernichtet. Es war in der östlichen

[1] = 9. März 53 n. Chr.

壁五度東壁爲文章一名娵訾之口

Mauer, 5sr.[1] Tung-pi stellt die Literaten vor, man nennt dasselbe auch Mund des Tsu-tszy.

Die weiteren Ausführungen des Heu-han-schu gipfeln vornehmlich in dem Satze, dass „der Himmel dieses Zeichen" desshalb geschickt habe, weil in der Gesetzgebung und deren Ausübung Ungerechtigkeiten begangen worden seien.

Die Finsterniss muss an der Süd- und Ostküste des Reiches bedeutend gewesen sein. Die Centralitätszone ist:

Nördliche Curve:		Südliche Curve:	
$\lambda = 119°6$ v. P.	$\varphi = +23°0$	$\lambda = 119°7$ v. P.	$\varphi = +22°6$
122·5	25·1	122·6	24·7
125·2	27·5	125·3	27·1
127·8	30·1	128·0	29·7
130·4	33·0	130·5	32·5
133·0	35·9	133·1	35·5
135·6	39·0	135·7	38·5
138·4	42·2	138·5	41·7

Zu Lojang ist die Finsterniss unbedeutend, in Canton, für welches Lambert 11·1 Zoll angibt, aber höchst auffallend.

11. Sonnenfinsterniss vom 13. Juli 55 n. Chr.
(12. Juli $21^h\ 47^m$ 4 m. Zt. Peking.) [Total.]

1.

三十一年五月癸酉晦日有蝕之

Am letzten Tage kuei-jeu des fünften Monats im einunddreissigsten Jahre[2] war eine Sonnenfinsterniss.

---

[1] 壁 = Pi (Mauer) hat als Hauptsterne α Androm. und γ Pegasi, Intervall 8°6. Ort der Sonne nach obiger Angabe: $AR = 345°$, Rechnung

$$AR_\odot = 347°85$$
$$D = -5·28$$

[2] = 13. Juli 55 n. Chr.

2.

潛潭巴日癸酉蝕
連陰不解淫雨毀
山有兵

Im Tsjen-tan-pa heisst es: Am Tage kuei-jeu der Finsterniss öffnete sich der bedeckte Himmel nicht; grosser Regen zerstörte die Berge, es gab Kämpfe.

3.

在柳五度京都宿
也自二十一年亓
象至此十年後二
年宮車晏駕

Es war in der Station der Weide 5gr, im Bereiche der Hauptstadt.[1] Seit dem Erscheinen des Wahrzeichens im 21. Jahre bis zu diesem sind zehn Jahre verflossen. Zwei Jahre später stieg der Palastwagen zum Himmel.[2]

Die Finsterniss fällt nicht mehr in den Bereich der Karte und hat ihrem Curvenzuge nach viel Ähnlichkeit mit der Finsterniss Nr. 8, welche in der vorstehenden Stelle des Heu-han-schu erwähnt wird. Für Lojang würde sie, wenn auch bedeutender als die vom Jahre 46, doch nicht so auffallend werden, dass sie die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich hätte ziehen können.

12. Sonnenfinsterniss vom 25. December 56 n. Chr. (25. December 0^h 29^m 3 m. Zt. Peking.) [Total.]

1.

中元元年十一月
甲子晦日有蝕之

Im Anfangsjahre tschung-juen[3] am letzten Tage kja-tszy des elften Monats[4] fand eine Sonnenfinsterniss statt.

---

[1] Ort der Sonne in der Weide: $AR = 109°$ Rechnung:

$$AR_\odot = 108°74$$
$$D = +22·57$$

Die Stelle „im Bereiche der Hauptstadt" lässt mehrfache Deutungen zu, so die Übersetzung: „in der Hauptstadt war es zeitlich". Jedenfalls ist die Erwähnung der Hauptstadt hier nicht als wichtige Ortsbestimmung der Finsterniss zu betrachten.

[2] Die wahrscheinlichste Bedeutung dieses mystischen Satzes wäre die Beziehung auf den Tod Kuang-wu-ti's.

[3] = 32. Jahr Kuang-wu-ti's.

[4] = 25. December 56 n. Chr.

2.

在斗二十度斗爲
廟主爵祿儒說十
一月甲子時王日
也又爲星紀主祿
其占重

Es war im Gemache des Scheffels 20gr. Teu stellt den Ahnentempel vor und repräsentirt auch die Entschädigungen.[1] Die Gelehrten[2] sagen, der Tage kja-tszy des elften Monats war ein Tag des Herrn. Da das warnende Gestirn[3] der Entschädigung vorsteht, so ist dieses Zeichen gewichtig.

Die Centralitätszone der Finsterniss ist folgende:

Nördliche Grenze:		Südliche Grenze:	
$\lambda = 104°6$ v. P.	$\varphi = +16°3$	$\lambda = 104°7$ v. P.	$\varphi = +15°5$
107·4	16·9	107·4	16·2
110·2	17·8	110·2	17·1
113·0	18·9	113·0	18·2
115·9	20·2	115·9	19·5
118·9	21·7	118·9	21·0

Für die südlichen Küstenstädte wird die Erscheinung bedeutend gewesen sein.

II. Finsternisse unter Kaiser Ming-ti.

1. Sonnenfinsterniss vom 13. October 60 n. Chr. (13. October $2^h\ 32^m\ 7$ m. Zt. Peking.) [Ringförmig.]

1.

明帝永乎三年八
月壬申晦日有蝕
之

Im dritten Jahre während des Regierungsprädicates Jung-ping des Kaisers Ming-ti fand am letzten Tage shen-schen des achten Monats[4] eine Sonnenfinsterniss statt.

---

[1] Station 斗 = Teu (Scheffel) im centralen Theile des Schützen, Intervall 25°2. Ort der Sonne: $AR = 272°$, Rechnung: $AR_{\odot} = 273°01$
$D = -23·66$

[2] Anhänger des Kung-fu-tszy.

[3] Sing-ki, ein Theil der Ekliptik, umfasst die beiden Stationen Teu und Niu, für welch' letztere es auch synonym gebraucht wird, und begreift das Sternbild des Stieres.

[4] = 13. October 60 n. Chr.

2.

蝕申壬日巴潭潛
翔欲陰濛陽滅水

Im Tsjen-tan-pa heisst es: Am Tage der Finsterniss war eine Überschwemmung, das Licht (Jang) wurde geschwächt, die Finsterniss (Jin) trachtete sich emporzuschwingen.

3.

宿氐爲氐度二氐在
北作帝明時是宮
宮

Es war in der Station des Fundamentes, 2sr. Ti stellt den kaiserlichen Palast vor.[1] Zu dieser Zeit erschien Ming-ti im nördlichen Palaste.

4.

河覺不者侯師京
一十三國郡尹南
寅庚月六年六上
雒時之日有蝕晦
陽見不者侯陽

Der Inspector der Hauptstadt hatte die obersten Leiter der einunddreissig Gebiete und Fürstenthümer im Süden des Stromes nicht früher verständigt. Am letzten Tage keng-jin des sechsten Monats während des sechsten Jahres verfinsterte sich die Sonne; damals sah der Gouverneur von Lojang nichts.[2]

---

[1] Station 氐 = Ti (Fundament) in der Wage, beginnend mit α Librae, Intervall 16°3. Ort der Sonne: $AR = 198°2$, Rechnung: $AR_{\odot} = 197°11$
$D = -7·35$

[2] Die Stelle 4 ist im Ku-kin-tschu enthalten. Unmittelbar vorher erwähnt dieses Werk, dass „am Tage ping-jin des 8. Mondes im 4. Jahre (60, August 8 oder 61, October 2) zum Beginne der Zeitperiode die Sonne sich nicht verfinsterte", dass aber „im 5. Jahre am Neumodstage ji-wei des 2. Monates" (61, März 5 oder 62, Feber 28) die Sonne sich verfinstert habe. Die erste dieser Finsternisse, welche allein als für diese Daten möglich annehmbar sind, ist Nr. 103 Verz. I, partiell, stattfindend am 2. October 61 um $2^h\ 36^m\ 7$ m. Zt. Peking. — Die zweite ist die ringförmig-totale Finsterniss vom 27. Feber 62 n. Chr., $19^h\ 22^m\ 9$ m. Zt. Peking (Nr. 56 Verz. II). Von dieser Finsterniss kann nur der Beginn an der chinesischen Ostküste, u. zw. bei Sonnenaufgang bemerkt worden sein. — Die am Schluss der Stelle 4 erwähnte Finsterniss (62, August 22. oder 63, August 17) ist unmöglich und dürfte das Resultat einer fehlerhaften Vorausbestimmung sein. Auch die erwähnten beiden Finsternisse sind ohne Zweifel das Ergebniss einer von Chinesen unternommenen Vorausbestimmung.

Die Zone der Centralität ist folgende:

Nördliche Curve:		Südliche Curve:	
$\lambda =$ 90°6 v. P.	$\varphi = +28°8$	$\lambda =$ 89°9 v. P.	$\varphi = +25°2$
93·2	27·4	92·5	23·8
95·9	26·2	95·1	22·6
98·7	25·1	97·9	21·5
101·6	24·1	100·7	20·5
104·6	23·3	103·7	19·7
107·7	22·6	106·8	19·0

Die Finsterniss fällt in den südlichen Theil China's und wird auch im gesammten Stromgebiete des Jang-tszy noch auffallend genug gewesen sein, um die Aufmerksamkeit auf sich zu lenken, womit die Stelle 4 übereinstimmt. Der Bericht des Tsjen-tan-pa muss ebenfalls aus einer der südlichen Provinzen stammen, denn nur in diesen kann das Phänomen so bedeutend gewesen sein, wie es das Werk schildert. Die Finsterniss ist dieselbe, welche Seyffarth mit der campanisch-armenischen identificirt.

2. Sonnenfinsterniss vom 16. December 65 n. Chr. (15. December $22^h\ 52^m$ 4 m. Zt. Peking.) [Total.]

1.

八年十月(古今注
日十二月)壬寅晦
日有蝕之旣

Im achten Jahre während des zehnten Monats (nach dem Ku-kin-tschu im zwölften Monat) am Tage shen-jin,[1] dem letzten, verfinsterte sich die Sonne vollständig.[2]

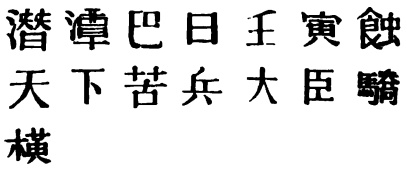
---

[1] = 16. December 65 n. Chr.

Das umgesetzte Datum des Ku-kin-tschu wäre 14. Februar 66, an welchem Tage eine Finsterniss ganz unmöglich ist.

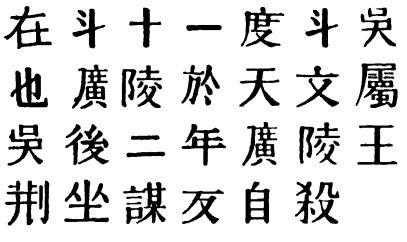
[2] Das Zeichen 旣 = ki bedeutet die Beendigung eines Mahles und wird gebraucht im Sinne „gänzlich, alles, erschöpfend etc.", findet in diesem Sinne gleich dem Zeichen tsin (s. Finsterniss Nr. 9, Kuang-wu-ti) Anwendung zur Bezeichnung der Totalität.

2.



Nach dem Tsjeu-tan-pa war am Tage shen-jin das Reich von Truppen bedrängt. Die hohen Beamten vertrauten unglücklicherweise auf sich selbst.

3.



Es war in der Behausung des Scheffels 11$^{gr.}$ Teu (bezeichnet) die Prahlerei (Wu).[1] Kuang-ling bezieht in der Astronomie Wu auf sich. Zwei Jahre später beschloss Kuang-ling als Fürst von King böswillig sich selber zu tödten.[2]

Die Zone der Centralität dieser Finsterniss ist folgende:

Nördliche Grenze:		Südliche Grenze:	
$\lambda = 110°3$ v. P.	$\varphi = +37°4$	$\lambda = 110°5$ v. P.	$\varphi = +36°2$
114·0	35·2	114·1	33·9
117·5	33·1	117·6	31·8
120·9	31·1	120·9	29·8
124·2	29·4	124·1	28·1
127·1	27·8	127·1	26·5
130·1	26·5	130·1	25·2

Da die Finsterniss nach dem Heu-han-schu zweifellos in der Hauptstadt höchst auffallend war, so habe ich die Sichtbarkeit für Lojang berechnet. Es findet sich die grösste Phase um

$21^h\ 47^m$ w. Zt.
11·59 Zoll.

---

[1] Ort der Sonne: $AR = 263°$, Rechnung: $AR_\odot = 262°53$
$D = -23·52$

[2] Wu = Prahlerei, Grossthuerei. Die weiter folgende Stelle dürfte kaum mehr als astrologischen Sinn haben.

3. Sonnenfinsterniss vom 23. September 70 n. Chr. (22. September $22^h\ 13^m$ 9 m. Zt. Peking.) [Ringförmig.]

1.

十三年十月(古今注日閏八月)甲辰晦日有蝕之

Im zehnten Monat des dreizehnten Jahres (nach dem Ku-kin-tschu der Schaltmonat nach dem achten) am Tage kja-tschen, dem letzten des Monats[1] verfinsterte sich die Sonne.

2.

在尾十七度

Es war in der Behausung des Schweifes, 17gr.[2]

Diese Finsterniss trifft mehr den nördlichen Theil China's, wie die folgenden Curven der Centralität zeigen:

Nördliche Curve:		Südliche Curve:	
$\lambda = 119°4$ v. P.	$\varphi = +33°7$	$\lambda = 119°3$ v. P.	$\varphi = +32°1$
122·8	31·9	122·6	30·3
126·0	29·9	125·8	28·3
129·0	27·8	128·8	26·1
131·9	25·4	131·6	23·8
134·6	22·9	134·3	21·3

Die Phase wird für Lojang noch sehr beträchtlich:

$20^h\ 32^m$ w. Zt.

10·86 Zoll.

4. Sonnenfinsterniss vom 23. Juli 73 n. Chr. (23. Juli $5^h\ 16^m$ 7 m. Zt. Peking.) [Total.]

1.

十六年五月戊午晦日有蝕之

Im sechzehnten Jahre am letzten Tage wu-wu des fünften Monats[3] war eine Sonnenfinsterniss.

---

[1] Dieses Datum gibt den 23. September 70 n. Chr. nur unter der Annahme, dass die Monatsverschiebung unter der Tsin-Dynastie auch noch theilweise unter den Han stattgefunden habe. (S. Bemerkung pag. 53.)

[2] Die Angabe der Mondstation ist hier gänzlich verfehlt.

[3] = 23. Juli 73 n. Chr.

2.

潛潭巴日戊午蝕
久旱穀不傷

Im Tsjen-tan-pa heisst es: Das zur Zeit der Finsterniss andauernd trockene Wetter verwüstete das Getreide nicht.

3.

在柳十五度儒說
五月戊午猶十一
月甲子也又宿在
京都其占重後二
歲宮車晏駕

Es war in der Behausung der Weide, 15gr.[1] Die Gelehrten sagen, der fünfte Monat wu-wu sei besser als der elfte kja-tszy. Ferner ist dieses Zeichen gewichtig, weil die Constellation in der kaiserlichen Hauptstadt statt hatte. Zwei Jahre später stieg der Palastwagen zum Himmel.[2]

Die Sichtbarkeit dieser den südwestlichen Theil China's treffenden Finsterniss beträgt für Lojang um $6^h\ 11^m$ w. Zt.

9·63 Zoll.

Sie konnte also wie die Stelle 3 sagt, sehr wohl in der Hauptstadt bemerkt werden.

5. Sonnenfinsterniss vom 26. December 75 n. Chr.
(26. December $0^h\ 26^m$ 8 m. Zt. Peking.) [Partiell.]

十八年十一月甲
辰晦日有蝕之在
斗二十一度是時

Im achtzehnten Jahre am Tage kja-tschen, dem letzten des elften Monats[3] sollte sich die Sonne verfinstern und zwar in der Behausung des Scheffels bei 21gr.[4] Da zu dieser Zeit Ming-ti im Kriege starb,

---

[1] Ort der Sonne in der Weide: $AR = 119°7$, Rechnung:

$$AR_{\odot} = 119°92$$
$$D = +20·82$$

[2] Bezieht sich, wie die Finsterniss vom Jahre 55 auf den Tod des Kaisers.

[3] = 26. December 75 n. Chr.

[4] Ort der Sonne: $AR = 273°1$, Rechnung: $AR_{\odot} = 273°43$
$D = -23·65$

明帝既崩馬太后 帀爵示条故陽下 勝	verhinderte die kaiserliche Witwe durch Gebete und Opfer, dass Jang nach einer Niederlage sich erhebe.

Die Erzählung von der Verhinderung des Eintrittes der Finsterniss weist darauf hin, dass dieselbe in China, respective in der Hauptstadt nicht auffallend war oder überhaupt nicht gesehen wurde. Ich finde für Lojang: 3^m nach Mittag

2·36 Zoll,

also ganz unauffällig.

III. Finsternisse unter Kaiser Tschang-ti.

1. Sonnenfinsterniss vom 10. März 80 n. Chr.

(10. März 3^h 6^m 3 m. Zt. Peking.) [Ringförmig.]

1.

章帝建祁五年二 月庚辰朔日有蝕 之	Im fünften Jahre nach Annahme des Regierungsprädicates kjen-tschu des Kaisers Tschang-ti fand am Tage keng-tschen, dem ersten des zweiten Monats eine Sonnenfinsterniss statt.[1]

2.

潛潭巴日庚辰蝕 彗星東至有寇兵	Im Tsjen-tan-pa heisst es: Am Tage der Finsterniss keng-tschen kam im Osten ein Besenstern (Comet) heraus; es gab Banditen im Heere.

3.

又別占云庚辰蝕 大早	Zur Hervorhebung dieses Wahrzeichens fügt man noch bei, dass die Finsterniss am Tage keng-tschen sehr bald eintrat.

[1] = 10. März 80 n. Chr.

Von den übrigen Bemerkungen ist nur hervorzuheben, dass die Mondstation der östlichen Mauer 8gr. angegeben wird.[1]

Die Finsterniss ist, weil sie ihren Hauptverlauf im westlichen Sibirien nimmt, nur für das nördliche China bedeutend, in Lojang nicht sehr auffallend. Der Stelle 3 würde, wenn sie im Sinne als „früh" gedeutet werden müsste,[2] durch die Rechnung widersprochen, da die Finsterniss für Sibirien und Nordchina auf den Nachmittag trifft. Sie fällt ausser den Bereich der Karte.

2. Sonnenfinsterniss vom 23. August 81 n. Chr.

(22. August $21^h\ 2^m$ 4 m. Zt. Peking.) [Total.]

1.

大年六月辛未晦
日有蝕之。潛澭
巴日辛未蝕大水

Im sechsten Jahre am Tage sin wei, dem letzten des sechsten Monats war eine Sonnenfinsterniss.[3] Nach dem Tsjen-tan-pa war am Tage der Finsterniss sin-wei grosses Wasser.

2.

在翼六度。古今
汪日元和元年九
月乙未日有蝕之

Es war in der Behausung des Flügels, 6gr.[4] Nach dem Ku-kin-tschu war am Tage ji-wei des neunten Monats des ersten Jahres Juen-ho eine Finsterniss.[5]

---

[1] Ort der Sonne: $AR = 348°2$, Rechnung: $AR_\odot = 349°37$
$D = -4·63$

[2] Die Angabe „sehr bald" ist eher im astrologischen Sinne zu nehmen, nämlich, dass das himmlische Warnungszeichen dem Streite der Beamten, von welchem das Heu-han-schu an oben gedachter Stelle berichtet, sehr bald gefolgt sei.

[3] = 23. August 81 n. Chr.

[4] Station 翼 = Ji (Flügel) im Sternbild des Bechers, beginnt mit α Crateris, Intervall 18°75. Ort der Sonne: $AR = 146°3$, Rechnung:

$AR_\odot = 149°82$
$D = +12·43$

[5] Identisch mit der folgenden.

Die weiteren Bemerkungen des Heu-han-schu sind unwesentlich. — Die Finsterniss fällt auf die Philippinen-Inseln und kann demnach nur in den südlichen Hafenstädten China's auffallend gewesen sein. In Lojang ist sie jedenfalls unmöglich.

3. Sonnenfinsterniss vom 2. August 83 n. Chr.

(2. August $2^h\ 12^m\ 4$ m. Zt. Peking.) [Partiell.]

元和元年八月乙未晦日有蝕之。史官不見在官聞日在氐四度。

Im ersten Jahre Juen-ho's am Tage ji-wei, dem letzten des achten Monats sollte sich die Sonne verfinstert haben.[1] Die Geschichtsschreiber sahen nichts, andere Beamte berichten vom Hörensagen, die Sonne sei in der Behausung des Fundamentes gewesen bei 4gr.[2]

Die Art der Erzählung lässt mit Sicherheit annehmen, dass hier keine Finsterniss vorliegt. Auch das Ti-ki macht keine Erwähnung darüber. In der That gibt die Rechnung der Phase für Lojang dieselbe als ganz unmöglich.

IV. Finsternisse unter Kaiser Ho-ti.

1. Sonnenfinsterniss vom 20. März 90 n. Chr.

(19. März $19^h\ 50^m\ 1$ m. Zt. Peking.) [Partiell.]

1.

和帝永元二年(二月)壬午日有蝕之

Im zweiten Jahre nach Annahme des Regierungsprädicates Jung-juen am Tage shen-wu des zweiten Monats verfinsterte sich die Sonne.[3]

---

[1] = 2. August 83 n. Chr. (nur unter Annahme der Monatsverschiebung und des Zeichens ki statt ji).

[2] Ort der Sonne: $AR = 200°5$, Rechnung: $AR_\odot = 129°35$
$D = +18\cdot74$,
welche Nichtübereinstimmung auf eine verfehlte Vorausberechnung der Finsterniss hinweist.

[3] = 20. März 90 n. Chr.

2.

潛潭巴日壬午蝕
久雨旬望史官見
涿郡昌閭日在奎
八度

Im Tsjen-tan-pa heisst es: Zur Zeit der Finsterniss am Tage shen-wu trat Regen ein, der eine Dekade lang dauerte. Die Geschichtsschreiber berichten den Tag, an dem selbe in der Capitale Tscho[1] gesehen wurde. Es war in der Behausung der Sandale 8sr.[2]

King-fang spricht im Weiteren von politischen Wirren des Reiches. Obwohl es sehr zweifelhaft ist, was unter der „Capitale Tscho" verstanden werden soll, habe ich doch die Phase für den Ort Tscho-lu der unten stehenden Note [1] berechnet: $18^h\,42^m$ w. Zt.

1·88 Zoll.

2. Sonnenfinsterniss vom 23. Juli 92 n. Chr. (22. Juli $23^h\,43^m$ 6 m. Zt. Peking.) [Ringförmig.]

1.

四年六月戊戌朔
日有蝕之

Im vierten Jahre am Tage wu-sju, dem ersten des sechsten Monats[3] war eine Sonnenfinsterniss.

2.

潛潭巴日戊戌蝕
有土殃主后死天

Im Tsjen-tan-pa heisst es: Am Tage der Finsterniss wu-sju traf die Erde ein Unglück vom Himmel, indem die Kaiserin starb. Das

---

[1] Tscho ist der Name eines Flusses SW. von Peking. Tscho-lu war Capitale von Huang-ti und ist das heutige Pao-ngan-tscheu NW. von Peking. Angenommene Coordinaten:

$$\lambda = 115°7 \text{ v. Gr.}$$
$$\varphi = +40°4.$$

[2] Station 奎 = kuei (Sandale) begreift den nördlichen Theil der Fische, dem südlichen von Andromeda folgt auf die Station Pi (Mauer); Intervall 16°6. Ort der Sonne: $AR = 353°3$, Rechnung: $AR_\odot = 357°71$
$D = -1·00$

[3] = 23. Juli 92 n. Chr.

下說陰。在七星二度 | Reich errichtete ihr ein Mausoleum. — Es ereignete sich im Siebengestirn. 2sr.[1]

Die übrigen Bemerkungen des Heu-han-schu beziehen sich meist auf die kaiserliche Familie. — Da die Curve der Centralität dieser Finsterniss über das nördliche Hinterindien und Manilla geht, so wird sie besonders in den südlichen Provinzen China's auffallend gewesen sein. Für Lojang ist die Phase nur mehr unbedeutend.

3. Sonnenfinsterniss vom 22. Mai 95 n. Chr. (21. Mai $22^h\ 30^m$ 3 m. Zt. Peking.) [Total.]

1.

元年四月辛亥朔日有蝕之 | Im vierten Monat des siebenten Jahres am Neumondstage sin-hai[2] verfinsterte sich die Sonne.

2.

潛潭巴曰辛亥蝕子爲雍 | Im Tsjen-tan-pa heisst es: Am Tage der Finsterniss sin-hai lebte der Sohn in Frieden.[3]

3.

在鶉觜爲祿旅主牧斂儒說祿旅宮 | Es ereignete sich in der grossen Schildkröte.[4] Dieselbe repräsentirt die Leibwache und steht der Ernte vor. Die Gelehrten sagen, das

---

[1] Das Siebengestirn ist hier jedenfalls mit der Station 星 = Sing zu identificiren. Letztere folgt auf das Mondhaus der Weide (liu); Intervall 6°30. Ort der Sonne: $AR = 120°3$, Rechnung: $AR_\odot = 120°09$
$D = +20·78$

[2] = 22. Mai 95 n. Chr.

[3] Diese Stelle bezieht sich vermuthlich auf den Kaiser. Ob übrigens das Zeichen 雍 = Jung hier nicht geographisch zu nehmen ist (in der Bedeutung westlich vom gelben Flusse, nördlich des Flusses Wei), bleibt fraglich.

[4] Ist für 鶉 = Tsui zu nehmen (λ Orionis). Diese Station folgt auf das Netz und hat das schmale Gebiet von 0°05, Ort der Sonne daselbst: $AR = 59°9$, Rechnung: $AR_\odot = 55°70$
$D = +19·92$

中之象牧斂貪妒之象 | Wahrzeichen in der Behausung der Leibwache sei die Vorbedeutung einer kargen Ernte und der Eifersucht.

Die Finsterniss trifft das centrale China, wie nachstehende Zone der Centralität zeigt.

Nördliche Curve:		Südliche Curve:	
$\lambda = 113°0$ v. P.	$\varphi = +40°8$	$\lambda = 113°2$ v. P.	$\varphi = +39°8$
116·3	42·0	116·4	41·0
119·5	43·0	119·7	42·0
122·7	43·9	122·9	42·9
126·0	44·7	126·1	43·7
129·3	45·4	129·4	44·4

Ich habe ohne Rücksichtnahme auf die Note [3] der vorhergehenden Seite die Phase für die Residenz Lojang berechnet und finde:

$21^h\ 40^m$ w. Zt.
10·74 Zoll.

4. Sonnenfinsterniss vom 23. August 100 n. Chr.
(22. August $21^h\ 25^m$ 7 m. Zt. Peking.) [Total.]

十二年秋七月辛亥朔日有蝕之。在翼八度荊州宿也明年冬南郡蠻夷反爲寇

Im Herbste des Jahres zwölf im siebenten Monat am Neumondstage sin-hai verfinsterte sich die Sonne.[1] Es war in der Behausung des Flügels 8sr., im Bereiche von King-tscheu.[2] Im Winter des folgenden Jahres wurden die südlichen Provinzen von den wilden Horden wieder geplündert.[3]

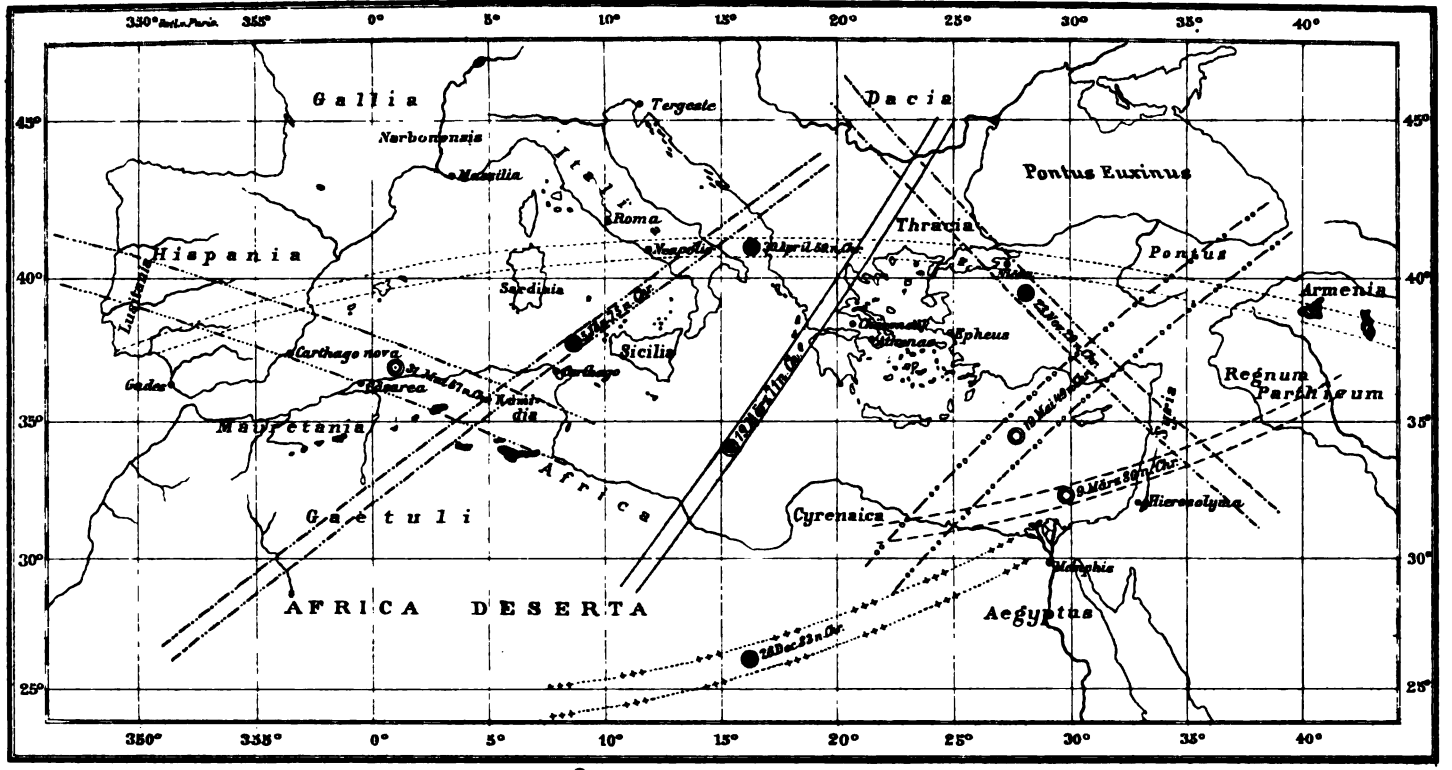
---

[1] = 23. August 100 n. Chr.

[2] Ort der Sonne: $AR = 148°9$, Rechnung: $AR_\odot = 150°21$
$D = +12·29$

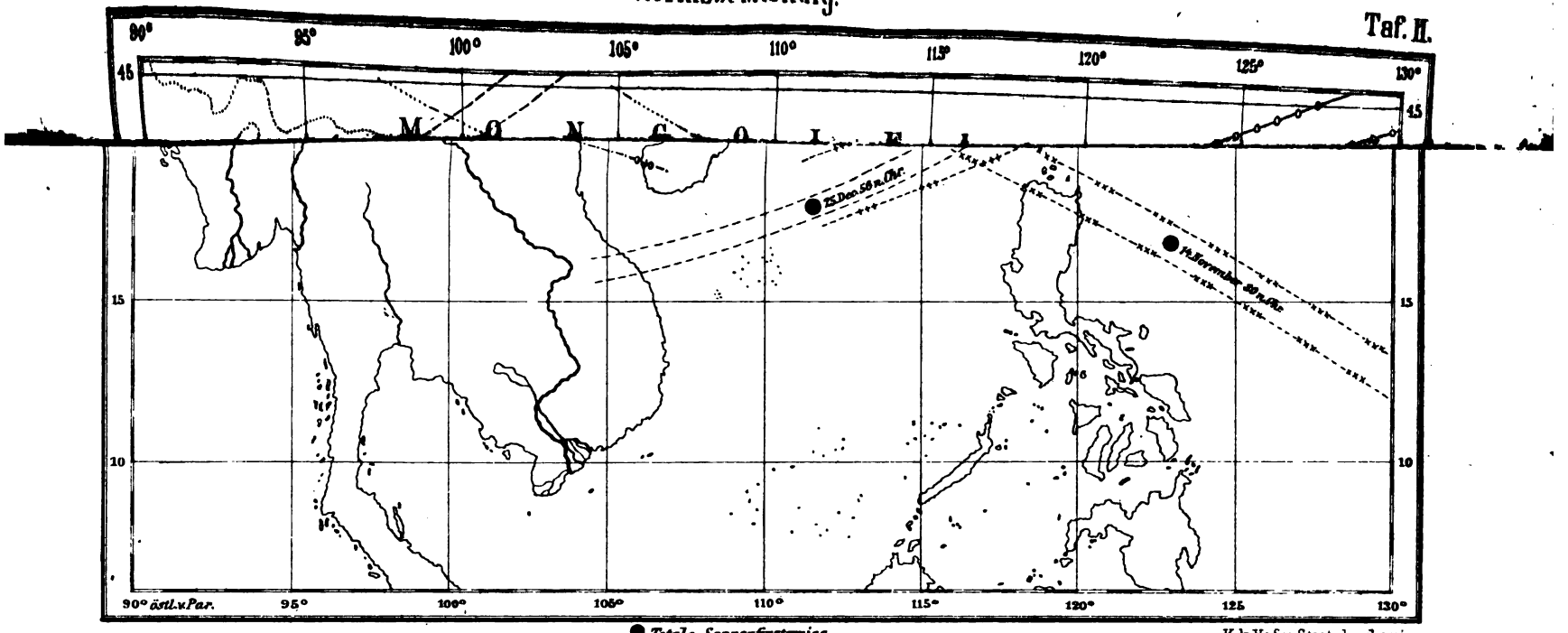
King-tscheu, eine der neun Provinzen Ju's umfasste Hu-nan und den grösseren Theil von Hu-peh, mit Theilen von Kuei-tscheu. Hauptstadt: King-tscheu-fu am Jang-tszy.

[3] Man-i, wilde Horden im südlichen China.



● *Totale Sonnenfinsterniss.*
◎ *Ringförmige Sonnenfinsterniss.*
● *Ringförmig-totale Sonnenfinsterniss.*

K. k. Hof- u. Staatsdruckerei.



● *Totale Sonnenfinsterniss.*
◎ *Ringförmige Sonnenfinsterniss.*
◉ *Ringförmig-totale Sonnenfinsterniss.*

K. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

Diese durch das südliche Sibirien gehende Finsterniss muss für Peking ebenso wie für Lojang noch ziemlich bedeutend gewesen sein. Um so merkwürdiger ist die chinesische Angabe, dass sie in dem viel südlicher gelegenen King-tschen ($\lambda = 112°04$ v. Gr. $\varphi = +30°3$) gesehen worden sein soll. Die Rechnung für diesen Ort gibt: $19^h\ 26^m$ w. Zt.

3·87 Zoll,

also nicht so bedeutend, als dass sie die allgemeine Aufmerksamkeit hätte auf sich ziehen müssen.

5. Sonnenfinsterniss vom 22. Juni 103 n. Chr. (22 Juni $0^h\ 9^m$ 3 m. Zt. Peking.) [Ringförmig.]

十五年四月甲子
晦日有蝕之在東
井二十二度東井
主酒食之宿也

Im vierten Monat des fünfzehnten Jahres am letzten Tage kja-tszy verfinsterte sich die Sonne.[1] Es war im östlichen Brunnen bei 22sr.[2] Der östliche Brunnen steht der Behausung von Speise und Trank vor.

Das Heu-han-schu fügt noch bei, dass die Finsterniss als „Wahrzeichen" einer unehrenhaften Handlungsweise der Kaiserin erschienen sei. — Die Finsterniss trifft besonders die Provinzen südlich vom Jang-tszy-Flusse:

Nördliche Curve:		Südliche Curve:	
$\lambda = 102°6$ v. P.	$\varphi = +27°9$	$\lambda = 102°7$ v. P.	$\varphi = +26°7$
105·3	28·8	105·4	27·7
108·2	29·6	108·2	28·5
110·9	30·2	110·9	29·1
113·7	30·6	113·7	29·5
116·5	30·9	116·5	29·8
119·4	31·0	119·4	29·9

[1] = 23. Juni 103 n. Chr.

[2] Station 井 = Tsing (Brunnen) liegt in den Zwillingen und beginnt vor μ Gemini. Intervall 33°3. Ort der Sonne: $AR = 88°$, Rechnung:

$$AR_{\odot} = 87°43$$
$$D = +23·66.$$

Versuche über Diffusion von Gasen.

II.

Von **A. v. Obermayer.**

Die Bestimmung der Diffusionscoëfficienten Kohlensäure — Luft, Kohlensäure — Wasserstoff, Kohlensäure — Sauerstoff nach der Methode von Stefan mit dem Apparate II haben zu dem Ergebnisse geführt, dass sehr kleinen Diffusionszeiten kleinere Werthe jenes Coëfficienten entsprechen.

Um darüber zu entscheiden, ob dies eine Eigenthümlichkeit der Methode und des Apparates oder des Diffusionsvorganges selbst sei, habe ich mit dem Apparate I nach der Maxwell'schen Methode die Versuche wieder aufgenommen und die Diffusionscoëfficienten Luft — Kohlensäure, Stickstoff — Sauerstoff, Stickoxydul — Kohlensäure für grössere und sehr kleine Diffusionszeiten bestimmt. Trotz der Verschiedenheit der Methode haben sich für Kohlensäure — Luft ganz ähnliche Abweichungen ergeben. Die Combinationen Stickstoff — Sauerstoff, Stickoxydul — Kohlensäure zeigen zwar auch Abweichungen, dieselben sind jedoch erheblich kleiner.

Die beobachteten Abweichungen sind somit nicht durch die angewandte Versuchsmethode bedingt, sondern eine Eigenthümlichkeit des Diffusionsvorganges selbst. Sie weisen auf eine Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten vom Dichtigkeitsgefälle hin, wie ein solches von O. E. Mayer[1] aus theoretischen Gründen erwartet wird.

Mit der Ermittlung des Diffusionscoëfficienten Luft — Kohlensäure wurde gleichzeitig die Untersuchung verbunden, ob die Luft bei der Diffusion gegen Kohlensäure eine Entmischung erfährt. Es ist mir nicht gelungen, etwas Derartiges nachzu-

---

[1] Kinetische Gastheorie. §. 82, S. 173.

weisen, jedenfalls fällt ein solcher Vorgang, wenn er überhaupt statthat, innerhalb die Grenzen der Beobachtungsfehler.

Der Diffusionscoëfficient Stickstoff—Sauerstoff wurde aus der Diffusion von Stickstoff in Sauerstoff und aus jener von Luft in Sauerstoff abgeleitet. Auf dem letzteren Wege erhielt ich einen etwa um 0·5 Percent kleineren Werth.

Mit den Versuchen Stickoxydul—Kohlensäure sind Stickoxydulanalysen verknüpft worden, um einem etwaigen Einflusse des Stickstoffes Rechnung tragen zu können, welcher bei der Entwicklung des Stickoxydules, wenn nicht ganz ausserordentliche Vorsichtsmassregeln angewendet werden, stets auftritt.

Die nachfolgende Zusammenstellung der Versuche enthält:

Die Nummer des Versuches, das Datum, die Diffusionszeit, den mittleren Barometerstand, die mittlere Temperatur des Apparates.

Links darunter: die Analysen der Gasgemische. In den Versuchen, wo Kohlensäure angewendet wird, ist stets der Kohlensäuregehalt angeführt. [1]

Daneben rechts steht die Differenz $u—o$ aus dem Gasgehalte der unteren und oberen Hälfte, dann die Summe $u+o$ und der Quotient $\frac{u—o}{u+o}$.

kt der aus der Tabelle entnommene, dem Quotienten $\frac{u—o}{u+o}$ entsprechende Werth.

k der hieraus durch Division mit t erhaltene Werth.

[1] Der Kohlensäuregehalt wurde durch Absorption mit Ätzkali bestimmt. Zur Ermittlung der über 70% betragenden Kohlensäuremengen des Gemisches bediente ich mich einiger Absorptionsröhren von 40—60 Ctm. Länge. Sie geben das nach der Absorption zurückbleibende Gasvolumen grösser, sind leichter vertical zu stellen als die kurzen Absorptionsröhren und geben kleinere aus der Neigung entspringende Fehler. — Ich habe auch Absorptionen mit Natronlauge ausgeführt, wie dies von Bunsen angegeben wird, und damit sehr genaue Resultate erhalten. Es ist aber bei der grossen Anzahl der auszuführenden Analysen das Quecksilber sehr verunreinigt worden. Ich bin daher von dieser Methode wieder abgegangen. Namentlich zur Bestimmung von schwefeliger Säure habe ich dieses Verfahren benützt, — Die zahlreichen Versuche über die Diffusion Luft — schwefelige Säure haben zu keinem Resultate geführt, es ergaben sich stets beträchtliche Verluste von schwefeliger Säure.

k_{76} der auf den Normalbarometerstand reducirte Werth des Diffusionscoëfficienten.

k_0 der noch weiter auf Null Grade Celsius reducirte Diffusionscoëfficient. Dabei wird für Luft — Kohlensäure und Kohlensänre — Stickoxydul der Exponent der absoluten Temperatur gleich 2, für Stickstoff — Sauerstoff gleich $1^3/_4$ genommen.

Luft — Kohlensäure.

1. Versuch, 27. August 1881.

1 Stunde

739·6 Mm.	24·2° C.	
0 31723		$u-0 = 0{\cdot}37166$
0·31510		$u+0 = 1{\cdot}00000$
0·31617		$\frac{u-0}{u+u} = 0.37018$
		$kt = 0{\cdot}059600$
Fehlt.		$k_{76} = 0{\cdot}058001$
		$k_0 = 0{\cdot}048949$

2. Versuch, 27. August.

15 Minuten

736· Mm.	25·3° C.
	0·68852
	1·00476
0·15812	0·68525
0·84574	0·014595
0·84754	0·058379
0·84664	0·056543
	0·047365

3. Versuch, 28. August.

15 Minuten

737·0 Mm.	24·6° C.
0·15896	0·68741
0·15708	1·00345
0·15802	0·68507
0·84316	0·0146115
0·84771	0·056679
0·84543	0·047702

4. Versuch, 29. August.

1 Stunde

748·5 Mm.	23·7° C.
0·31354	0·38059
0·31236	1·00649
0·31295	0·37830
0·69349	0·057984
0·69360	0·057107
0·69354	0·048356

Die Versuche 5 bis 9 sind unbrauchbar.

10. Versuch, 4. September.

1 Stunde

737·6 Mm.	22·8° C.
0·31434	0·37731
0·31230	1·00395
0·31332	0·37582

12. Versuch, 8. September.

10 Minuten

742·3 Mm.	10·2° C.
0·12593	0·74763
0·12614	0·99971
0·12604	0·74785

1 Stunde		10 Minuten	
737·6 Mm.	22·8° C.	742·3 Mm.	10·2° C.
0·68992	0·058450	0·87274	0·0093043
0·69133	0·056727	0·87460	0·055826
0·69063	0·048325	0·87367	0·054529
			0·047270

Die Analysen des Gasgemisches der oberen Hälfte wurden für den Versuch 12 noch weiter geführt und der Sauerstoffgehalt des, nach der Absorption der Kohlensäure zurückgebliebenen Gases im Eudiometer, durch Verbrennen mit Wasserstoff bestimmt.

Zwei Analysen ergaben:

$$O = 0{\cdot}20864$$
$$0{\cdot}20803$$
$$O \text{ im Mittel} = 0{\cdot}20834$$
$$N = 0{\cdot}79166$$
$$1{\cdot}000000$$

13. Versuch, 9. September		14. Versuch, 10. September	
10 Minuten		10 Minuten	
739·2 Mm.	21·4° C.	742·1 Mm.	21·7° C.
0·12590	0·75020	0·12583	0·74971
	1·00200		1·00137
0·87610	0·74870	0·87434	0·74870
	0·0093007	0·87674	0·0093007
	0·055804	0·87554	0·055804
	0·054276		0·054488
	0·046678		0·046764

Von den Versuchen 13 und 14 wird die, aus der unteren Hälfte stammende Luft analysirt. Wegen der Länge der Absorptionsröhren musste dieselbe über Wasser aufgefangen und dann in die Eudiometer überfüllt werden.

Die Analyse gibt:

$$O = 0{\cdot}20616$$
$$N = 0{\cdot}79384$$
$$1{\cdot}00000$$

15. Versuch, 12. September.

40 Minuten	
742·5 Mm.	20·6° C.
0·25598	0·49146
0·25361	1·00104
0·25479	0·49096
	0·038266
0·74552	0·057399
0·74697	0·056076
0·74625	0·048490

16. Versuch, 13. September.

40 Minuten	
748·8 Mm.	20·4° C.
0·25547	0·49722
0·25248	1·00518
0·25398	0·49466
0·75410	0·037705
0·74829	0·056558
0·75120	0·055724
	0·048248

Die Luftanalysen gaben für den 16. Versuch

untere Hälfte	obere Hälfte
$O = 0·21102$	0·20847
	0·20791
	0·20819

17. Versuch, 15. September.

45 Minuten	
743·4 Mm.	21·1° C.
0·26967	0·46727
0·26924	1·00619
0·26946	0·46440
0·73820	0·042441
0·73526	0·056588
0·73673	0·055350
	0·047698

18. Versuch, 15. September.

10 Minuten	
743·3 Mm.	21·2° C.
0·12528	0·75131
0·12448	1·00107
0·12488	0·75051
0·87938	0·0091922
0·87300	0·0550832
0·87619	0·053881
	0·046400

Vom 17. Versuche wird die, aus beiden Hälften stammende, nach der Absorption der Kohlensäure zurückbleibende Luft, unter Beobachtung aller Vorsichtsmassregeln und mehrmaliger Wiederholung jeder Ablesung, analysirt; es ergibt sich

obere Hälfte	untere Hälfte
$O = 0·20988$	$O = 0·20975$

Die Zusammensetzung der Luft wird stets so nahe der normalen gefunden, dass eine Entmischung derselben zufolge des Diffusionsvorganges jedenfalls so gering ist, dass sie sich der Beobachtung entzieht.

Es ergibt sich somit für den Diffusionscoëfficienten Luft—Kohlensäure:

10 Min.	15 Min.	40 u. 45 Min.	1h
0·047270	0·047365	0·048490	0·048949
466678	47702	48248	48356
46764		47698	48325
46400			
Mittel . 0·046778	0·047534	0·048145	0 048543

Luft—Sauerstoff.

Zu den ersten beiden Versuchen wurde der Sauerstoff aus einem Gasometer genommen. Es zeigte sich aber, dass derselbe nicht rein, sondern durch Stickstoff verunreinigt war. Die Differenz zwischen der Summe der, durch die Analysen in beiden Hälften gefundenen Stickstoffgehalten in Percenten und der Zahl 0·7904 wurde als die, den Sauerstoff verunreinigende Stickstoffmenge angesehen. Es soll dieselbe $\bar{f}$ heissen.

Die Berechnung der Versuche Luft—Sauerstoff erfolgt ganz in derselben Weise, wie in dem Falle, als ob die Luft ein einfaches Gas wäre; es ist nur der Stickstoffgehalt der beiden Hälften des Diffusionsapparates der Rechnung zu Grunde zu legen.

In dem Falle, als der Sauerstoff der unteren Hälfte eine Menge f an Stickstoff enthält, hat man statt des Quotienten $\frac{o-u}{o+u}$ jenen $\frac{o-u}{o+u-2f}$ zu bilden und für diesen den entsprechenden Werth von kt aus der Tafel zu entnehmen.

19. Versuch, 19. September 40 Min. 744·5 Mm., 20·2° C.

Es wurde durch die Analysen der Sauerstoff bestimmt

	0·43469	0·77128
	0·43350	0·76372
O =	0·43420	0·76750
N =	0·56580	0·23250
N_0+N_u =	0·79830	kt = 0·048954
f =	0·10794	k = 0·073431
$o-u$ =	0·33330	k_{76} = 0·071936

$o+u-2f = 0{\cdot}78242$

$\frac{o+u}{o+u-2f} = 0{\cdot}42599$ $\qquad k_0 = 0{\cdot}063491$

20. Versuch, 20. September 40 Min. 741·4 Mm., 20·7° C.

0·43836	0·76328	$o+u = 0{\cdot}80459$	0·050440
0·43284	0·75865	$f = 0{\cdot}01423$	0·075660
	0·75750	$o-u = 0{\cdot}32421$	0·073808
0·43560	0·75981	$o+u-2f = 0{\cdot}77613$	0·064963
0·56440	0·24019	$\frac{o-u}{o+u-2f} = 0{\cdot}41771$	

21. Versuch, 22. September 40 Min. 736·0 Mm. 20·2° C.

0·44857	0·77378	0·32456	0·050985
0·44424	0·77292	0·78262	0·076478
	0·76620	0·41471	0·074063
0·44641	0·77097		0·065220
0·55359	0·22903		

23. Versuch, 26. September 1 Stunde 748·4 Mm., 17·8° C.

0·48638		0·24976	
0·48218		0·78168	
0·48428	0·73404	0·31952	0·070774
0·51572	0·26596		0·069693
			0·062400

24. Versuch, 28. September 1 Stunde 747·0 Mm., 17·1° C.

0·48689	0·73048	0·24359	0·072771
0·51311	0·26952	0·78263	0·071527
		0·31124	0·064320

Es ergibt sich für den Diffusionscoëfficienten Stickstoff — Sauerstoff.

Versuch Nr. 19	$k_0 = 0{\cdot}063491$
20	0·064963
21	0·065220

Versuch Nr. 23	0·062400
24	0·064320
Im Mittel =	0·064079

Stickstoff — Sauerstoff.

Der Stickstoff wird aus einem Gemische von gleichen Volumstheilen der concentrirten Lösungen von Salmiak und salpetrigsaurem Kali dargestellt, durch verdünnte Schwefelsäure zweimal durch Eisenvitriollösung gewaschen und mit Schwefelsäure getrocknet. Durch die Analysen wird der Sauerstoff bestimmt.

26. Versuch, 3. October.

10 Minuten	
743·1 Mm.	16·0° C.
0·14450	0·71801
0·14377	1·00591
0·14358	0·71330
0·14395	0·012069
0·86216	0·072416
0·86176	0·070807
0·86196	0·064097

27. Versuch, 5. October.

10 Minuten	
744·9 Mm.	14·8° C.
0·14291	0·71755
0·14167	1·00085
0·14037	0·71692
0·14165	0·011805
0·85774	0·070830
0·86066	0·069425
0·85920	0·063303

28. Versuch, 7. October.

10 Minuten	
753·8 Mm.	14·8° C.
0·14244	0·72299
0·14140	1·00585
0·14044	0·71877
0·14143	0·011659
0·86842	0·069954
0·86042	0·069383
0·86442	0·063264

29. Versuch, 9. October.

10 Minuten	
743·3 Mm.	14·8° C.
0·14290	0·71551
0·14197	1·00133
0·14244	0·71551
0·85658	0·011924
0·86106	0·071544
0·85902	0·069971
0·85889	0·063800

30. Versuch, 12. October.

1 Stunde	
741·3 Mm.	14·6° C.
0·34637	0·31455
0·34337	1·00427
0·34458	0·31321
0 34486	0·072290
0·66065	0·070511
0·65815	0·064372
0·65942	
0·65941	

32. Versuch, 15. October.

75 Minuten	
740·4 Mm.	14·6° C.
0·38286	0·24987
0·38096	1·01337
0·38143	0·24657
0·38175	0·090472
0·63023	0·072378
0·63301	0·070512
0·63162	0·064372

31. Versuch, 14. October.

1 Stunde	
742·0 Mm.	14·7° C.
0·34945	0·31927
0·67137	1 01817
0·66606	0·31357
0·66872	0·072200
	0·070490
	0·064313

Zur Stickstoffentwicklung der letzten beiden Versuche wird ein anderes salpetrigsaures Kali angewendet; es scheint der Stickstoff, Stickoxydul zu enthalten.

Die Versuche mit Stickstoff — Sauerstoff geben:

Diffusionszeit	10 Minuten	$1-1^1/_4$ Stunde
	0·064097	0·064372
	0·063303	0·064313
	0·063264	0·064372
	0·063800	
	0·063616	0·064352

Aus den Versuchen Luft — Sauerstoff folgt der Werth 0·064079. Der Unterschied zwischen den aus grösseren und kleineren Diffusionszeiten abgeleiteten Werthen des Diffusionscoëfficienten ist hier ein sehr geringer, circa 1 Percent.

Nachdem der Apparat seit dem 10. Versuche nicht auseinandergenommen wurde, untersuchte ich, ob er für Kohlensäure — Luft denselben Werth wie früher gab.

34. Versuch, 23. October 10 Minuten 735·1 Mm, 12·8° C.

0·12226	0·87624	0·75410	0·0087921
0·12228	0·87650	0·99864	0·052753
0·12227	0·87637	0·75565	0·051024
			0·046559

Dieser Versuch zeigt auch, dass das Schmiermittel des Diffusionshahnes keinen Einfluss auf die Versuchsresultate ausübt, etwa in der Weise, dass es sich an den Bohrungskanten zusammenschiebt und den Querschnitt verengt. Ein solcher Einfluss müsste nach einer längeren, ununterbrochenen Versuchsreihe bemerkbar werden.

Stickoxydul — Kohlensäure.

Das Stickoxydul wurde in die obere Hälfte des Apparates gefüllt. Es war aus salpetersaurem Ammoniak durch Erhitzen im Sandbade entwickelt, durch verdünnte Schwefelsäure zweimal durch Eisenvitriollösung gewaschen und schliesslich durch einen Trockenapparat, welcher mit Schwefelsäure befeuchtete Glasperlen enthielt, getrocknet worden.

Um die Versicherung der genügenden Reinheit des Stickoxydulgases zu haben, wurde das durch den Apparat geleitete Gas in einer Gaseprouvette aufgefangen und von Alkohol absorbiren gelassen; es blieb dann eine Blase von 13—15 Mm. Länge zurück.

Es wurde weiter das Stickoxydulgas, welches nach der Absorption der Kohlensäure zurückbleibt, dadurch analysirt, dass es mit überschüssigem Wasserstoffe im Eudiometer verbrannt wurde, eine Methode, die sehr scharfe Resultate liefert, wie jüngst von Dumreicher nachgewiesen wurde.[1] Die eintretende Contraction ist gleich der vorhandenen Menge Stickoxydulgas.

[1] Sitzungsber. Band LXXXII, S. 560. Untersuchungen über die Einwirkung von Zinnchlorür auf die Stickstoffverbindungen.

35. Versuch, 25. October 15 Minuten 731·1 Mm. 13·7° C.

0·12774	0·74626
0·12873	1·00214
0·12794	0·74469
0·87366	0·009600
0·87474	0·038400
0·87420	0·036940
	0·033497

Es wurden zwei Analysen des aus der oberen Hälfte erhaltenen Stickoxydulgases ausgeführt; sie ergaben:

an Stickoxydulgehalt

0·95822
0·95939
N_2O = 0·95881
N = 0·04119
1·00000

Wegen des grossen Stickstoffgehaltes wird dieser Versuch bei der Bildung des Mittels nicht berücksichtigt.

36. Versuch, 26. October.

15 Minuten
737·9 Mm. 13·7° C.

0·12577	0·74803
0·12609	0·99989
0·12593	0·74810
0·87396	0·0093452
	0·037371
	0·036284
	0·032902

37. Versuch, 27. October.

15 Minuten
745·8 Mm 13·1° C.

0·12340	0·74 70
0·12372	0·99582
0·12356	0·75185
0·87402	0·0090830
0·87049	0·036322
0·87226	0·035653
	0·032465

38. Versuch, 28. October.

15 Minuten
744·1 Mm. 12·8° C.

0·12353	0·75013
0·12484	0·99851
0·12419	0·75125
0·87374	0·0091124
0·87490	0·036450
0·87432	0·035688
	0·032565

Von dem in den Absorptionsröhren zurückgebliebenen Gase werden mehrere Analysen ausgeführt; es wurde dabei vorausgesetzt, dass das Gas nebst z Stickoxydul noch y Stickstoff und x Sauerstoff enthalte. Zu dem im Eudiometer befindlichen Gase wird Wasserstoff zugesetzt, explodirt, dann Sauerstoff zugesetzt und nochmal explodirt. Nur

eine von den Analysen gelingt, die anderen geben nicht unerhebliche negative Werthe für den Sauerstoff.

	Vol.	Druck	Temp.	Vol. a. 1000^{cc} 0° C. red.	
Angew. Gas.....	165·85	118·17	9 6° C.	18·937	*a*
+ Wasserstoff ...	320·05	275·92	9·9	85·222	*b*
N. d. Expl.	286·89	241·08	9·9	66·746	*c*
+ Sauerstoff	483·88	206·55	9·2	206·500	*d*
N. d. Expl.	395·60	352·06	9·2	134·744	*e*

Zur Berechnung der Analysen hat man folgende drei Gleichungen:

$$x = +\frac{2}{3}(d-e)-(c-a)$$

$$y = c-(b-c)+\frac{4}{3}(d-e)-3(c-a)$$

$$z = (b-c)-2(d-e)+3(c-a)$$

und hiemit findet man:

		od. in Percenten
Stickoxydul	= 18·392	97·121
Stickstoff	= 0·517	2·731
Sauerstoff	= 0·028	0·148
	18·937	100·000

39. Versuch, 31. October.

90 Minuten

741·0 Mm. 11·8° C.

0·30350	0·39410
0·30473	1·00234
0·30412	0·39318
0·69579	0·055023
0·70065	0·036682
0·69822	0·035765
Stickoxydulanal.	0·032865

$N_2O = 0{\cdot}97630 : 0{\cdot}98020$

$N = 0{\cdot}02170$

40. Versuch, 2. November.

90 Minuten

741·5 Mm. 10·9° C.

0·30503	0·39548
0·30443	1·00494
0·30473	0·39354
0·69970	0·054956
0·70071	0·036637
0·70021	0·035736
Stickoxydulanal.	0·033048
0·98082	

$N = 0{\cdot}01918$

41. Versuch, 4. November.

15 Minuten	
755·1 Mm.	9·7° C.
0·12433	0.75473
0·12144	1·00051
0·12289	0·75425
0·87708	0·0088934
0·87816	0·035574
0·87762	0·035343
Stickoxydulanal.	0·032962
0·98472	
0·98790	
0·98631	N = 0·01369

42. Versuch, 6. November.

15 Minuten	
753·9 Mm.	9·5° C.
0·12245	0·75630
0·12207	1·00082
0·12226	0·75553
0·87798	0·0088007
0·87914	0·035203
0·87856	0·034921
Stickoxydulanal.	0·032614
0·98498	
0·98230	
0·98382	
0·98370	N = 0·01630

43. Versuch, 11. November.

2 Stunden	
752·2 Mm.	10·6° C.
0·34712	0·31543
0·34504	1·00759
0·34608	0·31305
0·66004	0·072331
0·66297	0·036166
0·66151	0·035795
Stickoxydulanal.	0·033171
0·98512	
0·98360	
0·98286	N = 0·01614

44. Versuch, 14. November.

2 Stunden	
751·4 Mm.	11·8° C.
0·34537	0·31506
0·34465	1·00508
0·34500	0·31346
0·65740	0·072231
0·66274	0·036116
0·66007	0·035707
	0·032952

Die wechselnde Zusammensetzung des Stickoxydulgases erweist sich ohne merkbaren Einfluss auf das Resultat.

Für die Diffusionscoëfficienten Stickoxydul—Kohlensäure ergibt sich:

Diffusionszeit: 15 Minuten	1h 30m	2h
1·032902	0·032865	0·032952
32465	33048	0·033171
32565		
32962		
32614		
$k_0 = 0.032702$	0·032953	0·033062

Der Unterschied zwischen den Werthen des Diffusionscoëfficienten, die aus verschiedenen Diffusionszeiten hergeleitet sind, ist hier sehr klein, nahe 1 Percent.

Die Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten vom Dichtigkeitsgefälle scheint nach den bisher veröffentlichen Versuchen, mit der Verschiedenheit der Moleculargewichte der, in einander diffundirenden Gase im Zusammenhange zu stehen.

Über Sulfosäuren des Azobenzols.

Von Professor **J. V. Janovsky**.

In der ersten Arbeit über Azobenzolmonosulfosäure und die Disulfosäuren[1] habe ich die Darstellung der Säuren mitgetheilt, sowie auch die wesentlichsten Eigenschaften derselben und ihrer Salze. Es war nun vor Allem nöthig, die Constitution, beziehungsweise die Stellungsfrage der Säuren festzusetzen. Da die Structur der Gries'schen Säure nicht festgestellt ist, und man nicht mit Sicherheit weiss, ob die Sulfogruppe in der Para- oder Orthostellung sich befindet, so baute ich zuerst die Azobenzolmonosulfosäure völlig ab. Dieselbe wurde nach der Roussin'schen Methode am Wasserbade behandelt und nachher das Zinn mit Schwefelwasserstoff ausgefällt. Bei Zusatz von Zinn zu der Lösung der Azobenzolsulfosäure in rauchender Salzsäure tritt bald eine Entfärbung ein; der völlige Abbau dauert circa eine Stunde, die Flüssigkeit ist dann hellgelb gefärbt.

Die vom Schwefelzinn abfiltrirte Flüssigkeit wurde am Wasserbade abgeraucht und mehrmals mit Wasserzusatz eingedampft, um alle überschüssige Salzsäure zu verjagen. Wird nun die trockene Masse aus Wasser heiss umkrystallisirt, so erhält man nach dem Erkalten die charakteristischen Tafeln der Sulfanilsäure (Amidobenzolsulfosäure — para) $C_6H_4NH_2.SO_3H$ — 1, 4). Dass die Säure Sulfanilsäure ist, wurde nicht nur durch die Analyse, sondern auch durch die Tropäeolinreaction und das Löslichkeitsverhältniss constatirt.

Die quantitative Analyse der getrockneten Säure ergab:

	I	II	Berechnet
Schwefel...	18·40	18·34	18·49
Stickstoff ..	7·91	7·98	8·09

[1] Bericht d. k. Akad. d. Wissenschaften, Jahrg. 1881, pag. 647 u. s. f

Die Löslichkeit: 100 Theile Lösung enthalten 0·596— bei 10°C. — 1 Theil ist somit in 166 Theilen aq löslich.[1]

Die Structurformel ergibt sich somit für die Gries'sche Azobenzolmonosulfosäure:

$$C_6H_5N=\underset{(1)}{N}C_6H_4\cdot\underset{(4)}{SO_3}H$$

Das Chlorid der Azobenzolparasulfosäure erhält man leicht durch Einwirkung von Phosphorpentachlorid auf das Natriumsalz. Wird die Extractionsmasse mit Äther behandelt, so schiessen beim Verdünnen grosse monokline Nadeln an; dieselben mit Wasser gekocht und nochmals aus Äther krystallisirt geben Cl = 12·73 — berechnet 12·66 Procent.

Das Säurechlorid, welches Herr O. Weigl untersuchte, ist feurig orangenroth und krystallisirt in büschelförmig gruppirten Nadeln. Beim Sublimiren zerfällt der grösste Theil, ein Theil aber sublimirt in goldgelben Nadeln; aus Benzol krystallisirt es in dünnen Blättchen. Die Formel ist:

$$C_6H_5N=\underset{(1)}{N}C_6H_4\cdot\underset{(4)}{SO_2}Cl$$

Schmelzpunkt = 82·0°C.

Über Azobenzoldisulfosäuren haben, nachdem meine erste Arbeit erschienen, Laar[2] und Limpricht[3] referirt, und zwar bestätigt Limpricht meine Angaben, Laar nur bezüglich einiger Eigenschaften. Da nach meiner Erfahrung die Producte und namentlich die Ausbeute wesentlich von der Darstellungsart abhängig sind, so will ich hier genau das Verfahren beschreiben, welches ich befolgte.

Vor allem bemerke ich, dass nur Limpricht die Producte ausführlicher untersucht hat, welche durch directe Sulfirung des Azobenzols entstehen, während Laar die Constitution der Gries'schen Säure so nachweisen wollte, dass er sie in Disulfosäure überführte und nach der Krystallform des Kalisalzes einen Schluss

[1] Die Säure entspricht der β-Amidosulfobenzolsäure Limpricht's, Jahresbericht f. Chemie, 1875, pag. 638.

[2] Berichte d. Berliner-Gesellschaft, 1881, pag. 1928.

[3] Ebendas., 1881, pag. 1356.

auf die Constitution zog. Da nun aber sechs mögliche[1] Isomerien der Disulfosäure sind, von denen drei nur studirt sind, so erscheint mir der Weg nicht beruhigend. Beide Chemiker arbeiteten mit rauchender Säure, während ich bei niedrigerer Temperatur und mit Krystallsäure arbeitete, wobei die Reaction ungleich glatter vor sich geht.

1 Theil Azobenzol wird in 4 Theile geschmolzene Krystallsäure (krystallisirte Pyroschwefelsäure) unter Umrühren eingetragen, dann die Masse auf 150—160° C erwärmt, bis eine mit dem Glasstab herausgenommene Probe mit Wasser erstarrt, sich aber löst und keine Trübung nach 1 Minute hervorbringt; nach längerer Zeit entsteht immer eine geringe Trübung, die Operation dauert 30 Minuten. Das lange Erhitzen, welches bei Anwendung von gewöhnlicher rauchender Säure nöthig ist (wie Limpricht angibt, 2 Stunden), involvirt einen bedeutenden Verlust.

Die Masse wird dann nach dem Erkalten, wobei sie sehr zähe wird, mit circa 1—1½ Volumen Wasser verdünnt, wobei eine nicht sehr beträchtliche Erwärmung stattfindet. Nach dem Erkalten muss, wenn die Operation richtig geführt wurde, das Ganze zu einem Magma erstarren. Man bringt das Krystallmagma auf einen Platintrichter und saugt die Mutterlauge so gut als möglich ab. Die Ausbeute beträgt circa 70 Procent, also jedenfalls mehr, als Laar für seine Methode (30 Procent), nämlich durch Oxydation der Amidosäuren, angibt; aus der Mutterlauge kann noch durch Barytsalze ein Theil der Säuren gewonnen werden.

Wird die auf dem Platintrichter befindliche Masse, die dreierlei Disulfosäuren enthält, mit wenig Wasser gelöst, so bleibt in der Regel etwas Monosulfosäure zurück; ein Theil derselben ist in der Lösung der Disulfosäuren viel leichter löslich als in verdünnten Mineralsäuren oder Wasser. (Es gelingt nur durch stärkeres Erhitzen, alle Monosulfosäure zu sulfiren.) Die Lösung der Säure lässt oft bei freiwilligem Verdunsten schöne Krystalle — Blättchen, die concentrisch gruppirt sind — fallen. Dieselben gehören der in Wasser schwerer löslichen Säure. Die Trennung zweier Säuren gelingt durch Barytsalze, wie auch das Kalisalz

[1] Von den sechs asymmetrischen, in zwei Kernen angelagerten abgesehen.

oder Bleisalz. Die Salze der einen Säure (die Säure, die Limpricht mit α bezeichnet) sind in Wasser schwer löslich, die der zweiten Säure (β) sind leicht löslich. Die dritte der Säuren scheidet sich bei freiwilligem Verdunsten der stark sauren Mutterlauge, welche bei der Bereitung der rohen Säuren resultirt, in Krystallen ab, die körnig sind und durch Umkrystallisiren deutliche prismatische Krystalle liefern, — ich will dieselbe mit γ bezeichnen. War viel Schwefelsäure zugegen, so setzt sich in der verdünnten Mutterlauge oft erst nach Wochen diese letztere Säure ab.

Die Eigenschaften der α-Säure, welche ich in der vorigen Abhandlung beschrieb, stimmen mit der der Limpricht'schen α-Säure überein. Wie ich jetzt nach längerer Erfahrung und vielfachen Versuchen gefunden, kommt es wesentlich darauf an, die beiden völlig zu trennen, da die Gemische wesentlich verschiedene Schmelzpunkte der Chloride zeigen.

Ich habe auch bei Verarbeitung grösserer Mengen gefunden, dass sich die Säuren trennen lassen, wenn man die möglichst concentrirte Lösung derselben mit rauchender Salzsäure fällt, wobei eine derselben, die β-Säure, herausfällt; dieselbe löst sich dann in Wasser auf und liefert beim Verdunsten schöne breite Blätter von der Formel $C_{12}H_8N_2(SO_3H)^2+5$ aq.

Die Ausbeuten der einen und anderen Säure hängen wesentlich von der Concentration der Schwefelsäure ab.

Um die Stellungsfrage zu erörtern, wurden beide Säuren separat mit Zinn und Salzsäure abgebaut.

Man kann auch beide Säuren, die durch Umkrystallisiren von der Schwefelsäure möglichst befreit sind, zusammen abbauen, da die daraus resultirenden Amidosulfosäuren leicht, wie ich später angeben will, getrennt werden können.

Trägt man pro Molekül Säure circa die $1^1/_2$—$1^3/_4$fache Menge Zinn in die stark salzsaure Lösung, so entfärbt sich die Flüssigkeit nach wenigen Minuten, d. h. die tief braunrothe Flüssigkeit wird blass und übergeht in ein Weingelb; — farblos kann die Lösung nicht erhalten werden. Nach dem Fällen mit Schwefelwasserstoff und Abrauchen der Salzsäure bleibt eine feste, aus etwas gefärbten Krystallen bestehende Masse zurück.

Den Rückstand der, falls die Säuren die Sulfogruppen symmetrisch in beiden Kernen enthalten, nur aus Orthoamido-

benzolsulfosäure (1, 2) oder Metaamidobenzolsulfosäure (1, 3) oder endlich aus Paraamidobenzolsulfosäure (1, 4 Sulfanilsäure) bestehen kann, falls aber die Sulfogruppen in einem Kerne enthalten sind, sechs mögliche Bisulfomonoamidosäuren enthalten kann, behandelte ich mit Alkohol (92 Procent), wobei eine schwach lila gefärbte Masse zurückblieb (*A*). Das Filtrat (*B*) wurde auf dem Wasserbade eingeengt und dann mit Wasser behandelt, dann über Schwefelsäure krystallisirt.

Der Rückstand *A*, der in dem Falle, als ich nach der oben angegebenen Methode durch rauchende Salzsäure theilweise die Säuren trennte, aus mehreren Sulfosäuren bestehen konnte, ergab immer bei jeder Operation zwei Säuren. Beim Umkrystallisiren aus Wasser (1:70) blieb ein Theil schwer löslich, derselbe, aus heissem Wasser mehrfach umkrystallisirt, gab Sulfanilsäure (1, 4). Die Lösung setzte anfänglich noch etwas Sulfanilsäure ab, nachher aber die von Limpricht beschriebenen, blaulila gefärbten, prismatischen Krystalle, die sich von der Sulfanilsäure wesentlich unterschieden.

Da Laar behauptet, diese Krystalle wären identisch und nur eine andere Modification der Sulfanilsäure, Limpricht hingegen dieselben als eine Hydrazoverbindung ansieht[1], so glaube ich, hier ausführlicher auf den Punkt eingehen zu sollen; um aber die Darstellung nicht unübersichtlich zu machen, will ich vorerst die Resultate der Untersuchung angeben.

Diese lilafarbigen Krystalle ergaben sich als sehr ähnlich mit der von Limpricht (im Jahrb. 1875, pag. 634) als α bezeichneten Amidobenzolsulfosäure. Dieselbe enthält, wie ich nachwies, die Gruppen NH_2—SO_3H in der Metastellung, und spricht die Reaction dafür, dass es eine Amidosulfosäure und keine Hydrazoverbindung ist.

Aus dem geht hervor, dass bei directer Sulfirung sowohl Para- als Metamidodisulfo-Azobenzolsäuren gebildet werden.

Die erste der Säuren hat die Formel:

$$\overset{(4)}{SO_3H}.C_6H_4\overset{1}{N}=\overset{1}{N}C_6H_4.\overset{(4)}{SO_3H},$$

[1] Siehe Berl. Bericht, 1881, pag. 1357.

die zweite die Formel:

$$\underset{(3)}{SO_3H}.C_6H_4N=\underset{1}{N}\underset{1}{C}C_6H_4.\underset{(3)}{SO_3H}$$

Aus dem alkoholischen Filtrat (*B*) erhält man durch Umkrystallisiren aus möglichst wenig Wasser stark gefärbte Nadeln und im Filtrate, respective der Mutterlauge desselben ist salzsaures Anilin enthalten; da aber, wie ich beobachtet, meist noch bei der Darstellung etwas Azobenzolmonosulfosäure zurückbleibt, so konnte dieses salzsaure Anilin möglicherweise vom Abbau dieses herrühren. Die Krystalle aber, die ich untersuchte, und deren Eigenschaften und Salze weiter beschrieben werden sollen, erwiesen sich als eine Amidobenzolbisulfosäure; über die Constitution habe ich noch nicht völligen Aufschluss, vermuthe nach den Eigenschaften der Säure aber eine Disulfanilsäure von der Stellung

$$\underset{(1)}{C_6H_3NH_2}.\underset{(2)}{(SO_3H)}.\underset{(4)}{(SO_3H)}$$

Es ist klar, dass man leichter die Producte separirt erhält, wenn man die reinen Azosulfosäuren verwendet; da ich aber die Producte der directen Sulfirung studiren wollte, so zog ich diesen Weg vor. Auch musste ich, da mehrere Säuren gebildet werden und daher selbst bei Verarbeitung grösserer Mengen doch von jedem Product wenig entsteht, trachten, mit möglichst guter Ausbeute zu arbeiten.

Die Eigenschaften der leicht löslichen Azobenzoldisulfosäure habe ich schon früher beschrieben; die Formel derselben ist auch von mir genau festgestellt worden. Bei freiwilligem Verdunsten erhält man schöne grosse rubinrothe Nadeln, sonst nur concentrisch gruppirte rothgelbe Nadeln, welche unter dem Mikroskope sich als büschelförmige Krystalle erweisen; die Formel ist entweder $C_{12}H_8N_2.(SO_3H)^2+2$ aq. oder die der grossen Krystalle $C_{12}H_8N_2.(SO_3H)^2+3$ aq.

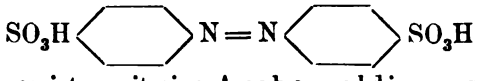
Das Chlorid der Säure fand ich aber etwas abweichend von dem Limpricht'schen α-Chloride. Aus dem Natronsalze dargestellt (O. Weigl) und aus Chloroform umkrystallisirt, schmilzt es bei 170°C. Es krystallisirt in federförmigen Krystallen dunkelroth (Durchwachsungsgestalten flache Pyramiden) aus Äther in

gedrungenen pyramidenförmigen Gestalten, aus Benzol in schönen langen, rubinrothen Nadeln. Die Analyse ergab Cl = 17, 97 statt 18, 69. Das Kaliumsalz bildet gelbrothe, concentrisch gruppirte Blätter. Das Bariumsalz aus heissem Wasser concentrisch gruppirte Nadeln (mikroskopisch), oder auch warzenförmige Krystalle.

Das Reductionsproduct dieser Säure, mittelst Zinn und Salzsäure dargestellt, bildet eine in Alkohol unlösliche Krystallmasse, welche, aus heissem Wasser umkrystallisirt, die charakteristischen Tafeln der Sulfanilsäure zeigt. Die Löslichkeit bestimmte ich bei 12° C. = in 100 Theilen Wasser 0·594.[1] Unter dem Mikroskope zeigt die Säure die stark und schön monochromatisch gefärbten Krystalle der Sulfanilsäure; die Säure gibt auch die Tropäeolinreaction höchst scharf und mit Brom das charakteristische Tribromanilin.

Nach mehrmaligem Umkrystallisiren kann sie fast ungefärbt erhalten werden. Wie ich fand, rührt die Färbung in dem Falle von eingeschlossenem Disulfamidobenzol her, welches sich an der Luft stark färbt, wie auch durch Oxydationsmittel purpurfarbig wird.

Somit muss die Säure der Formel:



entsprechen; es ist somit eine Azobenzoldiparasulfosäure. Dieselbe entsteht auch ausschliesslich wenn reine Azobenzolmonozulfosäure sulfirt wird, wie auch Laar gefunden.

Die zweite Säure, welche durch fractionirte Krystallisation erhalten werden kann, entsteht gleichzeitig mit der Azobenzoldiparasulfosäure; sie krystallisirt in gelbrothen, in Wasser leicht löslichen, in concentrirter Salzsäure schwer löslichen Blättern; unter dem Mikroskop zeigt sie schwalbenschwanzartige Zwillinge (rhombische Krystalle verwachsen nach $\infty P\infty$). Das Kaliumsalz derselben ist in Wasser leichter löslich als das der ersten Säure, das Barytsalz, gelb, ebenfalls leichter löslich als das der vorigen Säure.

Das Chlorid der Säure krystallisirt in Nadeln aus Äther, aus Chloroform in breiteren Prismen; Schmelzpunkt des nicht ganz reinen Productes 143° C.

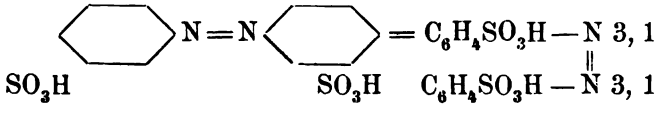
[1] Limpricht fand für diese schwer β-Säure in 100 CC. — 0·592 bis 6° C.

Die Analyse der bei 115°C. getrockneten Säure ergab: $SO_3 = 46 \cdot 88$, woraus der Schwefelgehalt sich zu 18·75 statt 18·68 berechnet. Die Bestimmung des Stickstoffes ergab 8·23 statt 8·18.

Durch Reduction der Säure mit Zinn und Salzsäure erhält man neben sehr geringen Quantitäten von Sulfanilsäure, welche aus der sie verunreinigenden Azobenzolmonosulfosäure kommen, prismatische Krystalle, die schiefe (klinorhombische), unter dem Mikroskop mit farbigen Bändern gestreifte (parallel zu $-P\infty$) Prismen darstellen. Diese Säure ist leichter löslich als Sulfanilsäure, und zwar bestimmte ich die Löslichkeit derselben bei 15°C. in 100 Theilen Wasser = 1·77.

Ein Theil der krystallisirten Säure löst sich in 55.57 aq., 49·78 Grm. der Lösung bei 15°C. gaben 0·88 Grm. Rückstand; mit Brom liefert sie, falls die Lösung verdünnt, kein Tribromanilin. Diese Eigenschaften stimmen mit der von Limpricht[1], dem wir ja die genaueste Kenntniss der Amidosulfosäuren verdanken, bezeichneten α-Amidosulfobenzolsäure.[2]

Beim vorsichtigen Schmelzen mit Kalihydrat liefert die Säure Resorcin. Es ist das insofern interessant, als die Amidogruppe geradezu bei Gegenwart einer Sulfogruppe mit dem Hydroxylrest ausgetauscht wird. Das Resorcin wurde zweifellos mit der Fluorescinreaction nachgewiesen, sowie auch mit der Tropäeolinreaction. Der Umstand spricht wohl dafür, dass in der durch Reaction erhaltenen Amidosulfosäure die Amidogruppe zur Sulfogruppe die Stellung 1, 3 einnimmt, und wäre die Formel der entsprechenden Azobenzoldisulfosäure.



also eine Azobenzoldimetasulfosäure; jedenfalls behalte ich mir vor, später noch eine genauere Bestimmung der Ortsstellung analytisch vorzunehmen. Die Schmelzung mit Kaliumhydroxid genügt in dem Falle nicht, weil ja erfahrungsweise auch bei

[1] Ann. d. Chemie, 177. Limpricht u. Berndt.

[2] Ebend. Limprich gibt die Löslichkeit in 100 CC. zu 1·276 bei 7° an.

Orthoderivaten durch molekulare Umlagerung Resorcin entstehen kann. Doch ist die Azobenzoldisulfosäure, welche aus Wasser, in dem sie schwerer löslich ist als die zuerst beschriebene, in gelben Blättern genau so wie die aus M. Nitrobenzolsulfosäure dargestellte Säure krystallisirt, mit dieser identisch, oder ist es doch im höchsten Grade wahrscheinlich, dass dies der Fall ist. Das Kalium-, Blei- und Barytsalz sind leicht löslich; das Chlorid, wie oben angegeben, schmilzt bei 143° C., also etwas niedriger als das der M. Azobenzoldisulfosäure, welches nach Limpricht bei 166° C. schmilzt. Ich bemerke, dass die Säure, welche ich zum Chlorid verwendete, noch geringe Mengen Monosulfosäure enthielt und desshalb vielleicht ein niedriges Chlorid lieferte, da die Schmelzpunkte oft durch sehr geringe Mengen bedeutend erniedrigt werden können.

Die dritte Sulfosäure, welche sich häufig aus der mit Wasser verdünnten, von den ersten zwei Säuren abgenutschten Mutterlauge durch freiwillige Verdunstung absetzt, konnte ich isolirt noch nicht in genügender Menge erhalten. Sie reducirt sich aber gemeinschaftlich mit beiden Säuren, und findet sich dann die Amidosäure dieser Disulfosäure im alkoholhaltigen Filtrat von der gefällten Amidoazobenzolparasulfosäure und Amidobenzolmetasulfosäure. Die reducirte Säure krystallisirt aus starkem Weingeist oder besser nachher aus wenig Wasser in feinen Nadeln, die schwach gelblich gefärbt sind, unter dem Mikroskope sich wesentlich von den beiden andern Säuren unterscheiden; sie ist an der Luft zerfliesslich, was ohnedies zur Annahme berechtigt, dass dieselbe zwei Sulfogruppen enthält. Die Analyse des Barytsalzes, Silbersalzes und Kalisalzes dieser Amidosäure bestätigte auch diese Annahme.

Das Silbersalz krystallisirt in dünnen Blättchen, die sich an der Luft leicht roth färben.

Gefunden wurde:

	Gefunden	Berechnet
Silber.....	46·32	46·25
Schwefel ...	13·66	13·70

In absolutem Alkohol ist es unlöslich.

Das Barytsalz dampft in der Regel zu einem Syrup ein, der schwierig krystallisirt; bei freiwilligem Verdunsten über Schwefelsäure bilden sich jedoch octaëdrische, selbst mit der Lupe deutlich erkennbare Krystalle.

Die Bestimmung ergab:

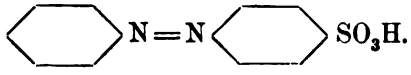
	Gefunden	Berechnet
Baryum	35·11	35·31
Schwefel	16·29	16·34

Die Constitution der Azobenzoldisulfosäure, die sich nur aus der Ähnlichkeit der aus ihr reducirten Amidosäure mit der sogenannten Disulfanilsäure

$$\underset{(1)}{C_6H_3NH_2}.\underset{(2)}{SO_3H}.\underset{(4)}{SO_3H}$$

schliessen liess — eine Diazotirung ergab auch eine Metabisulfosäure (Schmelzpunkt 62° C.) — kann ich noch nicht als endgiltig aussprechen, da von den sechs Isomerien der Disulfamidosäuren doch nur drei bislang bekannt sind. Die Entstehung der Säure, sie bildet sich neben den beiden anderen Säuren — wie auch durch anhaltende Sulfirung der Monosulfosäure des Azobenzols und bleibt in der Mutterlauge gemeinschaftlich mit der Diparadisulfoazobenzolsäure — spricht für die Annahme.

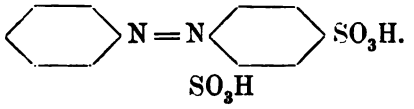
Die Azobenzolsulfosäure entspricht der Formel:



Die aus der Bisulfosäure durch Diazotirung und Abbau erzeugte Bisulfosäure des Benzols enthält die beiden Sulfogruppen in der Metastellung (1, 3); somit ist die Formel der Amidosäure, da ja die Stellung des Stickstoffes zu einer Sulfogruppe 1, 4 ist, wahrscheinlich:

$$\underset{(1)}{C_6H_3NH_2}\ \underset{(2)}{SO_3H}\ \underset{(4)}{SO_3H}.$$

und die Formel der Azosäure:



In der ersten Arbeit erwähnte ich, dass die lösliche Säure wahrscheinlich beide Sulfogruppen in einem Kern enthielt; vorläufige Versuche ergaben nämlich bei der Reduction mit Zinn und Salzsäure immer Anilin. Wie aus der jetzigen Untersuchung hervorgeht, ist aber nur ein Theil, und zwar ein kleiner Theil des Azobenzols bei der directen Sulfirung in diese Säure verwandelt. Die freie Säure, wie sie sich aus der Mutterlauge absetzt, bildet Pyramiden, harte Körner, die unter dem Mikroskope sich als Combinationen von Pyramiden (Tetrag.) mit Prismen ergeben. Ich behalte mir noch vor, später über dieselbe zu berichten.

Substitutionsproducte der Azobenzolmonosulfsäure.

Von den Substitutionsproducten der Azobenzolmonosulfosäure, welche viel glatter entstehen als die des Azobenzols, stellte ich gemeinschaftlich mit meinem Assistenten Herrn C. Hornoch zuerst die Mononitrosäure dar. Man erhält dieselbe durch Eintragen von Monosulfosäure in die zehnfache Menge von starker Salpetersäure (1·48), erwärmt einige Zeit und raucht die überschüssige Säure ab; ist alle Monosulfosäure nitrirt, so erfolgt mit Wasser keine Trübung.

Die abgedampfte Flüssigkeit ist ein gelbrother Syrup, der bei Zusatz von überschüssigem Wasser (dreifache Menge) und nachherigem Verdunsten über Schwefelsäure krystallisirt. Die Säure bildet zuerst an der Wand des Krystallirungsgefässes sternförmige, seidenglänzende Flächen, dann erstarrt die ganze Masse warzenförmig; die Säure braucht viel Wasser zum Krystallisiren. Dabei entstehen anscheinend zwei Säuren, von denen nur eine bislang von uns studirt wurde.

Die Säure verpufft beim Erhitzen sehr energisch und auch die Salze derselben.

Durch Behandeln mit Baryumcarbonat erhält man ein schwer lösliches Barytsalz, welches durch Auskochen und Krystallisiren aus siedendem Wasser leicht rein zu erhalten ist; es bildet einen pulverigen Niederschlag, der in mikroskopischen Krystallen, sternförmig gruppirten Nadeln, krystallisirt. Ich will dieses Salz, das schwer löslich ist, mit (*a*) bezeichnen.

Das Barytsalz (*a*) entspricht der Formel:

$$(C_{12}H_8N_2.NO_2.SO_3)^2\,Ba + 6\,aq.$$

	Gefunden	Berechnet
Ba =	15 98	15·89

Das Silbersalz krystallisirt schwer und nur mikroskopisch aus heissem Wasser; es krystallisirt wasserfrei in gelben, in Wasser schwer löslichen Kryställchen, welche beim Erhitzen sehr heftig explodiren. Es wurde

	Gefunden	Berechnet
Ag =	25·90	26·09
	25·83	—

Das Kaliumsalz ist ebenfalls schwerer löslich, krystallisirt in gelben concentrischen Nadeln, ähnlich dem Silbersalz.

Die über dem gefällten Baryum, wie auch Silbersalz stehenden Mutterlaugen sind stark gelbroth gefärbt und hinterlassen beim freiwilligen Verdunsten Krystalle, die wesentlich verschieden von den oben beschriebenen sind; ich behalte mir vor, über die zweite Säure, wie auch ihre Derivate Näheres bald mitzutheilen.

Die Formel der (*a*) Säure ist:

$$C_{12}H_8N_2.SO_3H.NO_2$$

Das Krystallwasser wechselt zwischen 8 bis 3 Molekülen, kann, da die Säure nur über Schwefelsäure krystallisirt, nicht zulässig bestimmt werden.

Die Stellungsfrage der Säure, und ob die Nitrogruppe und Sulfogruppe in einem oder zwei Kernen vertheilt sind, beschäftigt uns eben. Wir haben bislang auch die Amidosäuren dargestellt.

Durch Schmelzen der Monosulfosäure des Azobenzols mit Kaliumcyanid erhält man ein öliges Destillat, das braun ist, und als ein Nitril einer Monocarbonsäure des Azobenzols aufzufassen ist; durch Verseifung oder Kochen mit Salzsäure erhält man eine aus Äther in Blättern krystallisirende Säure, mit deren Untersuchung wir eben beschäftigt sind.

IX. SITZUNG VOM 30. MÄRZ 1882.

Herr Dr. L. J. Fitzinger führt als Alterspräsident den Vorsitz.

Das c. M. Herr Dr. Joachim Barrande in Prag übermittelt einen weiteren Band (Vol. VI, Text und 361 Tafeln) seines mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften herausgegebenen grossen Werkes: „Système silurien du centre de la Bohême", welcher die Acephalen enthält, und zugleich den im Auszuge erschienenen VI. Band dieses Werkes.

Herr Ingenieur Martin Kovatsch, Professor an der k. k. technischen Hochschule in Brünn, übermittelt ein Exemplar des von ihm herausgegebenen Werkes, unter dem Titel: „Die Versandung von Venedig und ihre Ursachen."

Der Secretär legt ein Dankschreiben von Herrn Dr. J. Puluj für die ihm zur Fortsetzung seiner Versuche über die elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen von der Akademie gewährte Subvention vor.

Das w. M. Herr Prof. L. v. Barth übersendet folgende Abhandlungen:

1. „Analyse eines vegetabilischen Fettes", von Herrn Friedrich Reinitzer, Assistent am chemischen Laboratorium der deutschen technischen Hochschule zu Prag.
2. „Studien über das Verhalten der Acetate des Chroms, Eisens und Aluminiums", von Herrn B. Reinitzer, Privatdocent für Chemie an derselben Hochschule.

Das c. M. Herr Prof. E. Ludwig übersendet zwei Arbeiten aus seinem Laboratorium von Herrn Dr. Hans Jahn:

1. „Über die Dampfdichte des Brom."
2. „Zur Kenntniss der Aminbasen secundärer Alkohole."

Herr Professor Dr. Eduard Tangl an der Universität in Czernowitz übersendet eine Abhandlung: „Über die Theilung der Kerne in Spirogyra-Zellen."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Die Construction der algebraischen Curven und Flächen mittelst reciproker linearer Systeme höherer Stufe", vorläufige Mittheilung von Herrn Prof. Dr. G. v. Escherich an der Universität in Czernowitz.
2. „Strahlende Elektrodenmaterie." IV. Abhandlung, von Herrn Dr. J. Puluj, Privatdocent und Assistent des physikalischen Cabinetes der Wiener Universität.
3. „Über die auf Flächen zweiten Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln", von Herrn Otto Rupp, Privatdocent an der technischen Hochschule in Brünn.

Ferner legt der Secretär eine von Herrn J. A. Kuczera in Göding behufs Wahrung der Priorität eingesendete versiegelte Abhandlung nebst Zeichnung unter der Aufschrift: „Centrifugalpendel-Kraftmotor" vor.

Das w. M. Herr Hofrath F. v. Hochstetter überreicht eine von Herrn Dr. Fritz Berwerth in Wien ausgeführte Arbeit: „Über die chemische Zusammensetzung der Amphibole."

Das w. M. Herr Director Dr. Steindachner überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung über einige neue und seltene Batrachier des Wiener Museums.

Das w. M. Herr Hofrath G. Tschermak spricht über die Beschaffenheit der bei Mócs in Siebenbürgen gefallenen Meteoriten.

Das w. M. Herr Director E. Weiss berichtet über den neuen Kometen, dessen Entdeckung durch Herrn Wells in Boston in der Nacht vom 18. auf den 19. März der hiesigen Sternwarte am 21. März gemeldet wurde.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 2e série, 46e année, tome XI. Nos. 10—12. Paris, 1882; 8°.

Accademia R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXIX 1881—1882. Serie terza. Transunti. Vol. VI. Fascicoli 7° et 8°. Roma, 1882; 4°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XVIII. Nr. 3—4. Halle a. S. 1882; 4°.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 1882. Janvier. 6ᵉ série, 2ᵉ année, 1ᵉʳ cahier. Paris; 8°. — Personnel. Paris, 1882; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XX. Jahrgang. Nr. 9. Wien, 1882; 8°.

Archiv für Mathematik und Physik. LXVII. Theil. 4. Heft. Leipzig, 1882; 8°.

Bibliothéque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3ᵉ période, tome VII. Nr. 2. Fevrier 1882. Genève, Lausanne, Paris, 1882; 8°.

Budapest, Universität: Akademische Schriften pro 1880—1881, 5 Stücke, 8°.

Bureau, k. statistisch-topographisches: Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde. Jahrgang 1881. I. Band, 1. u. 2. Hälfte, II. Band 1. u. 2. Hälfte. Stuttgart, 1881; 8°.

Central-Commission, k. k. zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- und historischen Denkmale: Mittheilungen N. F. VIII. Band, 1. Heft, Wien, 1882; 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VI. Nr. 12 u. 13. Cöthen, 1882; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCIV, Nos. 10 et 11. Paris, 1882; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. III. Jahrgang 1882. Heft III. März. Berlin; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XV. Jahrgang. Nr. 4, Berlin, 1882; 8°.

— k. k. mähr.-schles., zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde: Schriften der historisch-statistischen Section. XXV. Band. Brünn, 1881; 8°.

Gewerbe-Verein, niederösterr.: Wochenschrift. XLIII. Jahrgang Nr. 9—12. Wien, 1882; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. VII. Jahrgang. Nr. 9—12. Wien, 1882; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österreichischer: Zeitschrift. XXXIV. Jahrgang. 1882. I. Heft. Wien, 1882; gr. 4°.

Journal, the American of Science, 3. series. Vol. XXIII (whole number, CXXIII) Nr. 135. New Haven, 1882; 8°.

Kalischer, S.: Photophon ohne Batterie. Berlin, 1881; 8°. — Über den Einfluss der Wärme auf die Molecularstructur des Zinks. Berlin, 1881; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXVIII. Band, 1882. III. Gotha; 4°.

Museum, the American of Natural History; Bulletin Nr. 1 New-York, 1881; 8°.

Nature, Vol. XXV. Nos. 646 et 647. London, 1882; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 4. Wien, 1882; 8°.

Società degli Spettroscopisti italiani: Memorie. Vol. XI. Dispensa 1ª. Roma, 1882; 4°.

Société mathématique de France: Bulletin. Tome X. Nr. 1. Paris, 1882; 8°.

Society, the Royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLII. Nr. 4. London, 1882; 8°.

— the Royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. IV. Nr. 3. March 1882. London; 8°.

Tübingen, Universität: Akademische Schriften pro 1880—1881. 19 Stücke 4° u. 8°.

Tromsø Museum: Aarshefter IV. Tromsø, 1881; 8°. — Aarsberetning for 1880. Tromsø; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXII. Jahrgang Nr. 11 u. 12. Wien, 1882; 4°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. II. Jahrgang 1882. III. Heft. März. Berlin; 4°.

Über die Dampfdichte des Brom.

Von Dr. **Hans Jahn.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. E. Ludwig.)

(Mit 1 Holzschnitt.)

Das grosse Interesse, welches die von Victor Meyer angeregten Versuche über die Dampfdichte der drei Halogenelemente bei höheren Temperaturen erregt haben, liess es mir wünschenswerth erscheinen, durch genaue Versuche die Dampfdichte eines der beiden noch nicht untersuchten Elemente festzustellen bei Temperaturen, welche durch gewöhnliche Mittel herzustellen sind.

Wir besitzen für das Chlor eine derartige Versuchsreihe, welche vor einigen Jahren von E. Ludwig ausgeführt worden ist, während für das Brom sowohl wie für das Jod genauere Versuche noch nicht vorliegen. Ich entschloss mich daher, das Brom in derselben Weise auf seine Dampfdichte zu untersuchen, wie es Ludwig für das Chlor gethan hat.

Es liegt über die Dampfdichte des Brom, abgesehen von den neueren Versuchen von Victor und Carl Meyer, nur eine aus dem Jahre 1833 stammende Angabe von Mitscherlich vor. Dieser berühmte Forscher bestimmte die Dampfdichte des Brom bei 99·34° C. nach einer Modification der Dumas'schen Methode. Er fand:

$$D = 5{\cdot}54.$$

V. und C. Meyer erhielten bei einem Versuche, von dem sie selber aussagen, dass sich wegen des Spritzens der Substanz und anderer Übelstände mancherlei Einwände gegen ihn erheben lassen:

$$D = 5{\cdot}38.$$

Diese Zahlen reichen nun wohl aus, um über die Molecular-grösse des Brom keinen Zweifel bestehen zu lassen, allein die Bedeutung von Elementargrössen, auf die sich weitere Schlüsse stützen liessen, wollen und können sie wohl nicht in Anspruch nehmen.

Mitscherlich führte seine Versuche mit einem Präparat aus, über dessen Provenienz er nichts angibt. Wenn auch eine beiläufige Angabe über den Siedepunkt seines Brom, oberhalb 62° C., der mit dem von Stas und Pierre ermittelten Siedepunkt nahezu übereinstimmt, den Schluss zu berechtigen scheint, dass er ein verhältnissmässig reines Präparat in Händen hatte, so darf man doch nicht vergessen, dass seit der Zeit, wo Mitscherlich experimentirte, gerade die Kunst der Herstellung reiner Präparate die glänzendsten Fortschritte, besonders in Folge der classischen Versuche von Stas gemacht hat. Schon das ist ein Grund, um die Wiederholung derartiger Versuche wünschenswerth erscheinen zu lassen.

Andererseits gestattet die Dumas'sche Methode nicht, die Genauigkeit übermässig weit zu treiben, und Mitscherlich scheint bei der von ihm angewendeten Modification dieser Methode mit besonderen Schwierigkeiten gekämpft zu haben. Es ist ihm nie gelungen, die Luft aus dem Rohr, in welchem er den Dampf auf die Waage brachte, vollständig zu verdrängen. Gerade bei seinem Bromversuch zum Beispiel gibt er an, dass 6·9 CC. zurückgeblieben waren in einem Rohr, dessen Kubikinhalt 309 CC. betrug. Es musste also durch Rechnung das Gewicht des Brom corrigirt werden, und dass alle derartigen Correcturen der Genauigkeit der schliesslich resultirenden Versuchsdaten nicht gerade zuträglich sind, dürfte auf der Hand liegen.

Der Weg für meine Versuche war ein einfach vorgeschriebener, dieselben mussten mit einem tadellos reinen Präparat ausgeführt werden und mit Hilfe einer Methode, die bei verhältnissmässig geringem Materialverbrauche, wie er durch die Kostbarkeit des Materiales vorgeschrieben war, vollkommene Genauigkeit zu erreichen gestattete.

Was das Material anbelangt, so stützte ich mich, um nicht durch unnütze Versuche Zeit zu zersplittern, auf die Erfahrungen, welche Stas bei Gelegenheit seiner Versuche über das Atom-

gewicht des Brom gesammelt hat. Ich habe das Präparat vollkommen nach der Vorschrift von Stas hergestellt, indem ich nur in der Herstellung des Destillirapparates eine geringfügige Modification Platz greifen liess, die durch den Umstand geboten war, dass Stas mit Kilogrammen arbeitete, während ich mich mit Hektogrammen beschäftigte.

Ich ging von dem käuflichen Bromkalium aus. Dasselbe wurde in Wasser aufgelöst, welches durch Destillation unter Zusatz von Kaliumpermanganat gereinigt worden war, und zwar wurde die Lösung so weit verdünnt, dass ihr specifisches Gewicht geringer war als das des Schwefelkohlenstoffes. Die so bereitete Lösung wurde dann mit Bromwasser versetzt, bis eine deutlich orangerothe Färbung eintrat. Es genügte hiezu bei dem von mir verwendeten Bromkalium eine sehr geringe Quantität. Nachdem man diese Lösung während vierundzwanzig Stunden unter wiederholtem Umschütteln sich selber überlassen hatte, wurde sie mit reinem Schwefelkohlenstoff so lange ausgeschüttelt, bis sich der frisch zugesetzte Schwefelkohlenstoff nicht mehr färbte. Ich hebe hervor, dass ich nie eine deutliche Jodreaction erhielt, sondern dass immer nur eine orange Färbung eintrat, welche schon nach dem zweiten bis dritten Zusatz von Schwefelkohlenstoff nicht mehr wahrnehmbar war. Es konnte also das mir zu Gebote stehende Bromkalium nur verschwindend kleine Spuren von Jod enthalten. Die über dem Schwefelkohlenstoff befindliche Lösung wurde alsbald auf dem Wasserbade durch einige Zeit erhitzt, um die kleinen Mengen von Schwefelkohlenstoff, die in derselben enthalten sein konnten, vollständig zu entfernen.

Alsdann wurde zu dieser Lösung überschüssige Kalilauge gesetzt, und zwar so viel, dass auf ein Moleculargewicht Bromkalium etwas weniger als sechs Moleculargewichte Kaliumhydroxyd kamen. Von einer Reinigung des zu verwendenden Kaliumhydroxydes glaubte ich Umgang nehmen zu können. Für meine Zwecke handelte es sich ja nur darum, das Brom frei von flüchtigen Verbindungen zu erhalten und die nicht flüchtigen Verbindungen, welche durch ein weniger reines Kalihydrat in die Lösung kommen konnten, durfte ich wohl mit vollem Recht durch das complicirte Reinigungsverfahren, dem ich das Brom so wie so unterziehen musste, zu entfernen hoffen.

Diese stark alkalische Lösung wurde dann bei erhöhter Temperatur mit Chlor behandelt. Es wurden sechs Kolben zu je sechs Litern Rauminhalt mit je drei Litern der alkalischen Lösung beschickt, in grosse Blechgefässe gestellt, in denen sich Wasser befand, dessen Temperatur durch einen continuirlichen Dampfstrom auf 90 bis 100° C. erhalten wurde und durch die erwärmte Lösung während drei bis vier Tage ein kräftiger Chlorstrom geleitet, bis von dem Chlor nichts mehr aufgenommen wurde. Alsbald wurden die orangeroth gefärbten Lösungen auf einigen Wasserbädern erwärmt, um die kleinen Mengen von freiem Brom und Bromchlorid, die sich in Folge der unzureichenden Kalilauge gebildet hatten, vollständig zu entfernen und dann in der Kälte sich selber überlassen. Es schieden sich reichliche Mengen schön krystallisirten Kaliumbromates aus. Das so gewonnene rohe Salz wurde dann durch wiederholtes Umkrystallisiren gereinigt. Ich möchte ausdrücklich darauf aufmerksam machen, dass man gut thut, sich genau an die Vorschriften von Stas zu halten, weil man sich sonst einem ebenso unangenehmen als unnöthigen Material- und Zeitverlust aussetzt. Nur wenn man die Salzlösung sich unter stetem Umrühren schnell abkühlen lässt, so dass sich das Kaliumbromat in Gestalt eines ganz feinen Krystallmehles ausscheidet, darf man hoffen, durch zwei- bis dreimaliges Umkrystallisiren dem Präparat die gewünschte Reinheit zu geben. Die Krystallmasse wurde jedesmal, nachdem sich die Lauge vollständig abgekühlt hatte, mittelst einer gut ziehenden Wasserluftpumpe abgesaugt, die letzten Spuren der Mutterlauge wurden durch etwas Wasser verdrängt und die Krystalle so lange umkrystallisirt, bis ihre Lösung eine vollkommen neutrale Lösung von Silbersulfat selbst nach minutenlangem Kochen nicht mehr trübte. Ein Sechstel der Gesammtmenge des so erhaltenen reinen Kaliumbromates wurde getrocknet, die übrige Menge verwandelte ich sofort durch Erhitzen in kleinen Porcellanschälchen in Bromkalium.

Um nun aus diesen Salzen Brom zu gewinnen, wurden ein Moleculargewicht Kaliumbromat und fünf Moleculargewichte Bromkalium in Wasser aufgelöst und diese Lösung in einen Kolben gefüllt, an dessen Hals ein rechtwinkelig gebogenes weites Glasrohr angeschmolzen war, und welcher durch einen gut

eingeschliffenen Glasstöpsel verschlossen werden konnte. Das rechtwinkelig umgebogene Ende des Ableitungsrohres war mit einer geschliffenen Ausbuchtung versehen, welche luftdicht in den Hals eines zweiten, etwas kleineren Kolben passte. Von diesem Kolben führte ein Abzugsrohr zu einem dritten noch kleineren Kolben, in dessen Hals es gleichfalls eingeschliffen war. Der Hals des dritten Kolben endlich war mit einem gleichfalls rechtwinkelig gebogenen Rohre versehen, welches in reines Wasser eintauchte. Nachdem man in den zweiten Kolben eine Lösung von reinem Bromkalium gemischt mit etwas Kaliumbromat gefüllt hatte, wurden sämmtliche Kolben durch Eis und Kochsalz sorgfältig eingekühlt und zu dem Gemisch von Kaliumbromat und Bromkalium in dem ersten Kolben so viel reine Schwefelsäure hinzugetropft, dass alles Kalium in Kaliumhydrosulfat verwandelt werden konnte. Die von mir verwendete Schwefelsäure war vollkommen rein: die Direction der Heiligenstädter Schwefelsäurefabrik hatte die Liebenswürdigkeit, bei einer Destillation die mittlere Fraction getrennt für mich aufzufangen. Das zum Lösen der Salze benützte Wasser war, wie schon erwähnt wurde, gleichfalls durch eine Destillation unter Zusatz von Kaliumpermanganat thunlichst gereinigt worden.

Nachdem alle Schwefelsäure zugesetzt war, wurde der erste Kolben erwärmt, so dass das Brom in den zweiten fortwährend gekühlten Kolben überdestillirte, wo es sich in der Bromkaliumlösung auflöste. Nachdem alles Brom aus dem ersten Kolben verdrängt war, entfernte man denselben, verschloss den zweiten Kolben mit einem eingeschliffenen Glasstöpsel und erwärmte ihn auf einem Wasserbade, so dass das Brom in den dritten, stark gekühlten Kolben überdestillirte. Das Brom condensirte sich nahezu vollständig in demselben, so dass nur ganz geringfügige Mengen in das Wasser übergingen.

Das so gewonnene Bromwasser, sowie ein Theil des rohen Bromes wurden dazu verwendet, um reines Calciumoxyd in Bromcalcium zu verwandeln. In einer Lösung dieses Salzes wurde das gesammte Brom aufgelöst, mit Wasser gefällt und dann einer Trocknung mit einem dreimal erneuerten Gemenge von Calciumbromid und reinem Calciumoxyd, mit reinem Phosphorsäureanhydrid und geglühten Bariumoxyd unterzogen. Das so behandelte

Brom war eine dunkelrothbraune Flüssigkeit, welche beim Abkühlen merklich lichter wurde und den constanten Siedepunkt 63·07° C. zeigte, während Pierre und Stas den Siedepunkt des vollkommen reinen Brom bei 63° C. fanden. Das zu der Siedepunktbestimmung benützte Thermometer war ein auf der hiesigen Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus sorgfältigst corrigirtes. Ich konnte also mein Präparat als vollkommen rein betrachten.

Von allen Methoden zur Bestimmung der Dampfdichte war für den Zweck meiner Arbeit nur die Bunsen'sche verwendbar.

Bezüglich der Einzelheiten des Experimentes kann ich auf die berühmte Abhandlung dieses Forschers verweisen, ich will nur einige Modificationen kurz besprechen, die ich angewendet habe.

Was die Verschlüsse der zur Aufnahme der Substanz und der trockenen Luft bestimmten Gefässe anbelangt, so benützte ich die von Herrn Prof. Ludwig vorgeschlagenen und schon von O. v. Dumreicher bei Gelegenheit seiner Versuche über die Dichte des Stickstoffmonoxydes angewendeten Glaskappen. Dieselben waren in dem Atelier der berühmten Bonnenser Firma Dr. Geissler's Nachfolger angefertigt. Ich kann die Erfahrungen des Herrn von Dumreicher, was die Zuverlässigkeit dieses Verschlusses anbelangt, vollkommen bestätigen. Es genügt, die Kappen mit einer geringen Menge von Vaselin zu bestreichen, um einen absolut luftdichten Verschluss zu erzielen.

Ich habe beim Beginne meiner Versuche mit Äther, welche ich ausführte, um mich über die Brauchbarkeit der alsbald zu besprechenden Methode zur Füllung des Dampfgefässes zu informiren, eine ganze Reihe von Versuchen so eingerichtet, dass sie zugleich eine Probe für die Sicherheit des Verschlusses abgaben.

Es ergab zum Beispiel die Wägung des Äthergefässes mit Hilfe der Schwingungsmethode folgende Daten:

Gefäss mit Äther;
Zugelegte Gewichte 0·6050.

Beobachtete Schwingungen.

\+ nach links. — nach rechts.

$$\begin{array}{rl} +3{\cdot}3 & \\ & -2{\cdot}9 = -1{\cdot}45.2 \\ -6{\cdot}2 & \\ & -3{\cdot}1 = -1{\cdot}55.2 \\ +3{\cdot}1 & \\ & -2{\cdot}9 = -1{\cdot}45.2 \\ -6{\cdot}0 & \\ & -3{\cdot}1 = -1{\cdot}55.2 \\ +2{\cdot}9 & \\ & -2{\cdot}9 = -1{\cdot}45.2 \\ -5{\cdot}8 & \\ & -3{\cdot}1 = -1{\cdot}55.2 \\ +2{\cdot}7 & \\ & -2{\cdot}9 = -1{\cdot}45.2 \\ -5{\cdot}6 & \\ & -3{\cdot}1 = -1{\cdot}55.2 \\ +2{\cdot}5 & \end{array}$$

$$\text{Mittel } r = -\frac{11{\cdot}90}{8} = -1{\cdot}4875.$$

Ich liess nun das Gefäss dreimal vierundzwanzig Stunden auf der Waage stehen, und wiederholte dann die Beobachtung:

Beobachtete Schwingungen:

$$\begin{array}{rl} +3{\cdot}4 & \\ & -2{\cdot}9 = -1{\cdot}45.2 \\ -6{\cdot}3 & \\ & -3{\cdot}1 = -1{\cdot}55.2 \\ +3{\cdot}2 & \\ & -2{\cdot}9 = -1{\cdot}45.2 \\ -6{\cdot}1 & \\ & -3{\cdot}1 = -1{\cdot}55.2 \\ +3{\cdot}0 & \\ & -2{\cdot}9 = -1{\cdot}45.2 \\ -5{\cdot}9 & \\ & -3{\cdot}1 = -1{\cdot}55.2 \\ +2{\cdot}8 & \\ & -2{\cdot}9 = -1{\cdot}45.2 \\ -5{\cdot}7 & \\ & -3{\cdot}0 = -1{\cdot}50.2 \\ +2{\cdot}7 & \end{array}$$

$$\text{Mittel } r = -\frac{11{\cdot}95}{8} = -1{\cdot}49375.$$

Das Gewicht des Gefässes hatte sich also nicht geändert, woraus der Beweis erfliesst, dass es vollkommen luftdicht verschlossen war.

Es bedarf kaum einer ausdrücklichen Erwähnung, dass die Menge des in die Glaskappe gebrachten Vaselins durch eine genaue Wägung mit Hilfe der Schwingungsmethode ermittelt und in geeigneter Weise in Abzug gebracht wurde.

Zum Erwärmen der Gefässe benützte ich bei den drei ersten Versuchsreihen den von Prof. E. Ludwig angegebenen Thermostaten, welcher schon von O. v. Dumreicher beschrieben und abgebildet worden ist. Ich benützte zum Erwärmen den Dampf von Wasser, reinem Amylalkohol und reinem Anilin. Der Thermostat wurde, um eine dem Siedepunkte der angeführten Substanzen möglichst naheliegende Temperatur zu erzielen, mit einer 12 Meter langen Binde aus grobem Flanell umwunden, wodurch alle unnöthige Wärmeabgabe nach Aussen durch Strahlung u. s. f. vollkommen verhindert wurde. Für die zwei letzten Versuchsreihen bei Temperaturen, welche oberhalb 200° C. lagen, verwendete ich einen nach dem Principe des Bunsen'schen Thermostaten construirten Apparat. Das Stationärbleiben der Temperatur wurde bei jedem Versuch durch ein während der Dauer des ganzen Versuches in dem Apparate befindliches Thermometer controlirt.

Bunsen verwendete bei seinen Versuchen mit Flüssigkeiten die Dumas'sche Füllungsmethode. Er füllte in das Dampfgefäss eine überschüssige Menge der Flüssigkeit ein und verschloss das Gefäss, wenn gewisse Erscheinungen an dem Apparate darauf hindeuteten, dass alle Flüssigkeit in Dampf verwandelt sei. Es hat das sein Missliches, denn, da man in den Thermostaten nicht hineinsehen kann, so könnte es vielleicht trotz aller Vorsicht geschehen, dass ein Theil der Flüssigkeit nicht vollständig verdampft ist, so dass die Resultate illusorisch werden. Ferner trat für meine Versuche speciell das Bedenken ein, dass die so überaus sinnreiche Vorrichtung, welche Bunsen anwendete, um das Eindringen der Luft in das Dampfgefäss zu verhindern, für meine Zwecke nicht anwendbar war, da der erhitzte Bromdampf den Platinstab angegriffen hätte, wodurch die Resultate unbrauchbar geworden wären.

Ich ging diesen Schwierigkeiten in folgender Weise aus dem Wege. Ich liess mir ein Siedekölbchen mit luftdicht schliessendem Glasstöpsel anfertigen, dessen Rauminhalt so berechnet war, dass es bei halber Füllung eine Flüssigkeitsmenge enthielt, welche das zwanzigfache Volumen des Dampfgefässes an Dampf zu liefern vermochte. An das Abzugsrohr, welches, um den schädlichen Raum thunlichst zu verringern, unmittelbar unter der

unteren Fläche des Glasstöpsels mündete, wurde eine Capillare angeschmolzen, welche bis auf den Boden des Dampfgefässes reichte.

Der Versuch wurde dann in der Weise eingerichtet, dass die Flüssigkeit in dem Kölbchen mit Hilfe eines kleinen Glycerinbades erwärmt wurde, so dass ein continuirlicher Dampfstrom in das vorher erhitzte Gefäss eintrat. Die Temperatur des Glycerinbades wurde immer so regulirt, dass die Flüssigkeit continuirlich abdunstete, ohne je zum eigentlichen Sieden zu kommen. Damit sich in der Capillare und in dem Theil des Gefässhalses, welcher aus dem Thermostaten hervorragte, keine Flüssigkeit condensiren könne, wurden beide mit einem feinen Drahtgitter umwunden, das mit Hilfe eines kleinen Brenners erwärmt wurde. War die Flüssigkeit in dem Siedekölbchen nahezu vollständig verdunstet, worüber in der Regel dreiviertel Stunden verflossen, so zog ein Gehilfe das Kölbchen mit sammt dem Glycerinbade zurück und im Momente, wo die Capillare das Gefäss verliess, verschloss ich mit der bereit gehaltenen Glaskappe das Gefäss.

Ich führte zunächst eine Versuchsreihe mit Äther durch, den ich durch Ausschütteln mit Wasser sowie mehrmalige Destillation über geschmolzenem Chlorcalcium und metallischem Natrium gereinigt hatte. Die Übereinstimmung der Zahlen unter einander so wie mit den Zahlen, welche Horstmann bei derselben Temperatur erhalten hat, lieferten mir die volle Bürgschaft dafür, dass die Genauigkeit der Methode durch diese Modification keine Einbusse erlitt. Ich hebe aus den zahlreichen Versuchen der Art, welche ich ausgeführt habe, einige auf das Gerathewohl heraus:

I.

Gewicht des Äthers . . . 0·6074 Grm.
„ der Luft . . . . 0·2325 „
Dampfdichte . . . . . 2·612.

II.

Gewicht des Äthers . . 0·6139 Grm.
„ der Luft . . . . . 0·2345 „
Dampfdichte . . . . . 2.618.

III.

Gewicht des Äthers...0·6238 Grm.
„ der Luft.....0·2382 „
Dampfdichte .....2·618.

IV.

Gewicht des Äthers ...0·6146 Grm.
„ der Luft .....0·2351 „
Dampfdichte .....2·614.

V.

Gewicht des Äthers ...0·6084 Grm.
„ der Luft .....0·2327 „
Dampfdichte .....2·614.

VI.

Gewicht des Äthers ...0·6146 Grm.
„ der Luft .....0·2350 „
Dampfdichte .....2·615.

Diese Versuche wurden im Wasserdampfe ausgeführt, und zwar betrug die Temperatur im Thermostaten 81 bis 82° C. da ich den Wasserdampf ziemlich langsam circuliren liess und der Apparat nicht mit Flanell umhüllt war. Horstmann erhielt bei einer Temperatur von 81·1° C. für die Dampfdichte des Äthers den Werth:

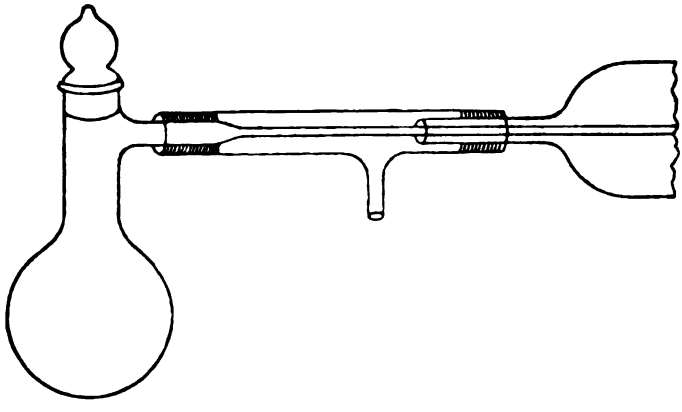
2·610,

der also mit den von mir ermittelten Werthen vollkommen übereinstimmt.

Die Wägungen wurden, wie schon erwähnt, mit Hilfe der Schwingungsmethode ausgeführt. Ich bediente mich bei den entscheidenden Wägungen, bei denen sich auf den beiden Schalen der Waage die luftleer gepumpten Gefässe befinden, eines Gewichtssatzes, dessen einzelne Gewichtsstücke durch Herrn Prof. E. Ludwig sorgfältigst auf ihren mittleren Fehler untersucht sind, so dass also alle von mir angeführten Gewichte corrigirte Grössen sind.

Die Temperatur wurde nach bekannten Formeln aus dem Gewichte der Luft berechnet. Der Barometerstand wurde unmittelbar nach dem Schliessen der Gefässe an einem in demselben Arbeitsraume befindlichen Instrumente abgelesen.

Es erschien nun wünschenswerth, eine Vorrichtung zu treffen, welche eine vollständige Condensation des überschüssigen, aus dem Gefäss entweichenden Dampfes ermöglichte. Denn abgesehen davon, dass für die in Aussicht genommenen Versuche mit Brom eine derartige Vorrichtung schon mit Rücksicht auf die Gesundheit des Experimentators geboten war, musste man doch, um unvermeidlichen Unglücksfällen nicht wehrlos gegenüber zu stehen, bestrebt sein, die kostbare und mit so vieler Mühe dargestellte Substanz möglichst vollständig wiederzugewinnen.



Die von mir zu dem besagten Zwecke verwendete Vorrichtung war eine äusserst einfache. Um die aus dem Thermostaten hervorragende Spitze des Halses von dem Dampfgefässe wurde eine Lage vollkommen reiner Glaswolle gewickelt und durch Umwinden mit einem dünnen Platindraht in einen ziemlich dichten Stopfen verwandelt. Über denselben wurde nun, wie es die obenstehende Figur versinnlicht, das eine Ende des horizontalen Schenkels eines T-förmigen Rohres geschoben, welches mit einem engmaschigen Metallnetz umwunden war, so dass es ohne Gefahr erwärmt werden konnte. Der horizontale Schenkel des T-Rohres war so lang, dass er die an dem Siedekolben angeschmolzene Capillare vollständig umgab. Das obere Ende war

gleichfalls durch einen Glaswollpfropf verschlossen. Das vertical abwärts gerichtete Rohr mündete in ein unten zugeschmolzenes Glasröhrchen, welches während des Versuches durch Eis und Kochsalz sorgfältig gekühlt wurde.

Trug man durch hinreichend hohes Erhitzen des unteren, um das Dampfgefäss gewickelten Pfropfens Sorge, dass sich in demselben keine Flüssigkeit condensiren konnte, so entwich keine Spur von Brom. Dasselbe sammelte sich fast vollständig in dem gekühlten Röhrchen und konnte nach einmaliger Destillation über gut geglühtem Bariumoxyd ohne weiteres zu neuen Versuchen verwendet werden.

Wenn nun auch nicht zu vermuthen war, dass durch die Condensationsvorrichtung eine wesentliche Complication des Versuches eingeführt würde, so zog ich es doch vor, einige Versuche mit Äther auszuführen, ehe ich an die Versuche mit Brom ging. Die Resultate dieser Versuche waren:

I.

Gewicht des Äthers .....0·625617 Grm.
„ der Luft .....0·240797 „
Dampfdichte.....2·598.
Berechnete Temperatur 92°.

II.

Gewicht des Äthers .....0·62459 Grm.
„ der Luft .....0·24004 „
Dampfdichte.....2·602.
Berechnete Temperatur 94°.

III.

Gewicht des Äthers .....0·62352 Grm.
„ der Luft .....0·23936 „
Dampfdichte.....2·605.
Berechnete Temperatur 94°.

Horstmann fand für die Dampfdichte des Äthers bei 93° den Werth

2·603,

also befinden sich meine Versuche in vollkommener Übereineinstimmung mit den seinigen.

Nachdem also diese Versuche die vollkommene Zuverlässigkeit und Brauchbarkeit der in Aussicht genommenen Modification der Bunsen'schen Methode erwiesen hatten, trug ich kein Bedenken, die eigentlichen Versuche mit Brom in Angriff zu nehmen.

I. Versuchsreihe.

Der Thermostat wurde mit überhitztem Wasserdampf erwärmt.

Aus dem Luftgewicht berechnete Temperatur 102·6° C. im Mittel.

I.

Gewicht des Brom .....1·3377 Grm.
„ der Luft .....0·23376 „
Dampfdichte .....5·7225.

II.

Gewicht des Brom .....1·3348 Grm.
„ der Luft .....0·23259 „
Dampfdichte .....5·7388.

III.

Gewicht des Brom .....1·3372 Grm.
„ der Luft .....0·23366 „
Dampfdichte .....5·7228.
Mittlerer Werth 5·728.

Die Resultate schwanken etwas, offenbar weil es trotz aller Vorsicht nicht vollständig zu vermeiden war, dass sich beim Herausziehen der Capillare geringe Mengen von Brom condensirten, doch übersteigt die grösste Abweichung vom mittleren Werth nicht 0·19 Percent desselben, liegt also vollkommen innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler.

II. Versuchsreihe.

Der Thermostat wurde durch Amylalkoholdampf erwärmt. Der benützte Amylalkohol war aus der Fabrik von C. A. F. Kahlbaum bezogen und hatte einen vollkommen constanten Siedepunkt.

Aus dem Luftgewicht berechnete Temperatur im Mittel: 131·92° C.

I.

Gewicht des Brom .....1·2317 Grm.
„ der Luft .....0·21858 „
Dampfdichte .....5·635.

II.

Gewicht des Brom .....1·2363 Grm.
„ der Luft .....0·21896 „
Dampfdichte .....5·646.

III.

Gewicht des Brom .....1·2180 Grm.
„ der Luft .....0·21601 „
Dampfdichte .....5·638.
Mittlerer Werth 5·640.

Die grösste Abweichung von dem mittleren Werth beträgt 0·1 Percent dieses Werthes.

III. Versuchsreihe.

Der Thermostat wurde durch den Dampf von vollkommen reinem, constant siedendem Anilin erwärmt.

Aus dem Luftgewicht berechnete Temperatur: 175·58° C. im Mittel.

I.

Gewicht des Brom .....1·1014 Grm.
„ der Luft .....0·19658 „
Dampfdichte .....5·603.

II.

Gewicht des Brom .....1·0641 Grm.
„ der Luft .....0·18985 „
Dampfdichte .....5·605.
Mittlerer Werth 5·6040.

Zwischen den beiden Versuchen lag ein Zeitraum von acht Tagen, während welcher sich der Barometerstand stark verändert hatte, daher die starke Abweichung der absoluten Gewichte sowohl des Brom als der Luft von einander.

IV. Versuchsreihe.

Es wurde der Bunsen'sche Thermostat benützt. Die aus dem Luftgewicht berechnete Temperatur betrug 210·32° C. im Mittel.

I.

Gewicht des Brom .....1·0125 Grm.
„ der Luft .....0·18267 „
Dampfdichte .....5·543.

II.

Gewicht des Brom .....1·0184 Grm.
„ der Luft .....0·18353 „
Dampfdichte .....5·549.
Mittlerer Werth 5·546.

V. Versuchsreihe.

Es wurde derselbe Thermostat wie bei der vierten Versuchsreihe benützt, nur wurden die Brenner etwas näher an die Kupferhüllen gerückt. Die aus dem Luftgewichte berechnete Temperatur betrug 227·94° C. im Mittel.

I.

Gewicht des Brom .....0·98053 Grm.
„ der Luft .....0·17750 „
Dampfdichte .....5·5241.

II.

Gewicht des Brom .....0·97972 Grm.
„ der Luft .....0·17734 „
Dampfdichte .....5·5245.

III.

Gewicht des Brom .....0·97633 Grm.
„ der Luft .....0·17673 „
Dampfdichte .....5·5244.
Mittlerer Werth 5·5243.

Stas hat durch seine classischen Versuche für das Atomgewicht des Brom den Werth 79·951 gefunden, wenn man das Atomgewicht des Sauerstoffes gleich 16 setzt. Es beträgt mithin die nach dem Avogadro'schen Gesetze berechnete theoretische Dampfdichte:

$$\frac{159{\cdot}902}{28{\cdot}943} = 5{\cdot}5247,$$

ein Werth, mit welchem der bei der fünften Versuchsreihe erhaltene Werth vollkommen identisch ist.

Allein ausser dieser Bestätigung des von Stas bestimmten Atomgewichtes lässt sich aus diesen Versuchsdaten noch ein weiteres, wie mir scheint ziemlich bemerkenswerthes Resultat ableiten.

Vereinigt man die bei verschiedenen Temperaturen gefundenen Dampfdichten des Brom in eine Formel von der Gestalt: $D = a + bt$, so erhält man nach der Methode der kleinsten Quadrate für die Constanten a und b die wahrscheinlichsten Werthe: $a = 5{\cdot}8691$; $b = -0{\cdot}00153$. Diese lineare Formel stellt die Beobachtungen ziemlich genau dar. Es ist:

	Dichte	
	nach der Formel	
Temperatur	berechnet	direct gefunden
102·6 ° C.	5·7122	5·7280
131·92	5·6673	5·6400
175·58	5·6005	5·6040
210·32	5·5473	5·5460
227·92	5·5204	5·5243

Die beiden ersten Versuchsreihen fügen sich dieser Formel nicht vollkommen genau, doch betragen die Abweichungen 0·3 Percent, beziehlich 0·5 Percent des beobachteten Werthes, scheinen mir mithin noch innerhalb der Grenzen des Zulässigen zu liegen. Für die drei letzten Versuchsreihen ist die Übereinstimmung zwischen den berechneten und direct gefundenen Werthen eine vollkommene.

Der Grund für die nicht vollständige Übereinstimmung der beiden ersten Versuchsreihen ist unschwer darin zu finden, dass bei den betreffenden Temperaturen, die ja dem Siedepunkte des Brom noch verhältnissmässig nahe liegen, die den Verlauf der Dichteabnahme darstellende Curve noch keine gerade Linie, sondern ein Kegelschnitt ist. Berechnet man nämlich mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate eine quadratische Formel, so findet man:

$$D = 5{\cdot}5189 - \frac{8{\cdot}535}{t} + \frac{3190{\cdot}04}{t^2}$$

eine Formel, die sich den Beobachtungen der beiden ersten Versuchsreihen vollkommen anschliesst.

	Dichte	
Temperatur	berechnet	gefunden
102·6°	5·729	5·728
131·92	5·638	5·640

von da ab verläuft die Curve linear, so dass die frühere Formel Platz greift.

Da es sich nun aber bei den alsbald anzustellenden Betrachtungen um Abweichungen von ganzen Percenten handelt, während die nach der ersten Formel berechneten Werthe von den durch directe Beobachtung gefundenen um höchstens ein halbes Percent abweichen, so glaube ich ohne Bedenken die erste Formel durchwegs anwenden zu können.

Berechnet man nun mit Hilfe dieser Formel die Dichte des Bromdampfes für Temperaturen oberhalb des Siedepunktes des Brom, die von 20 zu 20° aufsteigen, und bestimmt die Abweichungen der so berechneten Dichten von der normalen Dichte in Percenten der letzteren, so findet man:

Temperaturen oberhalb des Siedepunktes	Dichte	Abweichungen von der normalen	Differenz
40°	5·7115	3·381	0·554
60	5·6809	2·827	0·554
80	5·6503	2·273	0·554
100	5·6197	1·719	0·554
120	5·5891	1·165	0·553
140	5·5585	0·612	0·554.
160	5·5279	0·058	

Wir besitzen eine ganz analoge Versuchsreihe über die Dichte des Chlor, welche vom Prof. E. Ludwig ausgeführt worden ist. Die Resultate dieser Versuchsreihe lassen sich mit vollkommener Genauigkeit darstellen durch die lineare Formel

$$D = 2{\cdot}4855 - 0{\cdot}00017\,t$$

wie aus einer Vergleichung der direct beobachteten und aus dieser Formel berechneten Werthe für D hervorgeht:

t	Dichte nach der Formel berechnet	Dichte gefunden
20°	2·4821	2·4807
50	2·4770	2·4783
100	2·4685	2·4685
150	2·4600	2·4609
200	2·4515	2·4502

Die aus dem Stas'schen Atomgewicht berechnete normale Dichte beträgt:

2·4501

Nehmen wir nun mit Regnault den Siedepunkt des flüssigen Chlor zu —33·6° C. an, und bestimmen wir genau, wie es oben für das Brom geschehen ist, die Dichte des Chlor bei Temperaturen oberhalb seines Siedepunktes, die in gleichen Intervallen aufsteigen, ebenso wie die Abweichungen der gefundenen Dichten von der normalen ausgedrückt in Percenten der letzteren, so finden wir:

Temperaturen oberhalb des Siedepunktes	Dichten	Abweichungen von der normalen	Differenz
40	2·4844	1·397	
			0·136
60	2·4810	1·261	
			0·139
80	2·4776	1·122	
			0·138
100	2·4742	0·984	
			0·139
120	2·4708	0·845	
			0·139
140	2·4674	0·706	
			0·135
160	2·4641	0·571	
			0·142
180	2·4606	0·429	
			0·139
200	2·4572	0·290	
			0·188
220	2·4538	0·102	
240	2·4504	0	

Ein Vergleich dieser beiden Zahlenreihen ergibt unmittelbar, dass während das Chlor anfänglich eine weit geringere Abweichung von der normalen Dichte zeigt als das Brom, das letztere sich doch bedeutend schneller der normalen Dichte nähert als das erstere.

Während das Chlor ein Temperaturintervall von 240° oberhalb seines Siedepunktes durchlaufen muss, um die normale Dichte zu erreichen, gelangt das Brom schon bei einer Temperatur zu diesem Werth, der sich nur um 160° über seinen Siedepunkt erhebt.

Für das Jod liegt keine Versuchsreihe, wie für das Chlor und das Brom vor, allein es liegt auf Grund der übereinstimmenden Versuche von Victor Meyer, sowie von Crafts und Fr. Meyer die Vermuthung nahe, dass das Jod schon bei Temperaturen, die sich nur um geringe Werthe über seinen Siedepunkt erheben, die normale Dampfdichte hat. So fand Victor Meyer bei 253° C. für die Dichte des Joddampfes:

8·89, beziehlich 8·83,

während die normale Dichte

8·78

beträgt. Da nun nach den Angaben von Stas der Siedepunkt des reinen Jod gegen 250° C. angenommen werden muss, so würde also das Jod schon bei seinem Siedepunkte die normale Dichte haben.

Die plausibelste Vorstellung, die wir uns über den Grund der Abweichungen der beobachteten Dampfdichten von der normalen bilden können, ist wohl die, dass der Dampf bei Temperaturen, die nicht allzuhoch über dem Siedepunkt der Flüssigkeit liegen, noch Molecularaggregate enthält, die sich erst bei weiterer Steigerung der Temperatur in die einzelnen Moleceln auflösen. Nun sollte man doch wohl von vorneherein vermuthen, dass diese Molecularaggregate sich um so schwieriger zerlegen, je grösser die Masse der einzelnen Moleceln ist, da ja die Attractionskraft, welche dieselben aufeinander ausüben, ihrer Masse proportional sein müsste. Das ist nun aber nicht der Fall, die schwereren Brommoleceln trennen sich viel leichter von einander als die ungleich leichteren Chlormoleceln.

Sollte da eine der Attraction entgegengesetzte Kraft, etwa die der Masse proportionale, durch die Rotation der Moleceln verursachte Centrifrugalkraft bedingend sein?

Zur Kenntniss der Aminbasen secundärer Alkohole.

Von Dr. **Hans Jahn.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. E. Ludwig.)

Die in den folgenden Zeilen beschriebenen theils fremden theils eigenen Beobachtungen sind vielleicht geeignet, zu den zahlreichen Unterschieden, die man sowohl in den physikalischen wie in den chemischen Eigenschaften der primären und secundären Alkohole seit langer Zeit kennt, einen neuen hinzuzufügen. Ich enthalte mich jeder Speculation zur Erklärung der zu besprechenden Eigenschaften und begnüge mich damit, die einfachen Thatsachen vorzulegen, weil die Beobachtungen nicht so weit abgeschlossen sind, um endgiltige, allgemeine Resultate aus ihnen ziehen zu können, und andere Aufgaben mich vor der Hand verhindern, dieser Frage nachzugehen.

Es ist eine bekannte Thatsache, auf die schon die ersten Entdecker der Aminbasen hingewiesen haben, dass bei der Einwirkung von Ammoniak auf ein Alkyljodür die vier möglichen Verbindungen bis zum Tetraalkylammoniumjodür entstehen. Man machte nun aber bei den Versuchen, die von Hofmann entdeckte allgemeine Methode für die Synthese von Senfölen auch zur Darstellung von Senfölen mit secundären Alkylresten zu verwerthen, die zunächst überraschende Beobachtung, dass bei der Herstellung des dazu nöthigen Amins durch Einwirkung von alkoholischem Ammoniak auf das entsprechende Alkyljodür sich ausschliesslich das Jodhydrat des Monamin bildete neben nicht unbedeutenden Mengen von Jodammonium und den entsprechenden Olefinen. Weitere Versuche, durch Einwirkung des Alkyljodüres auf das Amin zu höher substituirten Aminen zu gelangen, führten auch zu keinem Resultate. So beobachtete S. Reymann (Ber. d. deutsch. chem. Ges. VII, p. 1289—1290), dass das secundäre Butylamin, welches durch Einwirkung von Schwefelsäure

auf secundäres Butylsenföl erhalten worden war, bei der Einwirkung von secundärem Butyljodür nicht wahrnehmbare Spuren des Di- und Triamins bildete, sich vielmehr zum grössten Theile in Butylen und seine Polymeren verwandelte. Später machte J. Uppenkamp (ibid. VIII, p. 55 flgde, Inauguraldissertation, p. 24 flgde) die Beobachtung, dass secundäres Hexyljodür aus Mannit bei der Einwirkung von alkoholischem Ammoniak neben reichlichen Mengen von Hexylen und Polyhexylenen ausschliesslich reines Monamin lieferte, das sich auch durch Hexyljodür nicht weiter substituiren liess, und ich (Ber. d. deutsch. chem. Ges. VIII, p. 803 flgde, Inauguraldissertation p. 28) machte dieselbe Erfahrung bei meinen Versuchen, einige Derivate des secundären Octylalkoholes darzustellen.

Die Frage, ob in diesem von dem Verhalten der primären Amine so ganz verschiedenem Verhalten der secundären Amine eine allgemeine Eigenschaft derselben zum Ausdrucke komme oder nicht, glaube ich, gestützt auf die eben kurz erwähnten Beobachtungen, sowie auf einige Controlsversuche, die ich im verflossenen Winter ausgeführt habe, im bejahenden Sinne beantworten zu können.

Ich führte zunächst einige Versuche mit

Isopropyljodür

durch.

Es ist für die vorliegende Frage nicht ohne Bedeutung, dass die in der Literatur vorhandenen Angaben über Isopropylamin sich mit einer Ausnahme auf ein Amin beziehen, welches nicht durch die gewöhnliche Methode, sondern auf Umwegen erhalten wurde. Gautier (Jahresber. 1868, p. 649) erhielt das Isopropylamin aus dem durch Einwirkung von Silbercyanür auf Isopropyljodür dargestellten Pseudonitril. Siersch (Liebigs Annalen 148, p. 263) erhielt es neben Diisopropylamin durch Verseifung des rohen aus Kaliumcyanür und Isopropyljodür dargestellten Nitriles durch Salzsäure und Silva (Liebigs Annalen 154, p. 254) endlich gibt an, er hätte durch Einwirkung von Ammoniak auf Isopropylnitrat ein Gemenge von Isopropyl- und Diisopropylamin erhalten, ohne jedoch seine Angaben durch analytische Daten zu stützen. Berthelot und Luca (Gmelin, Suppl. p. 541) erhielten durch

Einwirkung von Ammoniak auf Allyljodür etwas Isopropylamin, dessen Entstehung wohl ohne Zweifel einer Verunreinigung des verwendeten Allyljodüres durch Isopropyljodür zuzuschreiben war.

Ich verwendete zu meinen Versuchen reines Isopropyljodür, welches mit starkem alkoholischem Ammoniak einige Stunden in zugeschmolzenen Röhren auf 100° erhitzt wurde. Die Röhren öffneten sich ohne Druck. Der Röhreninhalt wurde auf dem Wasserbade abdestillirt. Schon bei gelindem Erwärmen beobachtete man ein feines Aufperlen der Flüssigkeit, was, da der Geruch nach Ammoniak fast vollständig verschwunden war, einem absorbirten Gase zugeschrieben werden musste. Ich richtete daher einen zweiten Versuch so ein, dass der Röhreninhalt auf dem Wasserbade am Rückflusskühler erwärmt wurde, während ein kräftiger Wasserstoffstrom durch die Flüssigkeit passirte, und alle sich etwa entwickelnden Gase durch einen mit concentrirtem Bromwasser beschickten Peligot'schen Absorptionsapparat trieb. Das Bromwasser war in der That nach einiger Zeit entfärbt, und es hatten sich einige Tropfen einer schweren nach Propylendibromür riechenden Flüssigkeit abgesetzt, deren Mengen leider zu geringe waren, um ihre Zusammensetzung durch eine Analyse controliren zu können. Es nahm mich das nicht Wunder bei der grossen Neigung des Propylens, sich zu condensiren, die ich schon bei der Zersetzung der Propylalkohole durch Zinkstaub kennen zu lernen Gelegenheit hatte, und die sich bei diesen Versuchen auf's Neue zeigte. Versetzt man nämlich das alkoholische Destillat mit viel Wasser, so scheidet sich eine farblose, leicht bewegliche Flüssigkeit ab, die leichter als Wasser ist, jedoch innerhalb so weiter Temperaturgrenzen ohne die leiseste Andeutung eines stationären Siedepunktes siedete, dass auf eine Trennung ihrer Bestandtheile durch fractionirte Destillation von vornherein verzichtet werden musste. Dass diese Flüssigkeit jedoch als ein Gemenge ungesättigter Verbindungen anzusprechen sei, ergab sich unzweideutig aus ihrem Verhalten gegen Brom, welches unter momentaner Entfärbung und ohne die geringste Bromwasserstoffentwicklung aufgenommen wurde. Die Mengen dieser Flüssigkeit waren im Verhältnisse zu denen des angewendeten Isopropyljodüres keine geringen, so dass ich keine

übermässig grossen Mengen des gewünschten Amines zu erwarten hatte.

Der zur Trockne gebrachte Destillationsrückstand wurde mit überschüssiger Kalilauge destillirt, und das Flüchtige in reinem destillirtem Wasser aufgefangen. Bestand die so gewonnene flüchtige Base aus einem Gemenge der Amine, so bot die Hofmann'sche Senfölreaction ein willkommenes Mittel, um den grössten Theil des Monamin fortzuschaffen, und die höher substituirten Ammoniake gewissermassen zu concentriren. Es wurde demnach das basische Destillat mit überschüssigem Schwefelkohlenstoff eine Stunde unter häufigem Umschütteln stehen gelassen, und darauf über Quecksilberchlorid im Dampfstrome destillirt. Es machte sich alsbald der stechende Geruch eines Senföles geltend. Das Destillat wurde mit Äther ausgeschüttelt, und die gewonnene Flüssigkeit nach dem Abdestilliren des Äthers über Chlorcalcium getrocknet. Die Menge des so gewonnenen Senföles war eine minimale, es liess sich aber trotzdem die Senfölnatur desselben mit vollkommener Sicherheit nachweisen. Ich bemerke über dieses noch nicht beschriebene Senföl, dass es eine farblose, stechend riechende, bei 137°—137°, 5 C. siedende Flüssigkeit ist, die sich bei längerem Stehen mit starkem wässerigem Ammoniak in ein Thiosinamin verwandelt. Dasselbe krystallisirt in hübschen Blättchen, die bei 157° C. schmelzen, und deren Zusammensetzung durch eine Schwefelbestimmung controlirt wurde:

0·3081 Grm. angew. Subst. lieferten 0·6111 Grm. $BaSO_4$.

Dem entsprechen:

	Gefunden:	Ber. f. $CS\langle^{NHC_3H_7}_{NH_2}$
S.....	27·24%	27·11%

Filtrirt man nun den Rückstand der Senfölbereitung von dem ausgeschiedenen Quecksilbersulfid ab, fällt aus dem Filtrat das überschüssige Quecksilberchlorid durch Schwefelwaserstoff, und dampft das Filtrat zur Trockene ein, so erhält man eine nicht unbedeutende Krystallmasse, die nach vollständiger Trocknung mit absolutem Alkohol ausgekocht wurde, um die organischen Verbindungen von der Hauptmasse des Salmiak zu trennen. Es

blieb die überwiegende Menge der Krystallmasse ungelöst. Die alkoholische Lösung wurde zur Trockene eingedampft, und der Rückstand mit wenig kaltem Wasser übergossen: Es blieb dabei ein Theil ungelöst, die Lösung wurde von demselben abfiltrirt, und mit Platinchlorid gefällt.

Das Ungelöste wurde in kochendem Wasser aufgelöst, aus dem es in feinen, verfilzten Nadeln krystallisirte, die bei 161° C. schmelzen, und durch eine Schwefelbestimmung als Diisopropylsulfoharnstoff erkannt wurden:

0·1624 Grm. angew. Subst. lieferten 0·2390 Grm. $BaSO_4$.

Dem entsprechen:

	Gefunden:	Ber. f. $CS(NHC_3H_7)_2$
S.....	20·20%	20·00%.

Aus diesem Befunde erklärte sich auch die äusserst geringe Ausbeute an Senföl, denn es hatte sich offenbar der grösste Theil des ursprünglich gebildeten Isopropylsulfocarbaminsauren Isopropylamin statt in Senföl unter Abspaltung von Schwefelwasserstoff in den Diisopropylsulfoharnstoff verwandelt:

$$CS\begin{matrix}NHC_3H_7\\S-NH_2C_3H_7\end{matrix} = H_2S + CS\begin{matrix}NHC_3H_7\\NHC_3H_7\end{matrix}.$$

Das aus der Lösung erhaltene Platindoppelsalz wurde in kochendem Wasser gelöst und die einzelnen Krystallisationen untersucht. Die erste Krystallisation bestand aus reinem Platinsalmiak, was sich übrigens schon aus ihrem ganzen Aussehen schliessen liess:

0·3902 Grm. angew. Subst. lieferten 0·1720 Grm. Pt.

Dem entsprechen:

	Gefunden:	Ber. f. $(NH_4)_2PtCl_6$
Pt.....	44·08%	44·29%

Die Mutterlauge dieser Krystallisation wurde zur Trockene eingedampft, die erhaltenen Krystalle abgesaugt, mit wenig ab-

solutem Alkohol gewaschen, und die ganze Menge zur Analyse verwendet,

0·8066 Grm. angew. Subst. lieferten 0·3527 Grm. Pt.

Dem entsprechen:

$$Pt = 43,73\%,$$

also auch diese Krystalle bestanden zum überwiegenden Theile auf Platinsalmiak, dem nur geringe Spuren des organischen Doppelsalzes beigemengt sein konnten.

Es beweist also diese Versuchsreihe, die übrigens auch bei Anwendung von wässerigem Ammoniak nicht wesentlich anders verlief, dass das Isopropyljodür bei der Einwirkung von Ammoniak seiner Hauptmenge nach in Jodwasserstoff und Propylen, beziehlich dessen Polymere zerfällt, und dass die Substitution im Ammoniak nur in untergeordnetem Masse vor sich geht. Das Product dieser Substitution muss wie die Bildung des Senföles und des zweifach substituirten Sulfoharnstoffes, sowie die fast gänzliche Abwesenheit eines organischen Salzes in den Rückständen der Senfölbereitung zeigt, zum grössten Theile, wenn nicht ausschliesslich, aus dem Monamin bestehen.

Über das Verhalten des secundären Hexyljodüres gegenüber alkoholischem Ammoniak liegen vollständige Angaben von Uppenkamp vor, die ich vollinhaltlich bestätigen kann.

Uppenkamp beobachtete, dass sich ein Amin gebildet hatte, das nach der Senfölbereitung vollkommen reines Monamin lieferte, und dass die höher siedenden Portionen seines rohen Amines keine basischen Verbindungen enthielten, sondern wahrscheinlich aus Polymeren des Hexylens bestanden.

Durch eine kleine Modification in dem von Uppenkamp angewendeten Verfahren ist es mir gelungen, nachzuweisen, dass bei der Einwirkung von alkoholischem Ammoniak auf secundäres Hexyljodür in der That nur das Monamin entsteht.

Ich bereitete mir das secundäre Hexyljodür durch Destillation von Mannit mit Jodwasserstoffsäure vom Siedepunkte 127° C. und amorphem Phosphor im Kohlensäurestrom. Das rohe Product wurde mit schwefliger Säure bis zur vollständigen Entfärbung geschüttelt, dann mit Wasserdämpfen überdestillirt und über geschmolzenem Chlorcalcium getrocknet. Ich erhielt fast

quantitative Ausbeuten an reinem Jodür. Dasselbe wurde 4 bis 5 Stunden mit alkoholischem Ammoniak in zugeschmolzenen Röhren auf 100° C. erhitzt, der Röhreninhalt zunächst auf dem Wasserbade erhitzt, wobei neben dem Alkohol reichliche Mengen von Hexylen und seinen Polymeren überdestillirten, deren letzte Spuren durch eine Destillation im Dampfstrome entfernt wurden. Die zurückbleibende, vollkommen klare wässerige Lösung wurde auf dem Wasserbade eingedampft, und die vollkommen trockene Krystallmasse, die zurückblieb, in einem hohen, mit Schnee gekühlten Standgefäss mittelst concentrirtem Alkali zersetzt. Die ganze Masse wurde mit Äther ausgeschüttelt, der Äther verjagt, und der Rückstand über festem Alkali getrocknet. Das so bereitete Amin siedete bis auf verschwindende Spuren zwischen 114° und 117° C., bestand also aus reinem Monamin, da Uppenkamp den Siedepunkt des reinsten aus dem Senföl bereiteten Monamin zu 116° C. bestimmt hat. Ein Theil der Base wurde in Salzsäure gelöst, und in das Platin-Doppelsalz übergeführt, welches aus heissem Wasser in prachtvollen goldglänzenden Blättchen krystallisirte.

0·6861 Grm. angew. Substanz lieferten nach der Reduction mit Wasserstoff 0·9588 Grm. AgCl.

Dem entsprechen:

	Gefunden:	Ber. f. $(C_6H_{13}NH_3)_2PtCl_6$
Cl.....	34·57%	34·63%

es hatte sich also in der That nur reines Monamin gebildet.

Behandelt man nun das so erhaltene Hexylamin mit Hexyljodür, so bildet sich kein höher substituirtes Amin, sondern wieder nur Hexylen, und das Jodhydrat des Monamin. Ich habe das durch die soeben angeführte Bestimmung als rein erkannte Monamin in molecularen Mengen mit reinem Hexyljodür gemischt. Selbst nach längerem Stehen zeigte sich keine Einwirkung. Verdünnt man nun die Mischung mit absolutem Alkohol und erhitzt sie in zugeschmolzenen Röhren einige Stunden auf 100°, so erhält man wie bei dem vorigen Versuche ziemlich viel Hexylen, und das Basische besteht aus unverändertem Monamin. Ich ging in der Weise vor, dass ich die ätherische Lösung der durch Alkali abgeschiedenen Base mit verdünnter Salzsäure ausschüttelte, die

vom Äther getrennte salzsaure Lösung eindampfte, und daraus das Platindoppelsalz darstellte:

0·2463 Grm. angew. Subst. hinterliessen beim Glühen 0·0787 Grm. Pt.

Dem entsprechen:

	Gefunden:	Ber. f. $(C_6H_{13}NH_3)_2PtA_6$
Pt.....	31·95%	32·19%

Das Resultat dieses Versuches bestätigt vollkommen die Angaben, welche Uppenkamp über einen ähnlichen Versuch gemacht hat.

Genau dieselben Verhältnisse treten ein, wenn man auf secundäres Octyljodür alkoholisches Ammoniak einwirken lässt.

Das Octyljodür wurde aus dem Caprylalkohol, wie ihn C. A. F. Kahlbaum liefert, durch Einwirkung von Jod und Phosphor dargestellt.

Es siedet unter theilweiser Zersetzung bei 206—207° C. (uncorr.). Das so erhaltene Jodür wurde mit alkoholischem Ammoniak digerirt, der Alkohol auf dem Wasserbade abdestillirt und aus der zurückbleibenden trüben Flüssigkeit alles Flüchtige durch Wasserdampf verjagt. Es ging mit dem Wasserdampfe eine farblose Flüssigkeit über, deren Verhalten gegen Brom sie unzweideutig als ein Gemenge ungesättigter Verbindungen charakterisirte. Die Flüssigkeit siedete nach dem Entwässern durch geschmolzenes Chlorcalcium zwischen 120 und 210° C., so dass an eine Trennung ihrer Bestandtheile durch fractionirte Destillation nicht zu denken war. Der Rückstand von der Destillation mit Wasserdämpfen wurde von einer geringen Menge harziger Materie, die sich ausgeschieden hatte, abfiltrirt, das Filtrat eingedampft, und aus der trockenen Krystallmasse die Basis durch concentrirtes Alkali abgeschieden und über festem Alkali getrocknet. Die Basis ging ihrer überwiegenden Menge nach von 162 bis 163° C. über, das Thermometer stieg dann stetig bis gegen 300°, doch war der Nachlauf ein minimaler.

Die erste Fraction wurde durch Schütteln mit Schwefelkohlenstoff und Destillation über Quecksilberchlorid in das Senföl übergeführt. Ich erhielt das schon früher von mir beschriebene Senföl (Ber. d. deutsch. chem. Ges. VIII, p. 803 flgd), dessen

Siedepunkt ich diesmal bei 232—232·5° C. fand, und welches unter der Einwirkung von starkem wässerigem Ammoniak allmälig in das bei 114° C. unter Zersetzung schmelzende Octylthiosinamin übergeht. Der Rückstand von der Senfölbereitung wurde nun genau ebenso behandelt, wie ich es bei dem Isopropylsenföl beschrieben habe, die schliesslich resultirende salzsaure Lösung mit Platinchlorid eingedampft, und das erhaltene Doppelsalz aus möglichst wenig heissem Wasser umkrystallisirt. Die erhaltenen, goldglänzenden Blättchen wurden auf einem Glaswollfilter abgesaugt, und mit wenig Wasser gewaschen:

0·4891 Grm. angew. Subst. lieferten 0·5467 Grm. AgCl.

Dem entsprechen:

	Gefunden:	Ber. f. $(C_8H_{17}NH_3)_2PtCl_6$
Cl.....	31·89%	31·74%.

Die Mutterlauge dieser Krystalle wurde bis zur Krystallisation eingedampft, die ausgeschiedenen Krystalle wurden abgesaugt und mit absolutem Alkohol gewaschen:

0·2980 Grm. angew. Subst. lieferten 0·3808 Grm. AgCl.

Dem entsprechen:

	Gefunden:	Ber. f. $(C_8H_{17}NH_3)_2PtH_6$
Cl.....	31·61%	31·74%

Aus der Mutterlauge dieser Krystallisation schieden sich beim weiteren Eindampfen nur minimale Quantitäten kleiner Kryställchen aus. Es enthielt mithin der Rückstand von der Senfölbereitung nur salzsaures Mono-Octylamin.

Zum Überflusse wurde die ganze nicht unbedeutende Menge des Platindoppelsalzes mit Wasserstoff reducirt, die so erhaltene salzsaure Lösung eingedampft, die erhaltene Salzmasse mit concentrirtem Alkali zerlegt, und die abgeschiedene Base mit Äther ausgeschüttelt. Dieselbe siedete nach dem Verjagen des Äther und Trocknen über festem Alkali vom ersten bis zum letzten Tropfen bei 162·5° C., war mithin in der That reines Mono-Octylamin.

Es war nun von Interesse zu untersuchen, ob nicht die höher siedende Fraction des rohen Amin das Di- und Triamin enthielte.

Zu dem Ende wurde die Flüssigkeit mit Salzsäure ausgeschüttelt, die erhaltene Lösung von einer kleinen Menge eines weissen Harzes, das sich ausschied, abfiltrirt, und mit Platinchlorid eingedampft, die Krystalle wurden darauf abgesaugt und mit wenig absolutem Alkohol gewaschen:

0·3275 Grm., welche die Gesammtmenge der erhaltenen Krystalle repräsentirten, lieferten 0·4180 Grm. AgCl.

Dem entprechen:

	Gefunden:	Ber. f. $(C_8H_{17}NH_3)_2PtCl_6$
Cl.....	31·58%	31·84%

es bestand mithin der basische Antheil des Nachlaufes ebenfalls nur aus Monamin.

Ich digerirte nun das reine aus dem Platindoppelsalze erhaltene Amin in alkoholischer Lösung mit reinem Octyljodür. Die nach dem Verjagen des Alkohol zurückbleibende trübe Flüssigkeit wurde mit Wasserdämpfen destillirt, wobei nicht unbedeutende Mengen der schon erwähnten ungesättigten Verbindungen übergingen, die zurückbleibende Lösung wurde alsbald von dem Harze, das sich wieder abgeschieden hatte, abfiltrirt, und genau so wie bei dem ersten Versuche behandelt. Die erhaltene Basis ging vollständig zwischen 162 und 163° C. über, war also unverändertes Monamin, was zum Überflusse noch durch eine Analyse des Platindoppelsalzes erwiesen wurde.

0·2833 Grm. angew. Subst. lieferten 0·3628 Grm. AgCl.

Dem entsprechen:

	Gefunden:	Ber. f. $(C_8H_{17}NH_3)_2PtCl_6$
Cl.....	31·61%	31·74%.

Die substituirende Kraft des Jodüres ist also durch die Ersetzung eines Wasserstoffatomes im Ammoniak vollständig erschöpft. Bei dem Versuche eine weitere Substitution einzuleiten, spaltet sich das Jodür in Jodwasserstoff und das entsprechende Olefin, so dass man das Jodhydrat, des ursprünglich in die Reaction eingeführten Monamin, zurückerhält.

Es muss übrigens bemerkt werden, dass die Amine auch der Substitution der in ihnen enthaltenen Wasserstoffatome durch

primäre Jodüre einen Widerstand entgegensetzen, der gegenüber der Leichtigkeit, mit welcher diese Substitution bei den Aminbasen der primären Alkohole durchführbar ist, befremden muss.

Erhitzt man das secundäre Octylamin mit Amyljodür im zugeschmolzenen Rohre und verfährt im Übrigen wie bei den früher beschriebenen Versuchen, so erhält man ein Platindoppelsalz, dessen Chlorgehalt darauf hindeutet, dass man es mit unverändertem Octylamin zu thun hat:

0·3134 Grm. angew. Subst. lieferten 0·4001 Grm. AgCl.

Dem entsprechen:

	Gefunden:	Ber. f. $(C_8H_{17}NH_3)_2PtCl_6$
Cl.....	31·58%	31·74%.

Selbst das sonst so überaus reactionsfähige Methyljodür wirkt auf das Octylamin nur sehr träge ein. Nach mehrstündigem Erhitzen von Octylamin mit Methyljodür erhielt ich eine Base, die im Wesentlichen aus noch unverändertem Octylamin bestand. Eine Chlorbestimmung im Platindoppelsatze ergab nämlich:

031·53 Grm. angew. Subst. lieferten 0·4481 Grm. AgCl.

Dem entsprechen:

	Gefunden:	Ber. f. $(C_8H_{17}NH_3)_2PtCl_6$
Cl.....	31·39%	31·74%.

Erst durch wiederholtes Digeriren, indem man die Basis immer wieder in Freiheit setzt, und mit frischem Methyljodür behandelt, gelingt es, das Trimethyloctylammoniumjodür zu erhalten, welches ich schon früher (Inauguraldissertation pag. 29) beschrieben habe.

Studien über das Verhalten der Acetate des Chroms, Eisens und Aluminiums.

Von **B. Reinitzer,**

Docent der Chemie an der k. k. deutschen technischen Hochschule zu Prag.

(Aus dem chem. Laboratorium des Prof. Dr. F. W. Gintl.)

Es ist eine bekannte, schon lange zu Trennungen in der Analyse, sowie auch praktisch verwerthete Thatsache, dass Eisenoxyd- und Thonerdesalzlösungen beim Kochen mit einer zur Umwandlung in Acetate genügenden Menge von essigsaurem Natron den gesammten Thonerde- und Eisengehalt in Form von basischen Acetaten niederfallen lassen. Als Ursache geben die Lehrbücher an, dass essigsaures Eisenoxyd und Aluminiumoxyd die Eigenschaft haben, in verdünnten wässerigen Lösungen, selbst bei Gegenwart von freier Essigsäure in der Siedehitze in unlösliche basische Salze und freie Essigsäure zu zerfallen.[1] Über das essigsaure Chromoxyd, bei dem man zufolge der vielfachen Analogien zwischen den drei genannten Sesquioxyden und deren Salzen ein ähnliches Verhalten vermuthen dürfte, enthalten selbst die ausführlichsten Handbücher nur spärliche Notizen. (Siehe z. B. das citirte Kolbe'sche Lehrbuch, pag. 625 oder Gmelin, Handbuch der organ. Chemie, 1848, p. 637.)

Selbst eine Antwort auf die Frage, ob bei Gegenwart von Chromoxyd die Fällung des Eisenoxyds und der Thonerde eine vollständige sei oder nicht, wird man auch in den besten Lehrbüchern der analytischen Chemie vergeblich suchen. Versuche, die ich vor Jahren durch Kochen von mit Natriumacetat versetzten

---

[1] Siehe z. B. Kolbe, Ausführliches Lehrbuch der org. Chemie, 1854, I., pag. 625 und 627; Strecker-Wislicenus, Kurzes Lehrbuch der org. Chem., pag. 542; Beilstein, Handbuch der org. Chemie, pag. 191 und 192.

Chromsalzlösungen anstellte, zeigten, dass das Chromacetat unter denselben Umständen wie Thonerde- und Eisenacetat nicht gefällt werde.

Schiff (Ann. d. Chem. 124, 168) findet, dass beim Kochen von angeblich neutralem Chromacetat mit viel Wasser keine Zersetzung erfolgt. In dem 1880 erschienenen Tabellenwerke von Prof. O. Wallach[1] wird das Gegentheil behauptet. Es heisst da z. B. I. Theil, Tabelle IV, bei der Begründung der Zusammengehörigkeit der Sesquioxyde von Eisen, Chrom und Aluminium:

„Ebenso werden dieselben beim Kochen mit Natriumacetat (oder auch ameisensaurem oder bernsteinsaurem Salz) gefällt." Ferner 2. Theil, Tabelle XII, „Methode 2, (Darauf beruhend, dass die in Lösung befindlichen Metalle beim Kochen mit essigsaurem Natron ausfallen, soferne ihre Chloride die Formel MCl_3 haben, während die in Lösung bleiben, deren Chloriden die Formel MCl_2 zukommt.)"

Es folgt nun eine Vorschrift, wie die Lösung in eine essigsaure zu überführen ist und wie die nach dem Erhitzen zum Sieden im Niederschlag befindlichen basischen Acetate des Chroms, Eisens und Aluminiums von einander zu trennen sind.

Es schien mir bei der Wichtigkeit, welche die Frage für die analytische Chemie hat, auf diese Angabe hin eine neuerliche genaue Untersuchung des Verhaltens des Chromacetats allein sowohl, als auch des Gemenges der Acetate des Eisens, Aluminiums und Chroms erforderlich, und ich theile im Folgenden die Resultate meiner Versuche über diesen Gegenstand mit.

Versetzt man eine Chromsulfat- oder Chromchloridlösung mit einem Überschuss von Natriumacetatlösung und kocht, so findet, gleichgiltig, welchen Concentrationsgrad die Flüssigkeit hat, und wieviel Natriumacetat verwendet worden ist, niemals, auch nach stundenlangem Kochen nicht, die Ausscheidung eines Niederschlages statt. Wenn nur kurze Zeit gekocht worden ist, so nimmt die Lösung nach der Abkühlung eine violette Farbe an. Eine derart behandelte Chromoxydlösung hat nun aber in höchst auffallender Weise ihre ganzen Eigenschaften geändert. Ätzalka-

[1] Tabellen zur Chemischen Analyse. Herausgegeben v. Otto Wallach, Prof. an d. Univ. Bonn. Bonn, E. Weber's Verlag 1880.

lien, Ammon, Schwefelammon, kohlensaure Alkalien und kohlensaures Ammon, phosphorsaures Natron, Ätzbaryt und kohlensaurer Baryt bewirken, gleichviel ob in geringer Menge oder im Überschuss zugesetzt, in der Kälte nicht die geringste Trübung oder Opalisirung. Ätzkali und Natron verwandeln ebenso wie Ätzbaryt die Farbe der Lösung in eine, zunächst olivengrüne, schliesslich smaragdgrüne und nach etwa zwölfstündigem Stehen sind diese Flüssigkeiten in grüne Gallerten verwandelt. Bei Ammon tritt eine Farbenveränderung nicht ein; nach etwa 48 Stunden ist die Flüssigkeit aber in eine violette Gallerte verwandelt. Schwefelammonium und Ammoniumcarbonat bewirken dasselbe erst nach mehreren Tagen. Beim Kochen der Flüssigkeiten treten die Fällungen je nach der Stärke der alkalischen Reaction des Reagens, und je nach der zugesetzten Menge, sofort, oder nach kurzer Zeit ein, nur das phosphorsaure Natron wirkt auch unter diesen Umständen nicht fällend.

Vor der Entscheidung der Frage, ob die beschriebene Passivität dem Chromacetat an sich oder einem Doppelsalze zukomme, schien es mir wichtig zu untersuchen, ob das Verhalten der Chromlösung nicht vielleicht eine wesentliche Änderung erfährt, durch das Vorhandensein von Eisen- oder Aluminiumacetat oder ob nicht umgekehrt das Verhalten der letzteren durch die Anwesenheit des ersteren modificirt wird. Der letztere Fall ist der thatsächlich eintretende. Die Chromlösung ertheilt einer gewissen Menge von Eisen- oder Aluminiumacetat genau dieselbe Passivität gegen die genannten Reagentien, die sie selbst besitzt. Weder durch Erhitzen zum Sieden noch durch Zusatz von Ätzalkalien oder Ätzammon oder deren Salzen kann Eisen- und Thonerdeacetat neben Chromacetat nachgewiesen werden. Nur durch Schwefelammonium erfolgt langsame, aber vollständige Fällung des Eisens als Schwefeleisen. Die Thonerde wird in der Kälte durch gar kein Reagens sogleich gefällt. Eine gewisse Chrommenge vermag nur eine gewisse Eisen- und Thonerdemenge vor der Fällung zu bewahren und zwar, was besonders bemerkenswerth ist, eine grössere Eisen- und Thonerdemenge nur dann, wenn die Chromlösung noch vor dem Zusatz der Eisen- oder Thonerdelösung mit dem essigsauren

Natron gekocht worden ist. Wird die Chromlösung nur in der Kälte mit dem Natriumacetat vermischt, so ist anfänglich das Chrom schon in der Kälte durch die vorhin genannten Reagentien fällbar. Erst durch längeres (tagelanges) Stehen nimmt die Flüssigkeit dieselbe Passivität an wie nach dem Kochen. Ich werde später zeigen, dass ein ganz ähnliches Verhältniss auch in Bezug auf die Übertragung der Passivität bei bereits fertigen Chromacetatlösungen besteht.

Es geht bereits aus dem bisher Angeführten hervor, dass die auf der Ausfällung des Eisens und der Thonerde in Form von basischen Acetaten beruhende Trennungsmethode bei Gegenwart von Chromoxydsalzen sowohl für die Zwecke der qualitativen als auch quantitativen Analyse ihre Anwendbarkeit völlig verliert. Dass es sich dabei nicht etwa bloss um ein spurenweises Gelöstbleiben handelt, davon kann man sich durch folgenden Versuch überzeugen: Man fülle eine Eprouvette auf 2—3 Cm. hoch mit Eisenchloridlösung, setze ziemlich viel, etwa das gleiche oder doppelte Volumen einer Natriumacetatlösung hinzu, so dass die Lösung tief blutroth erscheint, füge 5—6 Tropfen einer concentrirteren Chromchlorid- oder Sulfatlösung hinzu und erhitze zum Sieden. Beim ersten Aufsieden findet eine theilweise Fällung des Eisens statt, die aber nach wenigen Secunden wieder verschwindet, so dass man eine völligklare, tief dunkelrothe Lösung erhält, in der nach dem Erkalten Ammoniak keine Fällung mehr hervorbringt. Nimmt man eine grössere Menge von Chromoxydlösung, so wird die Farbe der Flüssigkeit nach dem Kochen purpurroth. Um einen näheren Einblick in diese Verhältnisse zu gewinnen, ist es vor Allem erforderlich die reinen Acetate darzustellen und ihr Verhalten an sich und in Gemischen unter einander kennen zu lernen.

I. Chromacetat.

Die Darstellung völlig reiner Chromacetate ist mit Schwierigkeiten verbunden, die zu überwinden mir bis jetzt noch nicht vollständig gelungen ist. Die scheinbar so einfache Methode der Auflösung von Chromhydroxyd in Essigsäure, scheitert daran, dass

bei der Fällung eines Chromoxydsalzes mit einem fixen Alkali nicht Chromhydroxyd, sondern Chromoxydkali niederfällt, dem durch Waschen selbst mit siedendem Wasser der Alkaligehalt nicht entzogen werden kann.[1] Chromoxydammon, das man durch Fällung mit Ätzammon erhält, dürfte wohl durch Waschen mit heissem Wasser zerlegbar sein, es wird aber, wie mir wiederholte Versuche darthaten, durch diese Operation in Essigsäure, selbst in siedendem Eisessig ausserordentlich schwer löslich. Kaltgefälltes und durch Digestion mit kaltem Wasser gewaschenes Chromhydroxyd löst sich wohl bei längerer Behandlung mit heisser Essigsäure, die Lösung ist aber stets ammonhaltig, selbst wenn das Chromhydroxyd wochenlang gewaschen wurde.

Der Ammongehalt des Chromhydroxyds, der durchaus nicht unbeträchtlich ist, wurde weder von Ordway[2] noch von H. Schiff berücksichtigt, wesshalb ihre Angaben und die nur indirecten Analysen des Letzteren nicht entscheidend sein können. Die Passivität kennt keiner der beiden Autoren.

Der naheliegendste Weg: Reduction von reiner Chromsäure mit Alkohol ist wegen der Möglichkeit des Auftretens anderer Oxydationsproducte (Glyoxal?) neben Essigsäure nicht verlässlich. Der verhältnissmässig noch am besten zum Ziele führende Weg ist der der doppelten Umsetzung von neutralem Chromsulfat mit Bleiacetat.

Käufliche krystallisirte Chromsäure wurde zunächst so lange mit Salpetersäure von 1·5 specifischem Gewicht mit Hilfe der Filtrirpumpe gewaschen, bis Schwefelsäure und Kali vollständig entfernt waren. Durch Erhitzen bis zum Schmelzen wurde die Chromsäure von den letzten Resten der Salpetersäure befreit, in Wasser gelöst und durch Einleiten von Schwefligsäuregas in völlig neutrales Chromsulfat verwandelt

$$2 . CrO_3 + 3SO_2 = Cr_2(SO_4)^3.$$

Es resultirt das Chromsulfat in Form einer grünen Flüssigkeit, zu der nun eine concentrirte Bleiacetatlösung in geringem Überschuss hinzugefügt wird. Das Ganze muss nun mehrere Tage stehen, da sonst die Abscheidung des Bleisulfats eine höchst

[1] Roscoe-Schorlemmer. Ausführl. Lehrb. d. Chemie, II. p. 563.

[2] Jahresbericht für Chemie 1858, pag. 113.

unvollständige ist. Die hohe Löslichkeit des Bleisulfats in essigsaurem Ammon ist allgemein bekannt. Weniger bekannt dürfte die in Acetaten der Schwermetalle sein. Ich wurde auf dieselbe durch Herrn Director Stork aufmerksam gemacht, der sie bei essigsaurem Eisenoxydul und anderen für die Zwecke der Kattundruckerei in der Prag-Smichover Kattunmanufactur dargestellten Acetaten von schweren Metallen beobachtet hatte. Ausserdem haben aber auch noch die Chromoxydsalze ganz speciell ein eigenthümliches Lösungsvermögen für einige der schwerstlöslichen Verbindungen z. B. $BaSO_4$, AgCl.[1] Bei der Umsetzung des neutralen, grünen Chromsulfats mit Bleiacetat erhält man eine prachtvoll purpurviolette Lösung, die sehr bedeutende Mengen von Bleisulfat gelöst enthält. Unmittelbar nach der Umsetzung lässt sich die Flüssigkeit in der Regel durch Filtration von dem feinpulverigen Bleisulfat gar nicht trennen, sondern läuft trübe durch das dichteste Papier durch. Nach etwa zwölfstündigem Stehen filtrirt, erscheint sie vollständig klar, liefert aber nach einigen Stunden neuerlich einen starken Bodensatz von Bleisulfat. Spuren desselben bleiben selbst nach tagelangem Stehen in Lösung.

Nach der Ausfällung des überschüssigen Bleies durch Schwefelwasserstoff und Verdrängung des letzteren durch einen Strom von Kohlensäure, wurde die noch freie Essigsäure enthaltende Lösung eingedampft. Beim Eindampfen über Schwefelsäure und Ätzkali im Vacuum resultirt eine violettschwarze, in dünne Schichten violettdurchsichtige, glasglänzende, amorphe, spröde Masse, die sich in Wasser wieder ganz klar mit purpurvioletter Farbe löst. Gepulvert erscheint sie schmutzig-grauviolett. Wird die violette Chromlösung gekocht, so bekommt sie bei der Abkühlung einen Stich ins Grüne, was bei der Vergleichung mit der ursprünglichen Chromlösung deutlich hervortritt. Eine vollständige Umwandlung in die grüne Modification, wie sie bei den Salzen anorganischer Säuren schon beim Erhitzen beobachtet wird, findet nicht statt. Wird die ursprüngliche violette Lösung auf siedendem Wasserbade eingedampft, so erhält man eine smaragdgrüne glasglänzende in Wasser vollständig klar lösliche,

[1] Rose-Finkener, Handbuch der analytischen Chemie. I, pag. 534.

spröde, amorphe Masse, die im gepulverten Zustande eine graugrüne Farbe hat. Die wässerige Lösung derselben ist rein smaragdgrün. Versetzt man sie mit einem Überschuss von Natriumacetatlösung und kocht, so wird die Farbe bei der Abkühlung purpurviolett. Wird diese Lösung der Dialyse unterworfen, so hinterbleibt eine violette Flüssigkeit, die nun beim Eindampfen auf siedendem Wasserbad eine violette Masse hinterlässt. Dieselbe Wirkung wie Natriumacetat hat Natriumborat und Kaliumbicarbonat; bei letzterem tritt aber leicht Fällung ein, wenn zu lange gekocht wird. Eine Theorie dieser Erscheinungen hoffe ich demnächst an der Hand von Analysen geben zu können. Wie verschieden von Eisen- und Aluminiumacetat sich das Chromacetat in Bezug auf die Zersetzbarkeit durch Wärme verhält, geht daraus hervor, dass dasselbe, nachdem ich es als Pulver stundenlang ganz allmälig bis auf 230° C. erhitzt und etwa eine Stunde bei dieser Temperatur erhalten hatte, noch immer vollständig, wenn auch langsam, in Wasser löslich war. Sehr bemerkenswerth ist, dass das längere Zeit auf etwa 100—150°C. erhitzte Salz in Wasser mit einer mehr violetten als grünen Farbe löslich ist. Sowohl die grünen als violetten Chromacetatlösungen zeigen genau dasselbe Verhalten sowohl an sich als gegen Reagentien wie die mit Natriumacetat gekochten Chromsalze anorganischer Säuren.

Es gehören demnach die beschriebenen Eigenschaften nicht einem Doppelsalze, sondern dem Chromacetat allein an. Es erscheint mir wichtig, zu erwähnen, dass bei allen diesen Versuchen, sowie bei der Darstellung des Chromacetats ein besonderes Gewicht darauf gelegt wurde, die Gegenwart selbst von Spuren von Ammonsalzen zu vermeiden, um die Möglichkeit der Bildung von Roseochromsalzen, die bekanntlich in der Kälte eine ganz ähnliche Indifferenz gegen Reagentien zeigen, wie das Chromacetat, auszuschliessen. Jede der Lösungen, die zur Verwendung kamen, war vorher auf einen Gehalt an Ammonsalzen sorgfältig geprüft und rein befunden worden. Die Passivität des Chromacetats macht es erklärlich, warum bei der quantitativen Analyse von Chromaten nach der Reduction mit Schwefelsäure und Alkohol erst eingedampft werden muss, ehe das Chrom mit Ammon gefällt werden kann.

II. Ferriacetat.

Heiss durch Ammon gefälltes Ferrihydroxyd löst sich bekanntlich selbst in siedendem Eisessig kaum merklich.

Kalt gefälltes und gewaschenes Ferrihydroxyd wird zwar von Essigsäure sehr leicht gelöst, die Lösung enthält aber immer beträchtliche Mengen jenes Alkalis, das zur Fällung verwendet wurde, auch wenn man noch so sorgfältig wäscht. Die Verhältnisse sind also ganz dieselben wie beim Chromhydroxyd. Durch doppelte Umsetzung von Bleiacetat mit Ferrisulfat ist hier nichts zu erreichen, da man den Überschuss des Bleiacetats wegen der Zersetzbarkeit der Eisenoxydsalze durch Schwefelwasserstoff nicht entfernen kann. Von vornherein nur so viel Bleiacetat zuzugeben als zur Ausfällung der Schwefelsäure nöthig ist, ist unmöglich, weil man wegen der Löslichkeit des Bleisulfats in Eisenacetat den Endpunkt der Reaction nicht erkennt. Es tritt ein Punkt ein, wo man abwechselnd zu der filtrirten klaren Lösung Bleiacetat und Ferrisulfat zusetzen kann, ohne dass eine Trübung stattfindet.

Auch mit essigsaurem Baryt kam ich zu keinem Resultat. Man erhält beim Vermischen einer Lösung desselben mit Ferrisulfatlösung trübe Flüssigkeiten, die durch Filtration absolut nicht klar zu erhalten sind, und in welchen das Baryumsulfat wochenlang suspendirt bleibt. Ein Überschuss an einem der beiden Reagentien ist auch hier kaum zu vermeiden und kaum wegzuschaffen. Durch freiwillige Oxydation von reinem essigsaurem Eisenoxydul werden nur unlösliche Ferriacetate erhalten.

Ich war nahe daran, das Problem der Darstellung eines völlig reinen Ferriacetats als ein unlösbares zu betrachten, als ich fand, dass durch Ammon kalt gefälltes und mit heissem Wasser gewaschenes Ferrihydroxyd in heisser Essigsäure leicht löslich ist, und dass diese Lösung vollständig frei ist auch von Spuren von Ammon und Chlor. Etwa 50 bis 60 Gramm oder noch mehr, krystallisirtes, chemisch reines Eisenchlorid wurde in kaltem Wasser gelöst und diese Lösung so lange mit Ammon versetzt, bis dasselbe vorwaltete. Der Niederschlag wurde auf ein grosses Papierfilter gebracht und so lange mit nahezu siedendem Wasser

gewaschen, bis sich im Filtrat keine Spur von Chlor nachweisen liess. Das feuchte Ferrihydroxyd wurde nun in einem Becherglase mit Eisessig auf dem Wasserbade erwärmt.

Man erhält eine völlig klare, blutrothe Lösung, die sich gegen mein Erwarten und gegen die Angabe aller chemischen Werke auf siedendem Wasserbad eindampfen lässt, ohne einen in Wasser unlöslichen Rückstand zu liefern.

Bei einer gewissen Concentration wird die Lösung zwar trübe, lässt man sie aber auskühlen, so tritt wieder völlige Klärung ein. Die Flüssigkeit erscheint im durchfallenden Lichte vollkommen durchsichtig blutroth, im auffallenden Lichte schwarz ohne Spur einer Opalisirung. Dampft man die heisse trübe Flüssigkeit weiter ein, so wird sie in dem Masse als Essigsäure entweicht, wieder klar und es hinterbleibt schliesslich eine syrupdicke, schwarze Flüssigkeit, die in hinreichend dünnen Schichten der Wasserbadhitze ausgesetzt, zu schwarzen, glasglänzenden, spröden Massen, die in dünneren Schichten dunkelroth durchsichtig sind, eintrocknet. Wird dieses Salz nicht allzulange der Wasserbadhitze ausgesetzt, so ist es in Wasser wieder vollständig zu ganz klarer, blutrother Flüssigkeit löslich, in welcher das Eisenoxyd durchaus nicht etwa in der Form von Metahydrat enthalten ist.

Hat das Erhitzen länger gedauert, so erhält man Flüssigkeiten, die im auffallenden Lichte trübe und ziegelroth erscheinen und die nun durch Salzsäure oder Natriumacetat schon in der Kälte fällbares Metahydroxyd enthalten. Nach wochenlangem Stehen klären sie sich zwar unter Abscheidung eines gelben, schlammigen Bodensatzes, aber die klare Lösung enthält ebenfalls Ferrimetahydroxyd. — Nach stundenlangem Erhitzen des Rückstandes auf 100° C., besonders des gepulverten, wird derselbe in Wasser vollständig unlöslich.

Es scheint, dass die wenigsten Chemiker bisher völlig reines Ferriacetat unter den Händen gehabt haben, denn die in allen chemischen Werken als besonders charakteristisch für dasselbe angeführte Eigenschaft, in verdünnter Lösung in der Siedehitze das gesammte Eisen als basisches Acetat fallen zu lassen, kommt dem reinen Ferriacetat gar nicht zu. Eine von andern Salzen völlig freie Eisenacetatlösung kann in beliebig verdünntem oder concentrirtem Zustande stundenlang

erhitzt werden, ohne dass nur eine Opalisirung, geschweige denn eine Fällung von basischem Ferriacetat eintreten würde. Setzt man aber ein anderes Salz, besonders ein Alkaliacetat hinzu, so fällt schon beim ersten Aufsieden das ganze Eisen in der Form des bekannten rothbraunen, flockigen Niederschlages heraus. Es wäre indess ein grosser Irrthum, wenn man annehmen würde, dass reine Eisenacetatlösungen beim Kochen auch keine chemische Veränderung erleiden. Dass eine solche in der That eintritt, geht daraus hervor, dass die gekochte und völlig erkaltete Lösung auf nachträglichen Zusatz von Alkaliacetat oder von einer Säure das gesammte Eisenhydroxyd als Metahydrat sofort, schon in der Kälte, niederfallen lässt. Orthoacetatlösungen liefern mit essigsaueren Alkalien in der Kälte versetzt erst nach stundenlangem Stehen eine Ausscheidung des Eisens. Diese Zersetzungserscheinung hat bereits Péan de St. Gilles, der Entdecker des Ferrimetahydrats beschrieben. Seine Resultate weichen etwas von den meinigen ab. Auch er erklärt, es sei ihm, entgegen der Meinung W. Crum's gelungen, durch doppelte Umsetzung ein Eisenacetat zu erhalten, das beim Kochen keinen Niederschlag gebe. Leider sagt er über die Darstellung und die Eigenschaften dieser Verbindung gar nichts. Er gibt nur an, dass bei vier- bis fünfstündigem Erhitzen der Lösung auf dem siedenden Wasserbad die Flüssigkeit ziegelroth opalisirend wird, und dann das Metahydrat enthält. Obzwar nun meine Lösung nach dieser Behandlung, wie erwähnt, Metahydrat enthielt, zeigte sie auch nach stundenlangem Erhitzen nicht die Spur einer Opalisirung. Erst als ich eine neue Partie derselben in einem Rohre eingeschmolzen durch mehrere Stunden der Wasserbadsiedehitze aussetzte, wurde sie ebenfalls ziegelroth trübe im auffallenden, aber vollständig klar im durchfallenden Lichte.

Entweder war also Péan de St. Gilles' Lösung nicht frei von anderen Acetaten, oder er hat sie ebenfalls in geschlossenen Gefässen erhitzt, ohne es besonders anzuführen. Für die eigenthümlichen Verhältnisse des Eisenacetats scheint mir folgende Erklärung die wahrscheinlichste zu sein: Das Eisenacetat hat die Eigenschaft, sich beim Sieden seiner Lösungen zu spalten und freie Essigsäure einerseits und stark polymerisirte Moleküle von

löslichem Eisenhydroxyd andererseits zu liefern. (Graham's Analysen weisen beim colloidalen Eisenhydroxyd auf mindestens dreissig, Magnier de la Sources' Analysen beim Metahydroxyd auf mindestens achtunddreissig Eisenatome im Molekül). Auf Zusatz gewisser Säuren oder Salze scheint eine Wasserentziehung und damit Hand in Hand eine Anhydridbildung im Molekül einzutreten, die, wie die Erfahrungen bei den meisten colloidalen Körpern lehren, ein Unlöslichwerden der Verbindung zur Folge zu haben scheint. Péan de St. Gilles gibt an, dass die wässerigen Lösungen des Metahydrats nicht gekocht werden können, ohne dass das Hydrat herausfällt. Es würde diese Beobachtung, wenn es sich um reine Metahydratlösungen handeln würde, mit der obigen Theorie schwer zu vereinigen sein. Allein, man kann leicht erkennen, dass die Darstellungsmethode, die dieser Chemiker angewendet hat, salzsäurehältige Lösungen geliefert haben muss. Ich konnte in der That die Unfällbarkeit rein wässeriger Lösungen leicht dadurch nachweisen, dass ich die Lösung des durch Kochen zersetzten Acetats der Dialyse unterwarf, wodurch die Essigsäure entfernt wurde, und nun die völlig neutral reagirende Lösung zum Sieden erhitzte, wobei sie auch nach längerer Zeit ganz klar blieb. Bemerkenswerth zur Charakteristik des Eisenacetats ist es, dass auch ganz reine Lösungen desselben nach längerem Stehen eine partielle Zersetzung erleiden, die mit der Ausscheidung eines gelben, schleimigen Niederschlages verbunden ist.

III. Aluminiumacetat.

Dasselbe wurde dargestellt durch Auflösen von sublimirtem Aluminiumchlorid in Wasser, Fällen mit Ammon in der Hitze, Auflösen des siedend heiss gewaschenen Niederschlages in möglichst wenig Schwefelsäure, Umsetzung des Aluminiumsulfats mit Bleiacetat und Entfernung des überschüssigen Bleies durch Schwefelwasserstoff. (Aluminiumsulfat des Handels kann nicht verwendet werden, da dasselbe stark alkalihältig ist.) Diese Flüssigkeit verträgt das Eindampfen auf siedendem Wasserbade nicht, ohne einen unlöslichen Rückstand zu liefern, weicht also hierin von Eisen- und Chromacetat wesentlich ab. Die, freie

Essigsäure enthaltende Flüssigkeit scheidet bei einer gewissen Concentration ein basisches Acetat als pulverigen Niederschlag ab, was bereits W. Crum beobachtete. Dagegen kann die Lösung, vorausgesetzt dass sie von Alkaliacetaten völlig frei ist, bei Ersatz des verdampfenden Wassers stundenlang gekocht werden, ohne dass eine Fällung eintritt. Die Flüssigkeit wird dabei aber immer stärker opalisirend und immer dickflüssiger, was sich besonders nach dem Auskühlen leicht erkennen lässt. Es findet dabei, ganz wie beim Eisenacetat, eine Trennung in zum grössten Theile entweichende Essigsäure und gelöst bleibendes Metahydrat statt, welches auf Zusatz von Natriumacetat bereits in der Kälte herausfällt, oder welches, richtiger gesagt, die Flüssigkeit dabei in eine Gallerte verwandelt.

Wird aber die längere Zeit gekochte Lösung ohne Zusatz von Natriumacetat im Wasserbade eingedampft, so erhält man eine farblose, durchsichtige bis durchscheinende, gummiähnliche, in feuchtem Zustande biegsame Masse, die in kaltem Wasser zwar nur langsam, aber endlich vollständig löslich ist. Die Lösung opalisirt wie die ursprüngliche, enthält aber die Thonerde als Orthohydrat, da durch essigsaures Natron in der Kälte keine Gelatinirung eintritt, wohl aber beim Erhitzen zum Sieden. Bei langem Stehen beginnt sich die ursprüngliche Flüssigkeit unter Absatz eines geringen Niederschlages zu klären.

IV. Beeinflussung der Eigenschaften des Eisen- und Aluminiumacetats durch Chromacetat.

Wird eine grüne Chromacetatlösung mit wenig Eisenacetatlösung versetzt und das Gemisch gekocht, so fällt das Eisen in Form eines flockigen Niederschlages heraus. Nimmt man das Eisenacetat im Überschuss und setzt nach und nach die Lösung des grünen Chromacetats hinzu, so verträgt die Lösung wohl bis zu einem gewissen Zusatz das Kochen, dann tritt aber ebenfalls eine partielle Fällung des Eisens ein. Wird aber eine ursprünglich violette Chromacetatlösung genommen und zu dieser Eisenacetatlösung gesetzt, so tritt beim nunmehrigen Kochen, ganz gleichgiltig, wie viel Eisenlösung zugesetzt

wurde, keine Fällung des Eisens ein. Genau ebenso verhält sich eine aus einer grünen Chromacetatlösung durch Kochen mit Natriumacetatlösung erhaltene violette Chromacetatlösung, ebenso aber auch eine an sich ohne jeden Zusatz gekochte grüne Chromacetatlösung. Es spricht Manches dafür, dass auch letztere Lösung, obzwar sie nach dem Kochen nur einen Stich ins Blaugrüne zeigt, einen Theil des Chroms als violettes Chromsalz enthält. Festes, grünes Chromacetat, längere Zeit auf 100—120°C. erhitzt, löst sich in Wasser mit violettblauer Farbe, allerdings mit einem Stich ins Grüne. Grünes Chromacetat wirkt demnach wie die meisten Metallsalze in der Hitze fällend auf Eisenacetat. Violettes Chromacetat wirkt nicht nur nicht fällend, sondern macht sogar einen grossen Theil des Eisenacetats ebenso passiv gegen Reagentien als es selbst ist. Folgende Versuche liefern den Beweis dafür. Kocht man eine violette Chromacetatlösung oder eine gekochte grüne Chromacetatlösung mit nicht zu viel Eisenacetatlösung, so kann man nun Natriumacetatlösung zusetzen und kochen, ohne dass das Eisen herausfällt. Auch alle übrigen Eisenoxydsalze unter normalen Verhältnissen fällenden Reagentien, wie Ätzalkalien, Ätzammon, Ätzbaryt, Carbonate und Phosphate der Alkalien, Baryumcarbonat, Ferrocyankalium zeigen in der Kälte lange Zeit hindurch keine Einwirkung. Erst nach stundenlangem Stehen stellen sich die Niederschläge ein. Am raschesten wirkt noch Schwefelammonium, aber auch hier findet eine auffallende Verzögerung gegenüber reinen Eisenacetatlösungen statt. Überschreitet die Menge des Eisenacetatzusatzes ein gewisses Maximum, dann findet beim Kochen mit essigsaurem Natron oder auf Zusatz von Ätzammon etc. eine partielle Ausscheidung des Eisens statt. Die Menge von essigsaurem Eisenoxyd, die passiv wird, hängt von mehreren Umständen ab, unter denen insbesondere die Menge des Chromacetats, Concentration der Flüssigkeit und der Umstand, ob die Einwirkung der Acetate auf einander in der Kälte oder in der Hitze stattfindet, von hervorragendem Einfluss sind. Folgende Versuche lassen darüber keinen Zweifel.

α) Passivität des Eisenacetats gegen Natriumacetat in der Siedehitze bei Gegenwart von Chromacetat.

Der Gehalt einer grünen Chromacetatlösung an Chromoxyd, ebenso der einer Eisenacetatlösung an Eisenoxyd wurde durch Eindampfen eines abgemessenen Volumens derselben im Platintiegel und vorsichtiges Glühen des Rückstandes, bis derselbe constantes Gewicht angenommen hatte, bestimmt und nun beide Lösungen durch entsprechendes Verdünnen äquivalent gemacht. Je 100 Cc. der beiden Flüssigkeiten enthielten 0·2644 Äquivalente des Metalloxyds in Grammen.

Durch Auflösung der entsprechenden Menge von Natriumacetat zu einem Liter wurde eine äquivalente Natriumacetatlösung hergestellt. Die verbrauchten Volumina der Lösungen geben somit direct ein Mass für die Anzahl der aufeinander zur Wirkung kommenden Äquivalente.

1. 10 Cc. Chromacetatlösung wurden mit 5 Cc. Natriumacetatlösung versetzt und gekocht. Durch diese Mischung werden ungefähr 3.6 Cc. Eisenacetatlösung passiv gemacht. (Beim Kochen tritt keine Fällung ein.)

4 Cc. Eisenlösung werden bereits gefällt.

2. 10 Cc. $Cr(C_2H_3O_2)$-Lösung mit 10 Cc. $NaC_2H_3O_2$-Lösung gekocht. Es werden 4·1 Cc. $Fe(C_2H_3O_2)^3$-Lösung passiv.

4·2 Cc. werden bereits gefällt.

3. 10 Cc. $Cr(C_2H_3O_2)^3$-Lösung mit 10 Cc. $NaC_2H_3O_2$-Lösung versetzt, ohne zum Sieden zu erhitzen. Beim Hinzufügen derselben Menge von Fe-Acetat wie früher (4·1 Cc.) und Kochen tritt sofort Fällung des Eisens ein.

4. 10 Cc. $Cr(C_2H_3O_2)^3$- mit 15 Cc. $NaC_2H_3O_2$-Lösung zum Sieden erhitzt, vermag 4·4 Cc. $Fe(C_2H_3O_2)^3$-Lösung passiv zu machen. 4·6 Cc. $Fe(C_2H_3O_2)^3$ werden gefällt.

5. 10 Cc. $Cr(C_2H_3O_2)^3$- mit 30 Cc. $NaC_2H_3O_2$-Lösung gekocht, vermag 5 Cc. Eisenacetat passiv zu machen. (Die Lösung beginnt beim Kochen eben zu opalisiren.)

6. 10 Cc. $Cr(C_2H_3O_2)^3$ mit 40 Cc. $NaC_2H_3O_2$ gekocht, vermag 5·6 Cc. nicht mehr völlig passiv zu machen. Die Lösung trübt sich beim Kochen sehr merklich, bei 6 Cc. tritt bereits deutliche Fällung ein.

b) Passivität des Eisenacetats gegen Ammoniak bei Gegenwart von Chromacetat.

Um sicher zu stellen, ob die Concentration der Flüssigkeit einen Einfluss auf die Menge des passiv werdenden Eisenacetats übt, wurden folgende Versuche gemacht:

I.

20 Cc. einer wässerigen, grünen, kurz zuvor gekochten Chromacetatlösung wurden mit 20 Cc. Wasser verdünnt, und so lange vorsichtig mit der, in einer Bürette befindlichen Eisenacetatlösung versetzt, bis nach dem Aufkochen und Wiedererkalten der Lösung durch Ammoniak eine Trübung eintrat, und zwar wurde, um vergleichbare Resultate zu erhalten, die Zeit von einer Minute für das erste Auftreten der Trübung nach dem Zusatz von concentrirter Ammonlösung angenommen. Nachdem dieser Punkt erreicht war, wurden 30 Cc. der erhaltenen Mischung im Platintiegel eingedampft, der Rückstand mit concentrirter Salpetersäure übergossen und nochmals im Wasserbade eingedampft und schliesslich vorsichtig geglüht. Um Verluste beim Übergang des Chromoxydes und Eisenoxydes in die unlösliche Modification zu vermeiden, wurde der Tiegel in eine kleine Platinschale gestellt und diese mit einer zweiten, ebenso grossen bedeckt und dann allmälig erhitzt. Der Rückstand betrug 0·3033 Gr. Er wurde mit einem Gemisch von Kaliumnitrat und Natriumcarbonat aufgeschlossen, die Schmelze mit heissem Wasser behandelt und das ungelöst bleibende Eisenoxyd nach wiederholter Behandlung mit siedendem Wasser auf ein Filter gebracht und hier völlig ausgewaschen. Die Wägung des Eisenoxydes wurde in demselben Tiegel, in welchem die Aufschliessung vorgenommen worden war, und welchem durch Wasser nicht abwaschbare Spuren von Eisenoxyd anhafteten, ausgeführt.

$$\begin{aligned} Cr_2O_3 + Fe_2O_3 &= 0{\cdot}3033 \\ Fe_2O_3 &= 0{\cdot}1390 \\ Cr_2O_3 &= \overline{0{\cdot}1643} \end{aligned}$$

Verhältniss der Äquivalente:

$$\begin{aligned} Cr_2O_3 : Fe_2O_3 &= 1 \cdot 24 : 1 \\ &= 5 : 4 \\ &= 100 : 80 \end{aligned}$$

II. (Controle.)

Die in I beschriebenen Operationen wurden mit neuen Mengen von Flüssigkeiten nochmals durchgeführt und 40 Cc. der erhaltenen Lösung zur Analyse verwendet.

$$\begin{aligned} Cr_2O_3 + Fe_2O_3 &= 0 \cdot 4297 \\ Fe_2O_3 &= 0 \cdot 1958 \\ Cr_2O_3 &= 0 \cdot 2339 \end{aligned}$$

Verhältniss der Äquivalente:

$$\begin{aligned} Cr_2O_3 : Fe_2O_3 &= 1 \cdot 25 : 1 \\ &= 5 : 4 \\ &= 100 : 80 \end{aligned}$$

Die Abweichung in der Concentration, 0·4297 Gr. der Oxyde statt 0·4044, wie sie sich aus dem vorigen Versuche ergibt, findet ihre Erklärung darin, dass nach dem jedesmaligen Eisenacetatzusatz gekocht wird, wodurch, je nach der Dauer dieser Operation, die Concentration sich mehr oder weniger ändert.

III. (Einfluss der Concentration.)

20 Cc. derselben Chromacetatlösung, die in I und II verwendet worden war, wurden ohne vorherige Verdünnung in ein trockenes Becherglas gebracht, aufgekocht und wie in I allmälig mit Eisenacetatlösung versetzt bis zur Trübung mit Ammon. Um eine Verdünnung zu vermeiden, wurde die Prüfung mit Ammoniak in trockenen Eprouvetten vorgenommen.

15 Cc. der Lösung gaben bei der Analyse:

$$\begin{aligned} Cr_2O_3 + Fe_2O_3 &= 0 \cdot 3200 \\ Fe_3O_3 &= 0 \cdot 1184 \\ Cr_2O_3 &= 0 \cdot 2016 \end{aligned}$$

Verhältniss der Äquivalente:

$$Cr_2O_3 : Fe_2O_3 = 1 \cdot 78 : 1$$
$$= 7 \cdot 12 : 4$$
$$= 100 : 56$$

IV. (Einfluss des Kochens.)

20 Cc. derselben Chromlösung wie in I, II, III, die unmittelbar vor diesem Versuche gekocht und dann erkalten gelassen worden war, wurden mit Eisenacetatlösung in der Kälte so lange versetzt, bis mit Ammon unter gleichen Umständen wie in I die Trübung eintrat.

20 Cc. der Lösung lieferten:

$$Cr_2O_3 + Fe_2O_3 = 0 \cdot 3181$$
$$Fe_2O_3 = 0 \cdot 0913$$
$$Cr_2O_3 = 0 \cdot 2268$$

Verhältniss der Äquivalente:

$$Cr_2O_3 : Fe_2O_3 = 2 \cdot 6 : 1$$
$$= 10 \cdot 4 : 4$$
$$= 100 : 38 \cdot 4$$

V. (Einfluss der Zeit.)

Von den Versuchen III und IV waren Proben der Flüssigkeiten aufbewahrt worden, und nach $1^1/_2$tägigem Stehen neuerdings mit Ammon geprüft worden. In beiden Fällen war das Eisen unfällbar geworden.

Die Menge des Eisenacetats, die von einer bestimmten Quantität von Chromacetat passiv gemacht wird, steigt daher bis zu einem gewissen Grade mit der Temperatur und mit der Verdünnung der Lösungen und soferne nicht gekocht wird, mit der Zeit, durch welche hindurch die Salze aufeinander einwirken.

Ebenso wie auf Eisenacetat wirkt das Chromacetat auch auf Aluminiumacetat. Der einzige Unterschied besteht darin, dass das Aluminium durch Kochen mit grünem Chromacetat nicht gefällt werden kann wie das Eisenacetat. Das Verhalten der Lösungsgemische gegen Natriumacetat, Ammoniak, Ätzalkalien ist ganz dasselbe wie das eben beschriebene der Mischungen von Chromacetat und Eisenacetat.

Analyse eines vegetabilischen Fettes.

Von **Friedrich Reinitzer,**
Assistent am chemischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule zu Prag.

(Mit 1 Tafel.)

Vor längerer Zeit übergab mir Herr Professor Dr. Gintl ein Fett zur Untersuchung, welches er von Herrn Chevalier de Reali in Venedig unter dem Namen „Pflanzenfett" erhalten hatte, das seinen äusseren Eigenschaften nach eine grosse Ähnlichkeit mit dem sogenannten Dikafette zeigte. Das Fett ist von einer der Cacaobutter ähnlichen Consistenz und Farbe und zeigt auch, namentlich beim Erwärmen, einen dieser ähnlichen Geruch. Seine Reaction war schwach sauer. Es enthält im rohen Zustande etwas Wasser sowie eine grosse Menge von Pflanzenfragmenten eingeschlossen, woraus gefolgert werden kann, dass es aus den betreffenden Pflanzentheilen durch Kochen mit Wasser gewonnen wird. Die Analyse dieses Fettes ergab jedoch, dass es durchaus nicht identisch ist mit dem von Oudemans[1] analysirten Dikafette. Da Herr Reali trotz diesbezüglich an ihn gestellter wiederholter Anfragen nichts Näheres über die Abstammung dieses Fettes mittheilen wollte oder konnte, habe ich versucht, durch mikroskopische Untersuchung der eingeschlossenen Pflanzenfragmente über diesen Punkt ins Klare zu kommen. Um zunächst die erwähnten Fragmente vom Fette zu trennen, wurde eine grössere Menge desselben im Dampftrichter filtrirt, aus dem Rückstande die grösseren, morphologisch gut charakterisirten Stücke ausgesucht und mit Äther vom Fette befreit. Ich erhielt so einige Fragmente von Holz, ein etwas grösseres Rindenstückchen und eine grössere Menge von Samenfragmenten, welche letzteren die Hauptmasse der Pflanzenreste bildeten,

[1] Journ. f. pract. Chem. 81, pag. 356.

jedoch zum grössten Theile zu einem feinen Pulver zerquetscht waren. Herr Professor Dr. August Vogel in Wien hatte die dankenswerthe Freundlichkeit, die Bestimmung dieser Pflanzenfragmente auf Grund einer von mir angefertigten, ihm übersandten Zeichnung verschiedener Schnitte durch dieselben, welche auf beifolgender Tafel wiedergegeben ist, vorzunehmen, und mir die Mittheilung zu machen, dass dieser Zeichnung zufolge die fraglichen Reste unzweifelhaft von einer *Anacardiacee* abstammen müssen.

Das Fett selbst wurde nun in der gewöhnlichen Weise analysirt, nachdem es vorher noch durch Filtration im Dampftrichter, und mehrmaliges Umschmelzen mit Wasser gereinigt worden war. Das so gereinigte Fett zeigte einen Schmelzpunkt von 41° C. (unc.). Da es zum grössten Theile aus festen Fetten bestand, so wurde zunächst die Hauptmasse derselben in der Weise entfernt, dass das Gemenge der Fett- und Ölsäuren, welches aus der durch wiederholtes Aussalzen gereinigten Natronseife, durch Zerlegen mit Salzsäure erhalten worden war, in siedend heissen Alkohol bis zur Sättigung eingetragen, und die nach dem Erkalten krystallinisch erstarrte Masse zwischen Presstüchern abgepresst wurde. Der Pressrückstand, welcher vollkommen weiss war, wurde noch 2mal aus Alkohol umkrystallisirt und dann einer fractionirten Fällung unterworfen. Das alkoholische Filtrat wurde durch Destillation im Kohlensäurestrome vom Alkohol befreit, mit Natronlauge verseift, durch Bleiacetat gefällt, die erhaltenen gereinigten und getrockneten Bleisalze durch Behandeln mit Äther in diejenigen der Ölsäuren und Fettsäuren getrennt, die ätherischen Lösungen durch Schwefelwasserstoff entbleit, durch Destillation im Kohlensäurestrome vom Äther befreit und hierauf ebenfalls der fractionirten Fällung unterworfen. Diese wurde sowohl bezüglich der Fettsäuren als auch der Ölsäuren mittelst der Barytsalze nach der Methode von Heintz vorgenommen, wornach das Gemenge der Ammonsalze der Säuren zunächst in Hälften zerlegt, jede dieser Hälften wieder halbirt wird u. s. w. Jede der erhaltenen Fractionen der Barytsalze wurde durch 2—3maliges Umkrystallisiren aus Alkohol gereinigt und hierauf direct zur Molekulargewichtsbestimmung verwendet, welche in der Weise ausgeführt wurde, dass eine

gewogene Menge des Barytsalzes vollständig verascht und hierauf mit Schwefelsäure abgedampft wurde.

Es wurden auf diese Art folgende Resultate erhalten:

I. Fettsäuren.

Erste Fraction (A).

0·7958 Grm. Barytsalz geben 0·2636 Grm. $BaSO_4$; daraus berechnetes Molekulargewicht = 284·4. Da das Molekulargewicht der Stearinsäure 284 ist, so konnte diese Fraction als reiner stearinsaurer Baryt angesehen werden.

Zweite Fraction (B).

Dieselbe wurde sogleich in zwei weitere Fractionen zerlegt (*B,a* und *B,b*).

Fraction (B,a).

0·1302 Grm. Barytsalz geben 0·0454 Grm. $BaSO_4$; daraus berechnet sich als Molekulargewicht 267·6, was dafür spricht, dass diese Fraction entweder Palmitinsäure (etwa $^4/_7$ Theile) oder Ölsäure enthalten musste. Es wurde daher über die Hälfte ausgefällt und von dem im Filtrate enthaltenen Antheile wieder eine Bestimmung des Molekulargewichtes gemacht. Diese ergab für 0·5416 Grm. Barytsalz 0·1810 Grm. $BaSO_4$, woraus sich das Molekulargewicht 281·1 berechnet. Somit erwies sich auch diese Fraction als Stearinsäure und die Abweichung der ersterhaltenen Zahl konnte nur durch eine Verunreinigung (wahrscheinlich $BaCO_3$) hervorgebracht worden sein.

Fraction (B,b).

0·2234 Grm. Barytsalz geben 0·0730 Grm $BaSO_4$; daraus berechnetes Molekulargewicht = 289·2. Da 284 das Molekulargewicht der Stearinsäure, 298 das der nächst höheren Fettsäure ist, so konnte diese Fraction nur aus Stearinsäure bestehen. Da also die Fractionen B,a und B,b beide aus stearinsaurem Baryt bestanden, so erschien ein weiteres Fractioniren nicht mehr nöthig und es ist zunächst der Schluss zulässig, dass von festen Fettsäuren lediglich Stearinsäure vorhanden ist.

II. Ölsäuren.

Erste Fraction (A).

0·5803 Grm. Barytsalz gaben 0·1923 Grm. $BaSO_4$; daraus berechnetes Molekulargewicht = 284·05 statt 282 für Ölsäure.

Zweite Fraction (B).

Diese wurde wieder in 2 Theile zerlegt (B^1 und B^2).

Fraction B^1.

0·3667 Grm. Barytsalz gaben 0·1226 Grm. $BaSO_4$. Daraus berechnet sich das Molekulargewicht zu 282·29. Somit besteht auch diese Fraction aus ölsaurem Baryt.

Fraction B^2.

0·6430 Grm. Barytsalz gaben 0·2165 Grm .$BaSO_4$, somit das Molekulargewicht 279·04, was hinreichend genau auf Ölsäure stimmt und ein weiteres Fractioniren daher unnöthig werden liess. Es ergibt sich also das interessante Resultat, dass das in Rede stehende Pflanzenfett lediglich aus Stearinsäure und Ölsäure besteht, was es zur Darstellung grösserer Mengen reiner Stearinsäure geeignet erscheinen lässt.

Da ich von dem Fette eine grössere Menge zur Verfügung hatte, so machte ich noch den Versuch, diejenige Substanz daraus zu isoliren, welche der Träger des eigenthümlichen Geruches desselben ist. Leider gelang es mir nicht, eine nur irgend erheblichere Menge davon zu erhalten. Nachdem ich zuächst durch einfache Destillation der freien Säuren mit Wasser nichts erhalten hatte, suchte ich der Substanz durch Destillation mit überhitztem Wasserdampf habhaft zu werden. Ich erhielt jedoch bloss ein sehr schwach sauer reagirendes Destillat, in welchem sich nur eine sehr geringe Menge von, mit dem Wasserdampfe flüchtigen, festen Fettsäuren befand, die als dünnes Häutchen obenauf schwammen. Es besass allerdings in hohem Grade den Geruch des Fettes, jedoch zeigte es sich bei weiterer Untersuchung sehr bald, dass die Mengen der darin enthaltenen Substanzen für genauere Analysen vollkommen unzureichend waren. Da aber das rückständige Fett immer noch einen sehr deutlichen Geruch

hatte, so glaubte ich die geringe Ausbeute der Unvollkommenheit der Methode zuschreiben zu können, und versuchte daher noch einen anderen Weg der Darstellung, für welchen ich die ganze mir noch zur Verfügung stehende Substanz (etwa 5 Klgrm.) verwendete. Ich stellte mir zunächst die Kalksalze her und behandelte diese im zerkleinerten Zustande wiederholt mit grossen Mengen von kaltem und heissem Wasser, wodurch sich die Kalksalze der flüchtigen Fettsäuren lösen mussten, welch' letztere ja aller Wahrscheinlichkeit nach in diesem Falle die Träger des Geruches sind. Ich erhielt auch in der That flüchtige Fettsäuren, welche sehr auffallend den Geruch des ursprünglichen Fettes zeigten, aber auch hier war die Menge der erhaltenen Substanz eine viel zu geringe und schien überdies nicht unbedeutende Mengen von Ölsäure und vielleicht auch Stearinsäure zu enthalten.

Ich beschränkte mich somit darauf, das quantitative Verhältnis zu ermitteln, in welchem die Stearinsäure zur Ölsäure steht. Dies geschah nach der Methode von J. David[1]. Ich erhielt nach dieser Methode bei zwei Bestimmungen, welche beide mit 1·0000 Grm. Substanz ausgeführt wurden, vollkommen übereinstimmende Resultate, nämlich 0·5772 Grm. Stearinsäure, woraus folgt, dass das Gemenge der freien Säuren aus 57·72% Stearinsäure und 32·28% Ölsäure besteht. Nimmt man an, dass dieselben in dem Fette als neutrale Ester des Glycerins vorhanden sind, was allerdings nicht vollkommen zulässig ist, da das Fett schwach sauer reagirt, so ergibt sich als procentische Zusammensetzung des Fettes:

57·88% Tristearin und
42·12% Triolein
100·00.

Durch den Umstand, dass das untersuchte Fett blos die Glyceride der Stearinsäure und Ölsäure enthält, erinnert dasselbe an die Sheabutter, unterscheidet sich jedoch von derselben ganz deutlich durch den Schmelzpunkt und das quantitative Verhältniss der beiden Säuren. Ferner stammt die Sheabutter von *Bassia Parkii* Don., einer Sapotacee, während das in Rede stehende Fett, wie schon erwähnt, höchst wahrscheinlich einer *Anacardiacee* entstammt.

[1] Compt. rend. 1878, Nr. 22, pag 1416.

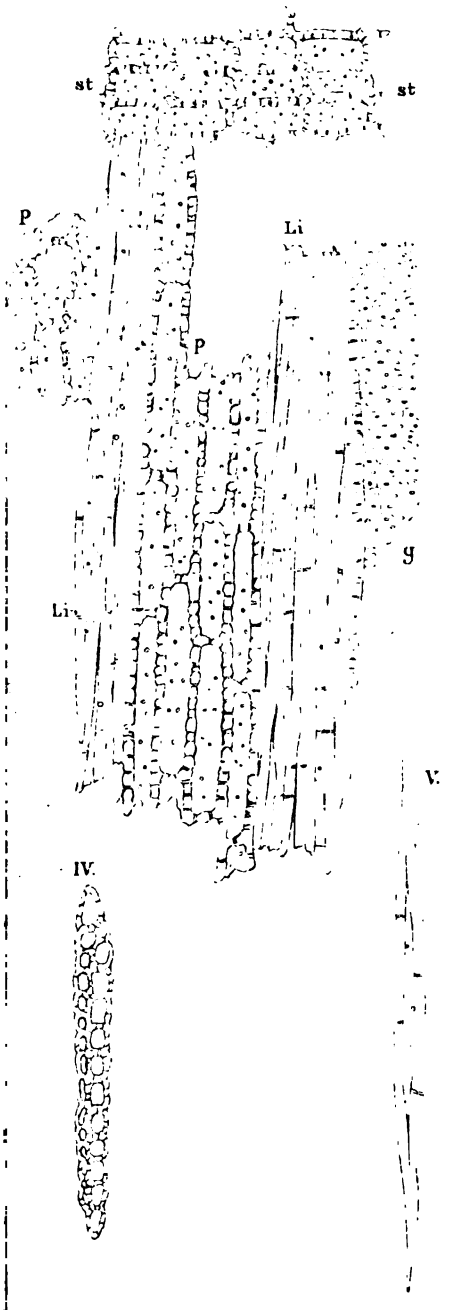
Anknüpfend an diese Mittheilung der Ergebnisse meiner Untersuchung halte ich es für geboten, einzelne Beobachtungen anzuführen, welche ich bei derselben zu machen Gelegenheit fand, und die Thatsachen betreffen, welche die bisherige Kenntniss der bei der Analyse von Fetten in Betracht kommenden Verhältnisse ergänzen.

Zunächst habe ich die Überzeugung erlangt, dass der ölsauere Baryt nur im Vacuum über Schwefelsäure getrocknet werden darf, da er bei 100° C., selbst bei gewöhnlichem Luftdrucke beständig Ölsäure verliert, wobei er sich in ein basisches Salz zu verwandeln scheint.[1] Der stearinsauere Baryt dagegen erheischt diese Vorsicht nicht, und kann ganz unbeschadet bei 100° C. getrocknet werden. Ferner erscheint mir erwähnenswerth, dass man bei der Darstellung der Ammonsalze der Fett- und Ölsäuren stets einen Überschuss von Ammoniak in der Lösung belassen muss. Bekanntlich lösen sich die freien Fettsäuren in der Kälte nur sehr langsam in Ammoniak und muss man daher erwärmen, um ihre Lösung zu beschleunigen. Erwärmt man nun solange bis kein Ammoniak mehr entweicht, so ist der Rückstand kein neutrales Salz mehr, sondern ein saueres. Auch das ölsauere Ammon hinterlässt, wenn es solange erhitzt wird, bis kein Ammoniak mehr entweicht, ein saueres Salz. Über dieses Verhältniss belehrte mich die Erscheinung, dass ich anfangs für die Ölsäure (Fract. A) durchwegs zu hohe Resultate, nämlich: 294, 299 und 303 statt 282 erhielt. Ebenso erhielt auch Gottlieb einmal bei Nichtanwendung eines Überschusses von Ammoniak ein saueres Silbersalz.[2] Es erweist sich daher nothwendig, nach erfolgter Auflösung und nach dem Abkühlen, mit einem Überschusse von Ammoniak zu versetzen, und das bei der Fällung stets in kleiner Menge noch entstehende Baryumcarbonat durch mehrmaliges Umkrystallisiren aus Alkohol zu entfernen.

---

[1] Diese Thatsache scheint auch schon Gottlieb bekannt gewesen zu sein, da auch er den ölsaueren Baryt im Vacuum trocknete, ohne jedoch einen Grund hiefür anzugeben. (Annal. d. Chem. 57, p. 38.)

[2] Annal. d. Chem. 57, pag. 51.



K.K Hof- u. Staatsdruckerei

li.1882.

Figuren-Erklärung.

Fig. 1. Querschnitt durch ein Stückchen eines Samenfragmentes (Cotyledon) mit der Epidermis.

„ 2. Querschnitt und Fig. 3 Radialschnitt durch ein Holzfragment. st, st Markstrahlen; Li Libriform; p Holzparenchym; g Gefässe.

„ 4. Tangentialschnitt durch einen Markstrahl.

„ 5. Einzelne Libriformfaser.

„ 6. Querschnitt durch die Rinde.

Sämmtliche Figuren sind in 400facher Vergrösserung gezeichnet

Seite

Ginzel, Astronomische Untersuchungen über Finsternisse. I. Abhandlung. (Mit 2 Karten.) [Preis: 1 fl. = 2 RMk.] . 663

v. Obermayer, Versuche über Diffusion von Gasen. II. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 748

Janovsky, Über Sulfosäuren des Azobenzols 762

IX. Sitzung vom 30. März 1882: Übersicht 774

Jahn, Über die Dampfdichte des Brom. (Mit 1 Holzschnitt.) . 778

— Zur Kenntniss der Aminbasen secundärer Alkohole . . 797

Reinitzer B., Studien über das Verhalten der Acetate des Chroms, Eisens und Aluminiums 808

— *Fr.*, Analyse eines vegetabilischen Fettes. (Mit 1 Tafel.) . 825

Preis des ganzen Heftes: 3 fl. 20 kr. = 6 RMk. 40 Pfg.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.

OCT 19 1882

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXV. BAND. IV. und V. HEFT.

Jahrgang 1882. — April und Mai.

(Mit 5 Tafeln und 11 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1882.

INHALT

des 4. und 5. Heftes April und Mai 1882 des LXXXV. Bandes, II. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

X. Sitzung vom 20. April 1882: Übersicht 835

Weyr, Über gemeinschaftliche Bisekanten algebraischer Raumcurven. [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 840

Le Paige, Über conjugirte Involutionen [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 844

Hočevar, Zur Integration der Jakobi'schen Differentialgleichung $Ldx+Mdy+N(xdy-ydx)=0$ [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.] 848

Bečka, Über die Bahn des Planeten Ino (173) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 865

Puluj, Strahlende Elektrodenmaterie. IV. Abhandlung. (Mit 8 Holzschnitten.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 871

Mauthner, Über das optische Drehungsvermögen des Tyrosins und Cystins [Preis: 8 kr. = 16 Pfg.] 882

XI. Sitzung vom 4. Mai 1882: Übersicht: 889

v. Escherich, Die Construction der algebraischen Curven und Flächen aus der Anzahl sie bestimmender Punkte mittelst reciproker linearer Systeme höherer Stufe. (Vorläufige Mittheilung. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 893

Simony, Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. (Mit 5 Tafeln.) (Preis: 75 kr. = 1 RMk. 50 Pfg.] 907

Gruss, Über die Bahn der Loreley (165). [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 929

Wegscheider, Über Derivate und Constitution der Opiansäure und Hemipinsäure 937

Skraup, Synthetische Versuche in der Chinolinreihe. 3. Mittheilung 970

Lustgarten, Über den Nachweis von Jodoform, Naphtol und Chloroform in thierischen Flüssigkeiten und Organen 975

XII. Sitzung vom 11. Mai 1882: Übersicht 983

Stefan, Über die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 987

Wassmuth, Über die specifische Wärme des stark magnetisirenden Eisens und das mechanische Äquivalent einer Verminderung des Magnetismus durch die Wärme. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 997

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXV. Band. IV. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

X. SITZUNG VOM 20. APRIL 1882.

Herr Dr. L. J. Fitzinger führt als Alterspräsident den Vorsitz.

Die Direction des k. k. Staatsgymnasiums II. Prag-Neustadt dankt für die dieser Lehranstalt bewilligten akademischen Publicationen.

Die Direction der k. k. Familien-Fideicommiss-Bibliothek übermittelt die Fortsetzung des als Manuskript gedruckten Kataloges der genannten Bibliothek. (Abtheilung I, Band III.)

Die Direction des k. k. militär-geographischen Institutes übermittelt den I. Band der von diesem Institute im Auftrage des k. und k. Reichs-Kriegs-Ministeriums vom Jahre 1881 an herausgegebenen „Mittheilungen".

Das w. M. Herr Hofrath A. Winckler übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. F. Hočevar in Innsbruck, betitelt: „Zur Integration der Jacobi'schen Differentialgleichung

$$Ldx + Mdy + N(xdy - ydx) = 0.$$"

Das c. M. Herr Prof. E. Weyr in Wien übersendet eine Abhandlung: „Über gemeinschaftliche Bisekanten algebraischer Raumcurven."

Ferner übersendet Herr Prof. Weyr eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. C. Le Paige an der Universität in Lüttich: „Über conjugirte Involutionen."

Das c. M. Herr Prof. Friedr. Brauer in Wien übersendet eine Arbeit: „Über das *Ségment médiaire* Latreille's."

Das c. M. Herr Prof. R. Maly in Graz übersendet eine Untersuchung: „Über das Basen-Säureverhältniss im Blutserum und andern thierischen Flüssigkeiten. Ein Beitrag zur Lehre von der Secretbildung."

Herr Prof. Maly übersendet ferner eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Herrn Friedr. Emich: „Über das Verhalten der Rindsgalle zu der Hüfner'schen Reaction und über einige Eigenschaften der Glycocholsäure."

Das c. M. Herr Prof. E. Ludwig übersendet eine Mittheilung des Herrn Dr. Julius Mauthner in Wien: „Über das optische Drehungsvermögen des Tyrosins und Cystins."

Das c. M. Herr Director C. Hornstein übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. G. Bečka, Assistenten der Prager Sternwarte: „Über die Bahn des Planeten Ino (173)."

Der Secretär legt noch folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Criterium für relative Maxima und Minima", von Herrn A. Sýkora, Realschullehrer in Rakonitz (Böhmen).
2. „Die Normalform der allgemeinen Kegelschnittsgleichung", von Herrn A. Breuer, Supplent an der Staatsrealschule in Trautenau.

Das w. M. Herr Prof. E. Suess überreicht eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. F. Bassani in Padua, betitelt: „Descrizione dei Pesci fossili di Lesina."

Das w. M. Herr Director Dr. Franz Steindachner überreicht eine Abhandlung von Herrn Dr. J. V. Rohon in Wien: „Über den Ursprung des Nervus acusticus bei Petromyzonten."

Das c. M. Herr Professor Sigmund Exner überreicht eine Untersuchung von Herrn Dr. Paulsen aus Kiel, die den Titel trägt: „Experimentelle Untersuchungen über die Strömung der Luft in der Nasenhöhle."

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Adolf Weiss aus Prag überreicht als zehnten Beitrag seiner Mittheilungen aus dem k. k. pflanzen-physiologischen Institute der dortigen Universität eine Abhandlung unter dem Titel: „Beiträge zur Kenntniss der absoluten Festigkeit von Pflanzengeweben."

Herr Prof. Dr. Oskar Simony überreicht den ersten Theil einer Abhandlung, betitelt: „Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie des Sciences et Lettres de Montpellier. Mémoires de la section des Sciences. Tome X, 1er fascicule. Année 1880. Montpellier, 1881; 4°.

— royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 51e année, 3e série, tome 3. Nrs. 1 & 2. Bruxelles, 1882; 8°.

— royale des sciences: Öfversigt af Förhandlingar. 38de Årg N: ris 8—10. Stockholm. 1882; 8°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche der Naturforscher: Leopoldina, Heft XVIII, Nr. 5—6. März 1882. Halle a. S.; 4°.

Annales des ponts et chaussées: Mémoires et Documents. 1882 Fevrier. 6e série, 2e année, 2e cahier. Paris; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XX. Jahrgang. Nr. 10 & 11. Wien, 1882; 8°.

Astor Library: Thirty-third Annual report of the Trustees for the year 1881. Albany, 1882; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VI. Nr. 14, 16 & 17. Cöthen, 1882 4°.

Comptes rendus des Séances de l'Académie des sciences. Tome XCIV. Nrs. 12—14. Paris, 1882; 4°.

Deputazione, R. sugli studi di storia patria: Statuti della Università e studio fiorentino dell'anno 1387 seguiti da un' appendice di documenti dal 1320 al 1472 publicati da Alessandro Gherardi. Volume unico. In Firenze 1881; gr. 4°.

Faculté des Lettres de Bordeaux: Annales. IVe année Nr. 1. Janvier—Février 1882. Bordeaux, Londres, Berlin, Paris, Toulouse; 8°.

Gesellschaft, Deutsche chemische: Berichte. XIV. Jahrgang Nr. 20. Berlin, 1881; 8°. — XV. Jahrgang Nr. 5. Berlin, 1882; 8°.

— gelehrte Estnische zu Dorpat: Verhandlungen. X. Band, 4. Heft. Dorpat, 1881; 8°.

— — : Sitzungsberichte 1881: Dorpat, 1882; 8°.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXV. (N. F. XV.) Nr. 2 u. 3. Wien, 1882; 8°.

Gesellschaft, österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XVII. Band. April-Heft 1882. Wien; 8°.

— österreichische zur Förderung der chemischen Industrie: Berichte. IV. Jahrgang 1882. Nr. 1. Prag; 4°.

— physikalisch-medicinische zu Würzburg: Sitzungsberichte. Jahrgang 1881. Würzburg, 1881; 8°.

— — : Verhandlungen. N. F. XVI. Band. Würzburg, 1881; 8°.

— k. k. zoologisch-botanische in Wien: Verhandlungen. Jahrgang 1881. XXXI. Band. Wien, 1882; 8°.

Gewerbe-Verein, niederösterr.: Wochenschrift. XLIII. Jahrg. Nr. 13—15. Wien, 1882; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. VII. Jahrgang, Nr. 13—15. Wien, 1882; 4°.

Johns Hopkins University: American Journal of Mathematics. Vol. IV. Number 2. Baltimore, 1881; 4°.

Journal de l'École polytechnique. 49e cahier. Tome XXX. Paris, 1881; 4°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1882. 2. und 3. Heft. Wien, 1882; 8°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 26e année, 3e série, tome XII, 484e livraison — Avril 1882. Paris; 8°.

Musée d'Histoire naturelle de Caen: Annuaire, 1er volume. Année 1880. Caen, Paris; 8°.

Nature. Vol. XXV, Nrs. 648—650. London, 1882; 8°.

Purves, J. — C. Dr.: Sur la Délimitation et la Constitution de l'Étage houiller inférieur de la Belgique. Bruxelles, 1881; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 5&6 — 1882. Wien; 8°.

Repertorium für Experimental-Physik, für physikalische Technik etc. von Dr. Ph. Carl. XVIII. Band, 4. Heft. München und Leipzig, 1882; 8°.

Société des Sciences de Nancy: Bulletin. Serie II. Tome V. Fascicule XII. 13e année 1880. Paris, 1881; 8°.

— entomologique de France: Annales. 5e série. Tome X. 1880. 1er—4e trimestre. Paris, 1880; 8°.

Société géologique de France: Bulletin: 3ᵉ série, tome VIII. — 1880. Nrs. 3—6. Paris, 1879 a 1880; 8⁰. Tome IX. — 1881. Nrs. 4—6. Paris, 1880—81; 8⁰.

— Linnéenne de Bordeaux: Actes. Vol. XXXIV. 4ᵉ série, tome IV. Bordeaux, 1880; 8⁰.

— Linnéenne de Lyon: Annales. Année 1879 & 1880. Tomes XXVI et XXVII. Lyon, Paris, 1879—80; 8⁰.

— Linnéenne de Normandie: Bulletin. 3ᵉ série, 4ᵉ volume. Année 1879—80. Caen, Paris, 1880; 8⁰.

— zoologique de France: Bulletin pour l'année 1881. 6ᵉ année, 1re—4ᵉ parties. Paris, 1881; 8⁰. — De la Nomenclature des Etres organisés. Paris, 1881; 8⁰.

Society, the royal géographical: Proceedings and Monthly Report of Geography. Vol. IV. Nr. 4. April 1882. London; 8⁰.

Verein, militär-wissenschaftlicher, in Wien: Organ. XXIV. Band, 2. & 3. Heft, 1882. Wien; 8⁰.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXII. Jahrgang. Nr. 13 bis 15. Wien, 1882; 4⁰.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. III. Jahrgang Nr. 6 und Ausserordentliche Beilage Nr. III & IV. Wien, 1882; 8⁰.

Über gemeinschaftliche Bisekanten algebraischer Raumcurven.

Von dem c. M. **Emil Weyr.**

Im LX. Bande des Crelle'schen Journals f. r. u. ang. Math. p. 188, bestimmt Cremona die Zahl der Bisekanten, welche zwei Raumcurven dritter Ordnung gemeinschaftlich sind und findet zehn solche Sekanten. Die zur Anwendung gebrachte Methode stützt sich auf die Degeneration der cubischen Raumcurven und dürfte ein ähnlicher Vorgang Cremona zu dem Resultate geführt haben, das er an citirter Stelle angibt und welches die Zahl der Bisekanten betrifft, welche zwei Raumcurven $R_m R_{m'}$ von den Ordnungen $m\ m'$ respective gemeinschaftlich sind. Diese Zahl ist nach Cremona gleich

$$\frac{(m-1)(m'-1)(mm'-4r)}{4} + aa' + \frac{r(r-1)}{2},$$

wenn a, a' die Zahlen der scheinbaren Doppelpunkte von $R_m\ R_{m'}$ respective sind, und r die Zahl der, beiden Curven gemeinschaftlichen Punkte darstellt.

Es ist vielleicht nicht uninteressant zu sehen, wie man zu der Zahl gemeinschaftlicher Bisekanten im Falle einer Raumcurve dritter Ordnung und einer rationalen Raumcurve m^{ter} Ordnung mit einem Schlage und, ohne Degenerationen nothwendig zu haben, gelangen kann. Es sei R_m die Curve m^{ter} Ordnung und R_3 jene der dritten Ordnung. Die durch R_3 gehenden Flächen zweiten Grades bilden ein Netz; durch irgend zwei Punkte $p\ q$ geht nur eine Fläche zweiten Grades, welche R_3 enthält und die man in bekannter Art erhalten kann. Man hat nur durch p und q

die Sekanten PQ von R_3 zu legen und diese mit den einzelnen Punkten von R_3 durch Ebenen zu verbinden; so erhält man zwei projectivische Ebenenbüschel mit den Axen PQ, welche die gesuchte Fläche (Hyperboloid) erzeugen. Nur wenn p und q auf einer und derselben Bisekante von R_3 liegen, d. h. wenn Q mit P identisch wird, wird die Fläche zweiten Grades unbestimmt. In der That bildet R_3 mit jeder Bisekante P den Durchschnitt von unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung.

Die einzelnen, durch R_3 gehenden Flächen zweiten Grades schneiden R_m in Gruppen von je $2m-r$ Punkten, wenn wir annehmen, dass R_m und R_3 r feste Punkte gemeinschaftlich haben.

Alle diese Punktgruppen bilden offenbar eine Involution zweiter Stufe, da jede Gruppe durch die Wahl zweier Punkte vollkommen bestimmt erscheint. — Nun hat eine Involution $(2m-r)^{\text{ten}}$ Grades und zweiter Stufe $\frac{(2m-r-1)(2m-r-2)}{2}$ neutrale Elementenpaare,[1] von denen hier offenbar jedes zu einer Sekante Veranlassung gibt, welche R_3 und R_m je zweimal schneidet. Denn, ist p, q eines dieser neutralen Punktepaare auf R_m, so ist die Verbindungslinie pq erstens eine Bisekante von R_m; aber es ist pq nothwendig auch eine Bisekante von R_3, weil der Natur des neutralen Punktepaares gemäss, durch p, q und R_3 unendlich viele Flächen zweiten Grades gehen müssen, was aber nur dann der Fall sein kann, wenn pq die Curve R_3 zweimal schneidet. Die Zahl der Bisekanten, welche einer kubischen Raumcurve und einer rationalen Raumcurve m^{ter} Ordnung gemeinschaftlich sind, ist somit $\frac{(2m-r-1)(2m-r-2)}{2}$, wenn beide Curven r gemeinsame Punkte besitzen. Diese Zahl erhält man aus der Cremona'schen Formel, wenn man $m'=3$, $a'=1$, $a=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ setzt. Für $r=0$ und $m=3$ ergeben sich die zehn Bisekanten, welche zwei beliebigen kubischen Raumcurven gemeinschaftlich sind.

---

[1] Siehe: „Über Involutionen n^{ten} Grades und k^{ter} Stufe. Sitzb. vom 17. April 1879. Nr. X.

Bezüglich der zehn gemeinschaftlichen Bisekanten

$$S_i \,(i = 1 \ldots . 10)$$

zweier Raumcurven dritter Ordnung R_3, R'_3 möge noch bemerkt werden, dass je neun als Axen von Raumcurven dritter Classe auftreten, welche zu R_3 R'_3 in involutorischer Beziehung stehen, d. h. es gibt unendlich viele Tetraëder, welche den Curven $R_3 R'_3$ eingeschrieben und jenen Raumcurven dritter Classe umschrieben sind. Bezeichnet man nämlich mit $p_i q_i \,(i = 1 \ldots 10)$ die Punktepaare, welche die Sekanten S_i mit einer der Raumcurven z. B. mit R_3 gemeinschaftlich haben, so gehören je neun dieser zehn Punktepaare einer biquadratischen Punktinvolution erster Stufe an, deren Involutionscurve J_3 bekanntlich eine Raumcurve dritter Classe ist;[1] jene neun Punktepaare liegen somit auf neun Axen dieser Curve dritter Classe. Die sämmtlichen zehn Raumcurven (Developpablen) dritter Classe, die man den zehn Geraden S_i entsprechend erhält, sind einer und derselben Fläche vierter Classe F_4 umschrieben, welche die sämmtlichen zehn Geraden S_i enthält. Die durch R'_3 gehenden Flächen zweiten Grades schneiden R_3 in sechspunktigen Gruppen; die Punkte jeder solchen Gruppe kann man zu dreien durch zwölf Ebenen verbinden, und alle diese Ebenen berühren die Fläche vierter Classe F_4.

Die vorhergehenden Betrachtungen kann man in der Art verallgemeinern, dass man eine rationale Raumcurve m^{ter} Ordnung R_m mit einem allgemeinen Flächennetz p^{ter} Ordnung in Verbindung bringt. Die Flächen bestimmen auf R_m eine Involution $(mp-r)^{\text{ten}}$ Grades und zweiter Stufe, wenn das Netz r Scheitel auf R_m besitzt; den $\frac{(mp-r-1)(mp-r-2)}{2}$ neutralen Punktepaaren dieser Involution entsprechen ebenso viele Scheitelcurven $p^{2\text{ten}}$ Grades, durch welche ein Flächenbüschel des Netzes hindurchgeht und welche R_m in je zwei Punkten schneiden.

Denkt man sich das Netz aus Flächen p^{ter} Ordnung bestehend, welche durch $\left[\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3} - 3\right]$ feste Punkte hindurchgehen, so hat man sofort den Satz:

[1] Siehe: „Über Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen kubischen Curve". Sitzb. v. 9. März 1882. Artikel 2.

„Durch $\left[\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3} - 3\right]$ Punkte, von denen r auf einer rationalen Raumcurve m^{ter} Ordnung liegen, kann man $\frac{(mp-r-1)(mp-r-2)}{2}$ Curven p^{2ter} Ordnung legen, welche Schnittcurven zweier Flächen p^{ter} Ordnung sind und die Raumcurve m^{ter} Ordnung zweipunktig schneiden.“

Über conjugirte Involutionen.

Von Dr. **C. Le Paige**,
Professor der höheren Geometrie an der Universität zu Lüttich.

Herr Emil Weyr hat in seiner Abhandlung: „Über die Bedeutung des räumlichen Nullsystems für cubische Involutionen beider Stufen“ (Sitz. vom 15. December 1881) die meisten von den Eigenschaften conjugirter cubischer Involutionen entwickelt. Wir erlauben uns hier einige Bemerkungen der obigen Arbeit beizufügen, welche vielleicht von Interesse sein dürften, da sie zeigen, wie man zu den Resultaten Weyr's durch Betrachtung der entsprechenden algebraischen Formen gelangen kann.

Es sei eine cubische Involution gegeben durch die Gleichung

$$\lambda a_x^3+\mu b_x^3 = 0.$$

Die Hesse'sche Form der linken Seite ist

$$\lambda^2\Delta_x^2+2\lambda\mu\Theta_x^2+\mu^2\nabla_x^2,$$

wobei zu setzen ist:

$$\Delta_x^2 = (aa')^2a_xa'_x, \quad \Theta_x^2 = (ab)^2a_xb_x, \quad \nabla_x^2 = (bb')^2b_xb'_x.$$

Das Verschwinden der Hesse'schen Form liefert zwei Elemente x, y auf dem Träger der Involution, für welche somit die Relationen:

$$\lambda^2\Delta_x^2+2\lambda\mu\Theta_x^2+\mu^2\nabla_x^2 = 0,$$
$$\lambda^2\Delta_y^2+2\lambda\mu\Theta_y^2+\mu^2\nabla_y^2 = 0$$

gelten. Durch Elimination von λ und μ aus diesen beiden Gleichungen erhält man als Verwandtschaftsbeziehung zwischen x und y:

$$(\Delta_x^2\nabla_y^2-\Delta_y^2\nabla_x^2)^2+4(\Theta_x^2\Delta_y^2-\Theta_y^2\Delta_x^2)(\Theta_x^2\nabla_y^2-\Theta_y^2\nabla_x^2) = 0,$$

welche nach Ausscheidung des linkerhand vorkommenden Factors $(xy)^2$ die Form erhält:

$$(\Delta\Theta)(\Theta\nabla)(\nabla\Delta)\big[x_1^2\{(a_0b_1)y_1^2+(a_0b_2)y_1y_2+(a_1b_2)y_2^2\}$$
$$+x_1x_2\{(a_0b_2)y_1^2+[(a_0b_3)+(a_1b_2)]y_1y_2+(a_1b_3)y_2^2\}$$
$$+x_2^2\{(a_1b_2)y_1^2+(a_1b_3)y_1y_2+(a_2b_3)y_2^2\}\big]=0.$$

Der zweite Factor dieser Gleichung gleich Null gesetzt, stellt nun die Gleichung der zu

$$\lambda a_x^3+\mu b_x^3=0^1$$

conjugirten cubischen Involution dar.

Überträgt man dieses Resultat auf eine Raumcurve dritter Ordnung R_3, so erhält man den von Weyr angeführten Satz:

Es sei O die Axe eines Ebenenbüschels, welches auf R_3 Tripel $x_1x_2x_3$ einer cubischen Punktinvolution bestimmt. Durch den Pol x der Ebene $x_1x_2x_3$ läuft eine Bisekante von R_3, welche eine este Gerade O' schneidet. Die Punktepaare, welche diese Sekanten auf R_3 bestimmen, gehören der conjugirten Involution an.[2]

Befindet sich die cubische Involution als Punktinvolution auf einem Kegelschnitt C_2 und ist K der Involutionskegelschnitt, so schneiden die Seiten eines Dreieckes, dessen Ecken $x_1x_2x_3$ eine Gruppe der Involution bilden, die Tangenten von C_2 in den Gegenecken in drei Punkten einer Geraden h, welche man als die Hesse'sche Gerade des Tripels $x_1x_2x_3$ bezeichnen kann, da sie C_2 in den durch:

$$\lambda^2\Delta_x^2+2\lambda\mu\Theta_x^2+\mu^2\nabla_x^2=0$$

dargestellten Punkten schneidet. Alle den einzelnen Tripeln der Involution auf C_2 entsprechenden Hesse'schen Geraden h umhüllen einen Kegelschnitt K', welcher die den Curven KC_2 gemeinschaftlichen Tangenten berührt; es gibt unendlich viele Dreiecke, welche C_2 ein- und K' umgeschrieben sind.

Die in einer früheren Mittheilung[3] enthaltenen Betrachtungen führen zu Resultaten, die geometrisch unmittelbar klar sind; so

---

[1] „Über eine Relation u. s. w." Sitzungsber. Bd. LXXXI pag. 160.

[2] Sitzungsberichte Bd. LXXXIV pag. 1272,

[3] L. Paige. Sitzgb. Bd. LXXXIV pag. 235. Em. Weyr. Ebend. pag. 1271.

z. B. erhält man sofort den Satz, dass drei conlocale cubische Involutionen zweiter Stufe ein gemeinsames Tripel besitzen, welches die dreifachen Elemente jener Involution enthält, die durch die Tripel dreifacher Elemente der drei Involutionen bestimmt erscheint. Ausserdem erhält man Sätze, welche unter jenen von Weyr aufgestellten entweder gar nicht oder nur implicite enthalten sind. Wir wissen, dass die Doppelelemente der durch

$$\lambda a_x^3 + \mu b_x^3 = 0$$

dargestellte Involution gegeben sind durch:

$$J = (ab) a_x^2 b_x^2 = 0;$$

die Verzweigungselemente erhält man aus:

$$3H_J + IJ = 0\,^1$$

und jene der conjugirten Involution aus:

$$3JH - IJ = 0.$$

Die gegebene Involution wird mit der conjugirten zusammenfallen, d. h., sie wird sich selbst conjugirt sein, wenn

$$I = 0$$

ist. Zwei Tripel sind harmonisch conjugirt oder apolar, wenn $I = 0$ ist; da nun I eine Combinante von a_x^3, b_x^3 ist, so hat man den Satz-

„Irgend zwei Tripel einer sich selbst conjugirten cubischen Involution sind immer apolar."

Man kann geometrisch leicht einsehen, dass diese Eigenschaft charakteristisch ist für sich selbst conjugirte Involutionen, denn es muss der Pol, der ein Tripel $x_1 x_2 x_3$ enthaltenden Ebene in der Ebene eines jeden Tripels liegen, d. h. die beiden Geraden $O\ O'$ (nach der Bezeichnung von Weyr) müssen zusammenfallen.

Der Satz: „Die Doppelelemente einer sich selbst conjugirten cubischen Involution bilden ein äquianharmonisches System",[2] ist eine Folge der Relation:

$$[(ab)^3]^2 = 6(JJ')^4.$$

---

[1] Sitzgb. Bd. LXXXI pag. 846.

[2] Em. Weyr, Sitzungsb. Bd. LXXXI pag. 164.

Aus dem gleichzeitigen Verschwinden der Jacobi'schen und ihrer Hesse'schen Invariante i folgt:

„Die Verzweigungselemente einer sich selbst conjugirten cubischen Involution bilden ein äquianharmonisches System."

Es sei f eine biquadratische Form; h die zugehörige Hesse'sche Form. Die Hesse'sche Form von

$$f_{kl} = kf + lh$$

ist:

$$h_{kl} = h(k^2 - \frac{i}{6} l^2) + f(\frac{i}{3} kl + \frac{j}{3} l^2).$$

Für $i = 0$ wird $h_{01} = \frac{1}{3} jf$, d. h.:

„Die cubische Involution, welche die Verzweigungselemente einer sich selbst conjugirten Involution zu Doppelelementen hat, besitzt die Doppelelemente der sich selbst conjugirten Involution als Verzweigungselemente."

Überträgt man die sich selbst conjugirte Involution auf eine cubische Raumcurve R_3, und sind $d_1 d_2 d_3 d_4$ die Doppelpunkte und $v_1 v_2 v_3 v_4$ die Verzweigungspunkte, und bezeichnet man allgemein mit (xy) die Ebene, welche den Punkt y mit der Tangente des Punktes x verbindet, so hat man den Satz: „Die Ebenen $(d_1 v_1)$ $(d_2 v_2)(d_3 v_3)(d_4 v_4)$ gehen durch eine Gerade O, und die Ebenen $(v_1 d_1)(v_2 d_2)(v_3 d_3)(v_4 d_4)$ durch eine Gerade Ω."

Zur Integration der Jacobi'schen Differentialgleichung $Ldx + Mdy + N(xdy - ydx) = 0$.

Von Dr. **Franz Hočevar** in Innsbruck.

Die oben bezeichnete Differentialgleichung, welche bekanntlich zuerst von Jacobi [1] integrirt worden ist, führt auf eine cubische Gleichung (Gleichung (5) in diesem Aufsatze), deren Wurzeln zur Bildung des allgemeinen Integrals verwendet werden. Trotz der reichen Literatur, welche diese Differentialgleichung und mit ihr verwandte allgemeinere Probleme aufweisen können,[2] ist in der Regel nur der Fall beachtet worden, dass die drei Wurzeln jener cubischen Gleichung reell und von einander verschieden sind. Erst Serret[3] und nach ihm Mansion[4] haben sich mit dem Falle zweier oder dreier gleicher Wurzeln beschäftigt.

Ersterer begnügt sich mit der Ableitung des allgemeinen Integrals, letzterer verificirt das Integral, wie es bei derartigen Ausnahmsfällen in der Regel erforderlich ist, indem er auf einem ziemlich langwierigen Wege die Differentialgleichung aus dem erhaltenen Integrale wieder ableitet.

In der vorliegenden Arbeit wird nun vor Allem der Beweis erbracht, dass die drei Systeme von linearen Gleichungen, [5] zu denen man bei der Ableitung des allgemeinen Integrals nach der hier befolgten Methode gelangt, stets endliche Wurzeln besitzen. Dieser Beweis scheint durch die Arbeit Mansion's nicht über-

---

[1] Crelle's Journal, Band XXIV.

[2] Eine ziemlich vollständige Übersicht der einschlägigen Arbeiten hat Mansion in den Bull. de l'Acad. royale de Belg., 2ème série, T. 44 geliefert.

[3] Serret, Cours de calcul integral, num. 666, pag. 431—433.

[4] „Note sur une équation etc." am sub [2] angeführten Orte.

[5] Für den Fall dreier gleicher Wurzeln der cubischen Gleichung (5) sind es die Systeme (10), (11), (12) dieser Arbeit.

flüssig geworden zu sein und dies besonders aus dem Grunde, weil man es in den betrachteten Ausnahmsfällen mit Systemen von nichthomogenen linearen Gleichungen mit verschwindender Nennerdeterminante zu thun hat, also mit Gleichungen, welche in der Regel keine endlichen Wurzeln besitzen. Nun werden aber offenbar alle Untersuchungen über die Form des Integrals illusorisch, sobald sich nicht darthun lässt, dass den darin enthaltenen Constanten bestimmte und endliche Werthe zukommen.

Bei dieser Gelegenheit wird auch der folgende, wie es scheint, neue Determinantensatz abgeleitet:

Ist eine Determinante, sowie auch die Summe der Adjuncten zu den Diagonalelementen gleich Null, so gilt dasselbe von jeder Determinante, die man aus der vorgelegten dadurch ableitet, dass man die Elemente irgend einer Zeile (Colonne) durch die Adjuncten zu den Elementen irgend einer Colonne (Zeile) ersetzt.

Ausserdem wird hier die Frage vollständig beantwortet, wann das Integral der Jacobi'schen Differentialgleichung algebraisch und wann es transcendent ist. Es zeigt sich, dass das Letztere nur eintritt, wenn die Gleichung (5) zwei gleiche, oder zwei (conjugirte) complexe Wurzeln besitzt, deren reeller Bestandtheil von der dritten (reellen) Wurzel verschieden ist.

Von den vielen Integrationsmethoden, welche auf die Jacobische Differentialgleichung bereits angewendet worden sind, soll jene von Allégret [1] als die in mancher Beziehung und speciell auch für die nachfolgenden Untersuchungen zweckmässigste gewählt werden. Zugleich sei noch bemerkt, dass dieselbe Methode auch schon in zwei anderen Arbeiten des Verfassers, [2] welche gewisse Verallgemeinerungen der Jacobi'schen Differentialgleichung zum Gegenstande hatten, mit einigen Modificationen benützt worden ist.

---

[1] Comptes rendus, T. 83, pag. 1171.

[2] Sitzungsberichte, Band LXXVI und LXXVIII.

I.

Die hier behandelte Jacobi'sche Differentialgleichung lässt sich auf die Form

$$\frac{dx}{a_1x+b_1y+c_1-x(a_3x+b_3y+c_3)} = \frac{dy}{a_2x+b_2y+c_2-y(a_3x+b_3y+c_3)} \quad (1)$$

bringen[1] und wenn der gemeinsame Werth der beiden Quotienten in (1) mit ds bezeichnet wird, durch die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{ds} = a_1x+b_1y+c_1-x(a_3x+b_3y+c_3)$$

$$\frac{dy}{ds} = a_2x+b_2y+c_2-y(a_3x+b_3y+c_3)$$

ersetzen. Durch die Substitutionen

$$x = \frac{u}{w}, \quad y = \frac{v}{w},$$

sowie durch die Annahme

$$\frac{dw}{ds} = a_3u+b_3v+c_3w$$

erhält man daraus

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= a_1u+b_1v+c_1w \\ \frac{dv}{ds} &= a_2u+b_2v+c_2w \\ \frac{dw}{ds} &= a_3u+b_3v+c_3w. \end{aligned} \quad (2)$$

Werden nun die constanten Grössen α, β, γ, λ durch die Gleichungen

[1] Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c_3 = 0$ setzen kann.

$$\begin{aligned} a_1\alpha+a_2\beta+a_3\gamma &= \lambda\alpha \\ b_1\alpha+b_2\beta+b_3\gamma &= \lambda\beta \\ c_1\alpha+c_2\beta+c_3\gamma &= \lambda\gamma \end{aligned} \tag{3}$$

bestimmt, hierauf die Gleichungen (2) der Reihe nach mit α, β, γ multiplicirt und summirt, so folgt eine unmittelbar integrable Differentialgleichung, deren Integral durch

$$\log(\alpha u+\beta v+\gamma w)-\lambda s = C,$$

oder, da $u = wx$, $v = wy$ ist, durch

$$\log(\alpha x+\beta y+\gamma)-\lambda s+\log w = C \tag{4}$$

gegeben ist.

Damit nun die Gleichungen (3) auch für von der Null verschiedene Werthe von α, β, γ mit einander bestehen können, muss λ offenbar der Bedingung

$$R \equiv \begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2-\lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

genügen, also durch eine der drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 der cubischen Gleichung (5) ersetzt werden. Die λ_i $(i = 1, 2, 3)$ entsprechenden Grössen α, β, γ sind aus (3) zu berechnen und sollen mit α_i, β_i, γ_i bezeichnet werden.

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 &= \xi_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 &= \xi_2 \\ \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 &= \xi_3, \end{aligned}$$

so erhalten wir für die drei, vorläufig als reell und von einander verschieden vorausgesetzten Werthe von λ aus der Gleichung (4)

$$\begin{aligned} \log\xi_1-\lambda_1 s+\log w &= C_1 \\ \log\xi_2-\lambda_2 s+\log w &= C_2 \\ \log\xi_3-\lambda_3 s+\log w &= C_3 \end{aligned} \tag{6}$$

und daraus durch Elimination der Hilfsvariablen s und w das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1)

$$\xi_1^{\lambda_2-\lambda_3} \cdot \xi_2^{\lambda_3-\lambda_1} \cdot \xi_3^{\lambda_1-\lambda_2} = \text{Const.} \tag{7}$$

Beispiel:

$$\frac{dx}{4x+y+16-x(2x-y)}=\frac{dy}{x+6y+38-y(2x-y)}.$$

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=4,\quad \lambda_3=5.$$

$$\alpha_1:\beta_1:\gamma_1=11:-5:-14$$
$$\alpha_2:\beta_2:\gamma_2=\ 5:-2:\ \ 1$$
$$\alpha_3:\beta_3:\gamma_3=\ 3:-1:\ \ 2$$

$$\frac{(5x-2y+1)^4}{(3x-y+2)^3.(11x-5y-14)}=\text{Const.}$$

Es seien nun zwei Wurzeln der Gleichung (5) conjugirt complex, also etwa $\lambda_1=p+qi$, $\lambda_2=p-qi$.

Wir denken uns die Grössen α, β, γ als Functionen von λ aus den Gleichungen (3) berechnet und die erhaltenen Werthe in ξ_1 und ξ_2 eingesetzt. Die Substitutionsresultate können sich nur durch das Vorzeichen der imaginären Einheit unterscheiden. Ist also

$$\xi_1=\eta+\zeta i=re^{\omega i},$$

worin

$$r^2=\eta^2+\zeta^2,\quad \omega=\text{arc tang}\frac{\zeta}{\eta}$$

bedeuten, so ist auch

$$\xi_2=\eta-\zeta i=re^{-\omega i}.$$

Die Gleichung (7) lässt sich dann auf die Form

$$r^{-2qi}.e^{2\omega i(p-\lambda_3)}.\xi_3^{2qi}=\text{Const.},$$

oder endlich

$$\frac{\xi_3^2}{\eta^2+\zeta^2}.e^{\frac{2(p-\lambda_3)}{q}\text{Arc tang}\frac{\zeta}{\eta}}=\text{Const.} \qquad (8)$$

bringen. Dies ist also das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) für den Fall, dass die Gleichung (5) ein complexes Wurzelpaar besitzt. Dasselbe ist transcendent, sobald nur $p\gtrless\lambda_3$ ist.

Beispiel:

$$\frac{dx}{-2x+2y+3-x(x+y)}+\frac{dy}{2x+5y+6+y(x+y)}=0$$

$$\lambda_1=-2+i,\ \lambda_2=-2-i,\ \lambda_3=-3,$$

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = (1-i) : (1-2i) : (3-3i)$$
$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = (1+i) : (1+2i) : (3+3i)$$
$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = 0 : 1 : 2$$
$$\eta = x+y+3, \quad \zeta = -(x+2y+3), \quad \xi_3 = y+2.$$
$$\frac{(y+2)^2}{(x+y+3)^2+(x+2y+3)^2} \cdot e^{-2 \operatorname{Arc\,tang} \frac{x+2y+3}{x+y+3}} = \text{Const.}$$

Für $p = \lambda_3$ geht die Gleichung (8) über in

$$\frac{\xi_3^2}{\eta^2+\zeta^2} = \text{Const.}$$

Dies ist unter der Voraussetzung, dass zwei Wurzeln conjungirt complex und die reellen Theile aller drei Wurzeln gleich sind, das allgemeine Integral u. zw. wieder algebraisch.

Beispiel:

$$\frac{dx}{-2x+y-3-xy} + \frac{dy}{+x+y+4+y^2} = 0.$$
$$\lambda_1 = -1+2i, \quad \lambda_2 = -1-2i, \quad \lambda_3 = -1$$
$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \quad i : (2-i) : (2+3i)$$
$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = -i : (2+i) : (2-3i)$$
$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = 1 : -1 : -1$$
$$\eta = 2y+2, \quad \zeta = x-y+3, \quad \xi_3 = x-y-1.$$
$$\frac{(x-y-1)^2}{(2y+2)^2+(x-y+3)^2} = \text{Const.}$$

Betrachten wir nun den Fall, dass zwei Wurzeln der Gleichung (5) einander gleich sind, also etwa $\lambda_3 = \lambda_2$. Wir wollen zur Abkürzung $\log \xi - \lambda s + \log w = f(\lambda)$ und zugleich, wie es in solchen Fällen nothwendig ist, $\lambda_3 = \lambda_2 + \varepsilon$ setzen, wo ε eine sehr kleine und schliesslich verschwindende constante Grösse bedeutet.

Man erhält dann aus der dritten Gleichung des Systems (6)

$$C_3 = f(\lambda_2+\varepsilon) = f(\lambda_2) + \varepsilon f'(\lambda_2),$$

also

$$f'(\lambda_2) = \frac{C_3 - C_2}{\varepsilon} = C'.$$

Nun ist

$$f'(\lambda_2) = \frac{\xi_2'}{\xi_2} - s,$$

ferner

$$\xi_2' = \alpha_2' x + \beta_2' y + \gamma_2',$$

worin α_2', β_2', γ_2' die Werthe bedeuten, welche die Differentialquotienten α', β', γ', (α, β, γ als Functionen von λ betrachtet) für $\lambda = \lambda_2$ annehmen.

Um also das allgemeine Integral von (1) zu finden, ersetzt man die dritte Gleichung des Systems (6) durch

$$\frac{\xi_2'}{\xi_2} - s = C'$$

und eliminirt wieder s und w. Man findet

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{\xi_2'}{\xi_2}} = \text{Const.}$$

und überzeugt sich leicht, dass diese transcendente Form des Integrals unter allen Umständen verbleibt, da $\lambda_2 \gtrless \lambda_1$ ist. Die Annahmen $\xi_1 : \xi_2 = \text{Const.}$ oder $\xi_2' : \xi_2 = \text{Const.}$ führen auf Widersprüche, erstere auf die Gleichung $\lambda_1 = \lambda_2$, letztere auf die Relationen $\xi_2 = 0$, $\xi_2' = 0$.

Um die Grössen α_2', β_2', γ_2' zu berechnen, differentiiren wir die Gleichungen (3) nach λ und ersetzen hierauf λ, α, β, γ, α', β', γ' der Reihe nach durch λ_2, α_2, β_2, γ_2, α_2', β_2', γ_2'. Wir finden

$$\begin{aligned} (a_1 - \lambda_2)\alpha_2' + a_2\beta_2' + a_3\gamma_2' &= \alpha_2 \\ b_1\alpha_2' + (b_2 - \lambda_2)\beta_2' + b_3\gamma_2' &= \beta_2 \\ c_1\alpha_2' + c_2\beta_2' + (c_3 - \lambda_2)\gamma_2' &= \gamma_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Dieses System ist nicht homogen und seine Nennerdeterminante ist gleich Null, da λ_2 eine Wurzel der Gleichung (5) ist. Es scheint somit, dass sich im Allgemeinen nur unendliche Werthe für α_2', β_2', γ_2' ergeben, woraus wieder geschlossen werden müsste, dass die gefundene Form des Integrals nicht richtig ist. Es lässt sich jedoch beweisen, dass eine von den Grössen α_2', β_2', γ_2' willkürlich ist, während die beiden anderen sich aus zwei Gleichungen des Systems (9) berechnen lassen, da nämlich die dritte Gleichung eine Folge der zwei ersten ist. Da nun dieser Fall auch später wieder zur Sprache kommt, wenn man alle drei

Wurzeln der Gleichung (5) als gleich annimmt, so wollen wir den Beweis für die Endlichkeit der Wurzeln des Systems (9) für beide Fälle gleichzeitig nachtragen.

Beispiel:

$$\frac{dx}{3x-y-6-x(x-y)} = \frac{dy}{3x-2y-3-y(x-y)}.$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = 0 : 1 : -3$$

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = 1 : -2 : 3.$$

Wählt man $\gamma_2' = 1$, so ist $\alpha_2' = -1$, $\beta_2' = 1$. Das allgemeine Integral ist daher

$$\frac{y-3}{x-2y+3} \cdot e^{\frac{x-y-1}{x-2y+3}} = \text{Const.}$$

Sind alle drei Wurzeln der Gleichung (5) einander gleich u. zw. $= \lambda$, so kann man, um von den eben erhaltenen Resultaten auszugehen, vorerst $\lambda_1 = \lambda$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda + \varepsilon$ setzen. Die zweite Gleichung des Systems (6) transformirt sich, wie folgt

$$C_2 = f(\lambda+\varepsilon) = f(\lambda) + \varepsilon f'(\lambda),$$

$$f'(\lambda) = \frac{C_2 - C_1}{\varepsilon} = C_1'$$

und aus der bei der Besprechung zweier gleicher Wurzeln abgeleiteten Gleichung $C' = f'(\lambda_2)$ erhält man in ähnlicher Weise

$$C' = f'(\lambda+\varepsilon) = f'(\lambda) + \varepsilon f''(\lambda),$$

$$f''(\lambda) = \frac{C' - C_1'}{\varepsilon} = C.$$

Nun ist

$$f''(\lambda) = \frac{d^2 \log \xi}{d\lambda^2} = \frac{\xi''}{\xi} - \frac{\xi'^2}{\xi^2}.$$

In diesem Ausdrucke ist keine der beiden Hilfsvariablen s und w mehr enthalten. Es ist somit eine weitere Elimination nicht mehr erforderlich und stellt daher die algebraische Gleichung

$$\frac{\xi''}{\xi} - \frac{\xi'^2}{\xi^2} = C$$

das allgemeine Integral der Gleichung (1) für den Fall dreier gleicher Wurzeln vor.

Hierin ist

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha x+\beta y+\gamma,\\ \xi' &= \alpha' x+\beta' y+\gamma',\\ \xi'' &= \alpha'' x+\beta'' y+\gamma''.\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\frac{dx}{5y-39-x(x+y)} = \frac{dy}{x-3y+31-y(x+y)}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Integral:

$$\frac{2}{3x+4y-7} - \left(\frac{x+y+1}{3x+4y+7}\right)^2 = C.$$

II.

Nun wenden wir uns zu dem Nachweise, dass die in den abgeleiteten Integralen auftretenden Constanten stets in endlicher Form berechenbar sind. Es genügt den Fall dreier gleicher Wurzeln ins Auge zu fassen, da alle übrigen Fälle damit zugleich erledigt werden.

Die am Schlusse des vorigen Artikels abgeleiteten Constanten α, β, γ, α', β' ... erhält man aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(a_1-\lambda)\alpha+a_2\beta+a_3\gamma &= 0\\ b_1\alpha+(b_2-\lambda)\beta+b_3\gamma &= 0\\ c_1\alpha+c_2\beta+(c_3-\lambda)\gamma &= 0\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-\lambda)\alpha'+a_2\beta'+a_3\gamma' &= \alpha\\ b_1\alpha'+(b_2-\lambda)\beta'+b_3\gamma' &= \beta\\ c_1\alpha'+c_2\beta'+(c_3-\lambda)\gamma' &= \gamma\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-\lambda)\alpha''+a_2\beta''+a_3\gamma'' &= 2\alpha'\\ b_1\alpha''+(b_2-\lambda)\beta''+b_3\gamma'' &= 2\beta'\\ c_1\alpha''+c_2\beta''+(c_3-\lambda)\gamma'' &= 2\gamma'\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Das System (10) wird durch endliche, nicht zugleich verschwindende Werthe von α, β, γ befriedigt, da λ eine Wurzel der

Gleichung (5) ist. Bezeichnen wir die Adjuncten zu den Elementen von R mit A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3, so findet man

$$\alpha : \beta : \gamma = A_1 : A_2 : A_3.$$

Ist $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, d. h., sind die Elemente der zweiten und dritten Reihe von R einander proportional, so setzt man

$$\alpha : \beta : \gamma = B_1 : B_2 : B_3,$$

was wegen $R = 0$ erlaubt ist.

Hat man auch $B_1 = B_2 = B_3 = 0$, d. h., sind die Elemente aller drei Reihen von R einander proportional, so ist auch $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ und die Differentialgleichung (1) lässt sich offenbar nach der in dieser Arbeit besprochenen Methode nicht mehr integriren. Wohl kann man aber beweisen, dass in diesem Falle die beiden Nenner in (1) einen linearen Factor gemeinsam haben, nach dessen Entfernung die Differentialgleichung eine unmittelbar integrable Form annimmt.

Setzen wir also, wie es unserer Voraussetzung entspricht, vorerst die Elemente der ersten zwei Reihen von R einander proportional, also

$$\frac{a_1 - \lambda}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_2}{b_2 - \lambda} = \frac{a_3}{b_3},$$

so erhalten wir daraus

$$\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_2} = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_2} = -\lambda,$$

oder, wenn die Adjuncten zu den Elementen von

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

mit $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$; $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$; $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ bezeichnet werden,

$$\frac{\mathfrak{C}_2}{b_2} = \frac{\mathfrak{C}_1}{a_2} = -\lambda.$$

Durch eine analoge Behandlung der ersten und dritten, respective zweiten und dritten Reihe von R erhalten wir ähnliche

Beziehungen und finden somit im Ganzen

$$\frac{\mathfrak{A}_2}{b_1} = \frac{\mathfrak{A}_3}{c_1} = \frac{\mathfrak{B}_1}{a_2} = \frac{\mathfrak{B}_3}{c_2} = \frac{\mathfrak{C}_1}{a_3} = \frac{\mathfrak{C}_2}{b_3} = -\lambda. \tag{13}$$

Soll nun der erste Nenner der Differentialgleichung (1)

$$a_1x+b_1y+c_1-x(a_3x+b_3y+c_3)$$

in lineare Factoren zerlegt werden, so darf einer derselben kein y enthalten. Somit ist das Product

$$(x+h)\,(lx+my+n)$$

die gesuchte Form jenes Nenners. Man findet durch Gleichsetzung der Coëfficienten die Bedingungen:

$$l = -a_3,\ m = -b_3,\ hm = b_1,\ hn = c_1,\ n+hl = a_1-c_3.$$

Die ersten vier Gleichungen liefern die Werthe von h, l, m, n. Werden dieselben in die fünfte Gleichung eingesetzt, so ergibt sich die Bedingung für die Zerlegbarkeit des Nenners. Das Resultat lautet: Es ist

$$a_1x+b_1y+c_1-x(a_3x+b_3y+c_3) = (x-\frac{b_1}{b_3})\cdot(-a_3x-b_3y-\frac{b_3c_1}{b_1}),$$

wenn die Bedingung

$$\frac{\mathfrak{A}_2}{b_1} = \frac{\mathfrak{C}_2}{b_3} \tag{14}$$

erfüllt ist. Ebenso findet man

$$a_2x+b_2y+c_2-y(a_3x+b_3y+c_3) = (y-\frac{a_2}{a_3})(-a_3x-b_3y-\frac{a_3c_2}{a_2}),$$

sobald

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{a_2} = \frac{\mathfrak{C}_1}{a_3}. \tag{15}$$

Damit nun die zweiten Factoren einander gleich werden, muss auch noch

$$\frac{b_3c_1}{b_1} = \frac{a_3c_2}{a_2},$$

oder

$$\frac{b_3c_1}{b_1} - c_3 = \frac{a_3c_2}{a_2} - c_3,$$

daher

$$\frac{\mathfrak{A}_2}{b_1} = \frac{\mathfrak{B}_1}{a_2} \tag{16}$$

angenommen werden.

Da die Bedingungen (14), (15), (16) in den Bedingungen (13) enthalten sind, so kann man also jedesmal, sobald die Elemente der drei Zeilen von R einander proportional sind, aus den Nennern der Differentialgleichung (1) einen linearen Factor absondern. Man hat dann die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x - \frac{b_1}{b_3}} = \frac{dy}{y - \frac{a_2}{a_3}}$$

mit dem Integral

$$\frac{a_3 y - a_2}{b_3 x - b_1} = \text{Const.}$$

Die Gleichung (5) hat für den eben in Rede stehenden Ausnahmsfall mindestens zwei gleiche Wurzeln. Hiezu ist erforderlich, dass λ auch die Gleichung

$$\frac{dR}{d\lambda} = -(A_1 + B_2 + C_3) = 0$$

befriedigt. Dies ist in der That der Fall, da wir sämmtliche Grössen A, B, C gleich der Null angenommen haben. Wenn nun trotzdem das Integral algebraisch ist, so liegt doch darin kein Widerspruch mit dem vorhin gefundenen Resultate, dass zwei gleichen Wurzeln der Gleichung (5) ein transcendentes Integral entspricht. Denn, sobald man aus den Nennern der Differentialgleichung (1) einen linearen Factor wegschaffen kann, ist dieselbe nicht mehr als ein specieller Fall der Jacobi'schen Differentialgleichung anzusehen und hat einen wesentlich verschiedenen Charakter. Es ist somit die von Catalan[1] gemachte Specialisirung $a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = a_3 = b_3 = c_3 = 1$ unpassend, da die sich ergebende Differentialgleichung

$$\frac{dx}{1-x} = \frac{dy}{1-y}$$

[1] Im Berichte über die Eingangs erwähnte Arbeit von Mansion a. a. O.

lineare und nicht, wie die Jacobi'sche, quadratische Nenner besitzt. Zu derselben Kategorie gehört die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x-2y+1-x(2x+4y)} = \frac{dy}{3x+8y-3-y(2x+4y)},$$

da sie auf die Form

$$\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})(-2x-4y+2)} = \frac{dy}{(y-\frac{3}{2})(-2x-4y+2)}$$

gebracht werden kann.

Zum Beweise, dass auch das System (11) durch endliche Werthe der Unbekannten befriedigt wird, obwohl dasselbe nicht homogen ist und doch die Nennerdeterminante gleich Null hat, benützen wir den Eingangs erwähnten und, wie ich vermuthe, neuen Determinantensatz, der sogleich bewiesen werden soll.

Ist die Determinante

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} = 0,$$

so folgt, dass die Adjuncten zweier beliebiger Zeilen oder Colonnen einander proportionirt sind.[1] Man kann diesen Satz durch das folgende System von Gleichungen ausdrücken, worin A_{ik} die Adjuncte von a_{ik} bedeutet:

$$\begin{aligned}
\frac{A_{11}}{\rho_1} = \frac{A_{12}}{\rho_2} = \ldots \quad = \frac{A_{1n}}{\rho_n} = \sigma_1 \\
\frac{A_{21}}{\rho_1} = \frac{A_{22}}{\rho_2} = \ldots \quad = \frac{A_{2n}}{\rho_n} = \sigma_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{A_{n1}}{\rho_1} = \frac{A_{n2}}{\rho_2} = \ldots \quad = \frac{A_{nn}}{\rho_n} = \sigma_n
\end{aligned}$$

Setzen wir ferner voraus, dass

$$A_{11} + A_{22} + \ldots \quad + A_{nn} = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$\rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2 + \ldots \quad + \rho_n\sigma_n = 0,$$

[1] Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten pag. 20.

so hat man auch

$$\begin{aligned}&\rho_i\sigma_k(\rho_1\sigma_1+\rho_2\sigma_2+\ldots\quad+\rho_n\sigma_n)\\&=\rho_i\sigma_1\cdot\rho_1\sigma_k+\rho_i\sigma_2\cdot\rho_2\sigma_k+\ldots\quad+\rho_i\sigma_n\cdot\rho_n\sigma_k\\&=A_{1i}A_{k1}+A_{2i}A_{k2}+\ldots\quad+A_{ni}A_{kn}=0.\end{aligned}$$

Daher ist die Determinante, welche man aus der ursprünglichen erhält, indem man die Elemente der i^{ten} Colonne (k^{ten} Zeile) durch die Adjuncten der k^{ten} Zeile (i^{ten} Colonne) ersetzt, ebenfalls gleich Null.

Eliminirt man α' und β' aus den Gleichungen (11), so folgt

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & \alpha-a_3\gamma' \\ b_1 & b_2-\lambda & \beta-b_3\gamma' \\ c_1 & c_2 & \gamma-(c_3-\lambda)\gamma' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & \alpha \\ b_1 & b_2-\lambda & \beta \\ c_1 & c_2 & \gamma \end{vmatrix} - \gamma' . R = 0.$$

Da nun λ eine Wurzel der Gleichung $R=0$ ist, so muss für die aus (10) berechneten Werthe von α, β, γ die Relation

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & \alpha \\ b_1 & b_2-\lambda & \beta \\ c_1 & c_2 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

bestehen, falls die Gleichungen (11) mit einander verträglich sein sollen. Dies ist der Fall, denn λ genügt auch der Gleichung

$$\frac{dR}{d\lambda} = -(A_1+B_2+C_3) = 0,$$

daher ist nach dem eben bewiesenen Determinantensatz

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & A_1 \\ b_1 & b_2-\lambda & A_2 \\ c_1 & c_2 & A_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & B_1 \\ b_1 & b_2-\lambda & B_2 \\ c_1 & c_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0,$$

und da endlich

$$\alpha : \beta : \gamma = A_1 : A_2 : A_3 = B_1 : B_2 : B_3 = C_1 : C_2 : C_3,$$

so ist auch die Gleichung (17) erfüllt.

Dieses Resultat gilt auch für den Fall, wenn λ blos eine zweifache Wurzel der Gleichung (5) ist, weil wir bei der Besprechung des Systems (11) nicht von der Voraussetzung Gebrauch gemacht haben, dass λ eine dreifache Wurzel jener Gleichung sei.

Damit die Gleichungen (12) für endliche Werthe der Unbekannten mit einander bestehen, muss, wie man sich leicht überzeugt, die Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & \alpha' \\ b_1 & b_2-\lambda & \beta' \\ c_1 & c_2 & \gamma' \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$

erfüllt sein.

Berechnen wir α', β' etwa aus den letzten zwei Gleichungen des Systemes (11), so erhalten wir

$$A_3\alpha' = A_1\gamma' + \begin{vmatrix} \beta & b_2-\lambda \\ \gamma & c_2 \end{vmatrix}$$

$$A_3\beta' = A_2\gamma' + \begin{vmatrix} c_1 & \beta \\ c_1 & \gamma \end{vmatrix}.$$

Durch Substitution dieser Werthe ergibt sich also [1]

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & \alpha' \\ b_1 & b_2-\lambda & \beta' \\ c_1 & c_2 & \gamma' \end{vmatrix} = A_3\alpha'+B_3\beta'+C_3\gamma' =$$

$$= \frac{\gamma'}{A_3}\cdot\{A_1A_3+A_2B_3+A_3C_3\} + \frac{1}{A_3}\left\{A_3\cdot\begin{vmatrix} \beta & b_2-\lambda \\ \gamma & c_2 \end{vmatrix} + B_3\begin{vmatrix} b_1 & \beta \\ c_1 & \gamma \end{vmatrix}\right\}. \quad 019$$

[1] Da eine von den Grössen A_1, A_2, A_3, oder B_1, B_2, B_3, von der Null verschieden sein muss, so wird offenbar die allgemeine Giltigkeit der Betrachtungen nicht eingeschränkt, wenn wir es von A_3 voraussetzen.

Die beiden Ausdrücke in den geschlungenen Klammern sind nun gleich Null, der erste nach dem oben bewiesenen Determinantensatze, der zweite aus folgenden Gründen:

Die Gleichung (17) liefert

$$A_3 : B_3 = \begin{vmatrix} b_1 & \beta \\ c_1 & \gamma \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha & a_1 - \lambda \\ \gamma & c_1 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Ferner haben wir

$$R = c_1 C_1 + c_2 C_2 + (c_3 - \lambda) C_3 = 0$$

oder wegen

$$\alpha : \beta : \gamma = C_1 : C_2 : C_3$$

$$c_1 \alpha + c_2 \beta + (c_3 - \lambda)\gamma = 0. \tag{21}$$

Da λ eine dreifache Wurzel der Gleichung $R = 0$ ist, so ist für dasselbe λ

$$\frac{d^2 R}{d\lambda^2} = (a_1 - \lambda) + (b_2 - \lambda) + (c_3 - \lambda) = 0.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich die Gleichung (21) auf die Form

$$c_1 \alpha - (a_1 - \lambda)\gamma + c_2 \beta - (b_2 - \lambda)\gamma$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & a_1 - \lambda \\ \gamma & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & b_2 - \lambda \\ \gamma & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

bringen. Dadurch verwandelt sich die Gleichung (20) in

$$A_3 : B_3 = \begin{vmatrix} b_1 & \beta \\ c_1 & \gamma \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} \beta & b_2 - \lambda \\ \gamma & c_2 \end{vmatrix}$$

oder

$$A_3 \cdot \begin{vmatrix} \beta & b_2 - \lambda \\ \gamma & c_2 \end{vmatrix} + B_3 \begin{vmatrix} b_1 & \beta \\ c_1 & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Damit ist die Richtigkeit der Gleichung (18) erwiesen.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass die hier betrachteten Ausnahmsfälle der Jacobi'schen Differentialgleichung eine interessante geometrische Deutung zulassen, auf welche ich bei Gelegenheit zurückkommen werde. Bekanntlich ist der Fall, dass

die cubische Gleichung (5) drei reelle und von einander verschiedene Wurzeln besitzt, bereits von Fouret[1] geometrisch interpretirt worden.

Auch nach einer anderen Richtung hin lassen sich die im zweiten Abschnitte dieser Arbeit angestellten Betrachtungen erweitern. Nach der Methode von Allégret wird nämlich die Jacobi'sche Differentialgleichung auf die drei linearen Differentialgleichungen (2) mit constanten Coëfficienten zurückgeführt, denen die cubische Gleichung (5) entspricht. Man kann nun sogleich von n solchen Differentialgleichungen ausgehen und die übrigens bereits bekannten Formen der Integrale dadurch verificiren, dass man zeigt, wann und in welcher Weise sich die in den Integralen auftretenden Constanten in endlichen Werthen berechnen lassen, wenn die entsprechende Gleichung n^{ten} Grades in λ zwei oder mehrere gleiche Wurzeln besitzt u. s. f.

---

[1] Comptes rendus, T. 78, pag. 1837—40.

Über die Bahn des Planeten Ino (173).

Von Dr **Gottlieb Becka,**
Assistent der k. k. Sternwarte zu Prag.

Von den Herren Dr. Abetti in Padua, Dr. Kobold in Ó Gyalla und Dr. Peter in Leipzig wurden mir einige Beobachtungen der letzten Opposition vom Jahre 1881 bereitwilligst zugeschickt, die ich hier zur definitiven Verbesserung der von mir im LXXXIII. Bande der Sitzb. der kais. Akademie der Wissensch. II. Abth., April-Heft, Jahrg. 1881 abgeleiteten Elemente verwenden will.

Die dorthin abgeleiteten Elemente sind:

Berührende Ellipse für 1877 Juli 15·5 mittl. Zt. Berlin.

$M = 329°\ 32'\ 23''25$ August 6·5 1877 m. Z. B.
$\pi = 13\ 25\ 40·48$
$\Omega = 148\ 33\ 43·82$ mittl. Äq. 1877·0
$i = 14\ 14\ 40·07$
$\varphi = 11\ 48\ 1·47$
$\mu = 780·6194.$

Da die erwähnten Beobachtungen bereits auch in den Astronomischen Nachrichten publicirt worden sind, so führe ich nur die nachstehenden Vergleichungen derselben mit der Oppositions-Ephemeride vom Jahre 1881 an:

	Datum		$d\alpha$ (B—R)	$d\delta$ (B—R)	Beobachtungsort
Nr.	1. 1881 Mai	19·48	+ 4'36	— 1'34	Padua
„	2. „	20·49	+15·01	— 5 84	„
„	3. „	20·49	+10·55	+10·03	Ó Gyalla
„	4. „	21·44	+ 7·44	+ 5·51	„
„	5. „	21·51	+15·31	— 4·34	Padua
„	6. „	26·44	+ 8·19	— 6·87	Ó Gyalla

	Datum		$d\alpha$ (B—R)	$d\delta$ (B—R)	Beobachtungsort
Nr.	7. 1881 Juni	1·57	+16·26	+ 2·54	Ó Gyalla
„	8. „	2·49	+14·11	— 5·54	Padua
„	9. „	3·54	+11·71	— 4·34	„
„	10. „	3·53	+ 5·98	— 5·44	Leipzig
„	11. „	4·51	+ 9·16	— 7·44	Padua
„	12. „	18·43	+10·98	— 4·84	Ó Gyalla
„	13. „	21·47	+22·08	— 6·63	„
„	14. „	21·54	+ 7·51	— 8·64	Padua
„	15. „	22·40	+ 9·64	— 9·51	Ó Gyalla
„	16. „	22·48	+12·46	— 8·44	Padua.

Aus den vorstehenden Unterschieden habe ich den folgenden, mit der Ziffer XI zu bezeichnenden Normalort gebildet:

		$d\lambda \cos\beta$ (B—R)	$d\beta$ (B—R)
XI.	1881 Juni 5·5	+10'68	—3'73

welchem folgende Differentialgleichungen entsprechen:

$$0{\cdot}14661\, dl_0 + 8{\cdot}97146\, d\pi + {}_n8{\cdot}42602\, d\Omega + 9{\cdot}23267\, di + 0{\cdot}29736\,(d\mu) + {}_n0{\cdot}44843\, d\varphi + {}_n1{\cdot}02857 = 0$$

$${}_n9{\cdot}18344\, dl_0 + {}_n8{\cdot}69793\, d\pi + 9{\cdot}20189\, d\Omega + 0{\cdot}13098\, di + {}_n9{\cdot}26014\,(d\mu) + 9{\cdot}49984\, d\varphi + 0{\cdot}57171 = 0.$$

Knüpft man diese Gleichungen an diejenigen an, die ich in meinen früheren Arbeiten über den obigen Planeten (Sitzb. der kais. Akad. Bd. LXXXI und LXXXIII) entwickelt habe, und löst man das ganze System mittelst der Methode der kleinsten Quadrate auf, so ergeben sich sechs Gleichungen:

$$+37{\cdot}90578\, dl_0 - 8{\cdot}96106\, d\pi - 1{\cdot}00036\, d\Omega + 0{\cdot}17053\, di + 6{\cdot}36416\,(d\mu) - 28{\cdot}98835\, d\varphi - 17{\cdot}73810 = 0$$

$$-8{\cdot}96106\, dl_0 + 3{\cdot}53619\, d\pi + 0{\cdot}24296\, d\Omega - 0{\cdot}21618\, di + 0{\cdot}75628\,(d\mu) + 8{\cdot}99747\, d\varphi - 2{\cdot}09040 = 0$$

$$-1{\cdot}00036\, dl_0 + 0{\cdot}24296\, d\pi - 1{\cdot}10912\, d\Omega - 0{\cdot}59457\, di - 0{\cdot}21916\,(d\mu) + 0{\cdot}47849\, d\varphi - 0{\cdot}15659 = 0$$

$$+0{\cdot}17053\, dl_0 - 0{\cdot}21618\, d\pi - 0{\cdot}59457\, d\Omega + 4{\cdot}84095\, di + 0{\cdot}09279\,(d\mu) + 0{\cdot}17157\, d\varphi + 9{\cdot}18745 = 0$$

$$+6\cdot36416\,dl_0+0\cdot75628\,d\pi-0\cdot21916\,d\Omega+0\cdot09279\,di$$
$$+6\cdot11570(d\mu)-4\cdot17374\,d\varphi-23\cdot61270=0$$
$$-28\cdot98835\,dl_0+8\cdot99747\,d\pi+0\cdot47849\,d\Omega+0\cdot17157\,di$$
$$-4\cdot17374(d\mu)+43\cdot20936\,d\varphi+30\cdot78513=0,$$

welche folgende Correctionen liefern:

$$dl_0=-2'65$$
$$d\pi=-7\cdot00$$
$$d\Omega=-0\cdot37$$
$$di=-2\cdot29$$
$$d\varphi=-0\cdot32$$
$$d\mu=+0\cdot0073.$$

Die in den elf Normalörtern übrigbleibenden Fehler stellen sich folgendermassen dar:

			Beob.—Rech.	
			$d\lambda\cos\beta$	$d\beta$
I.	1877 August	6·5	+1'91	—0'41
II.	„	16·5	+1·38	+0·70
III.	September	7·0	—1·88	—1·63
IV.	October	7·0	—1·39	+0·18
V.	„	26·5	+1·58	—0·73
VI.	November	6·5	—1·41	+0·78
VII.	December	7·5	+0·33	+1·91
VIII.	1879 Januar	25·0	—0·13	+1·41
IX.	1880 März	12·5	—1·87	—
X.	Mai	1·0	+3·94	+0·08
XI.	1881 Juni	5·5	+0·29	+0·10.

Bei den sehr kleinen Werthen, welche die Correctionen angenommen haben, wird es kaum nothwendig sein, die übrigens nur mässigen Störungen in den Jahren 1877—1881 vom Neuen an zu rechnen, und ich kann dessbalb aus den in der anfangs erwähnten Abhandlung angeführten Störungen neue Ellipse ableiten, deren Berührung[1] in das Jahr 1881 fällt. Für den Tag

[1] In Betreff dieses Ausdruckes, welcher anstatt des üblichen „Osculation" allgemein eingeführt werden sollte, siehe: Director Hornstein: „Beitrag zur Kenntniss des Asteroidensystemes"; Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. II. Abth., Juni-Heft, Jahrg. 1881.

dieser Berührung habe ich den 3·5 August 1881 gewählt. Die für diesen Tag geltenden speciellen Störungen

$$\delta v = -774'05, \quad \delta\varrho = +44133, \quad z = -1730,$$

wurden nun mittelst der zugehörigen Differentialquotienten

$$(\delta\varrho)' = -1182, \; z' = -269$$

und des Integrals

$$\int (U_{♃} + U_{♄})\, dt = -1674$$

in folgende Elementenstörungen verwandelt:

$$\begin{aligned}
\Delta M &= -26'\ 50'89 \text{ August } 3{\cdot}5 \text{ 1881 m. B. Z.}\\
\Delta\pi &= +17\ \ 37{\cdot}65\\
\Delta\Omega &= -\ 1\ \ 24{\cdot}83\\
\Delta i &= \quad -\ 0{\cdot}88\\
\Delta\varphi &= +\ 1\ \ 47{\cdot}48\\
\Delta\mu &= \quad +\ 0{\cdot}0961.
\end{aligned}$$

Fügt man zu diesen Variationen nebst den oben berechneten Correctionen noch die Änderungen

$$\begin{aligned}
\delta\Omega &= +2'\ 28'36\\
\delta\pi &= +2\ \ 30{\cdot}79\\
\delta i &= \quad -\ 1{\cdot}30
\end{aligned}$$

um die Elemente auf das mittlere Äquinoctium 1880·0 zu beziehen, und bringt man sie an die obigen Elemente an, so ergeben sich nachstehende

definitive Elemente:

Berührende Ellipse und Epoche für den 3·5 August 1881 mittl. Berl. Zeit.

$$\begin{aligned}
M &= 285^\circ\ 14'\ 50'49\\
\pi &= \ \ 13\ \ 45\ \ 41{\cdot}92\\
\Omega &= 148\ \ 34\ \ 46{\cdot}99\\
i &= \ \ 14\ \ 14\ \ 35{\cdot}60\\
\varphi &= \ \ 11\ \ 49\ \ 48{\cdot}63\\
\mu &= 780'7228
\end{aligned}$$

Mittl. Äq. 1880·0.

Mittelst dieser Elemente, deren Richtigkeit durch die directe Vergleichung der für August 3·5 1881 geltenden Position

geprüft wurde, habe ich die Oppositions-Ephemeride für das Jahr 1882 mit Rücksicht auf die Störungen von Jupiter und Saturn berechnet.

Störungen.

12^h mittl. Berl. Z.	δv	$\delta \rho$	z
1881 14. Juli	— 0'08	+ 4	— 3
23. August	— 0·10	+ 3	— 3
2. October	— 0·88	+ 6	— 28
11. November	— 2·42	— 36	— 76
21. December	— 4·55	— 176	—143
1882 30. Januar	— 6·73	— 469	—224
11. März	— 8·08	— 955	—310
20. April	— 7·38	—1654	—393
30. Mai	— 3·18	—2545	—460
9. Juli	+ 5·75	—3562	—497
18. August	+19·93	—4592	—490
27. September	+39·25	—5491	—422
6. November	+62·12	—6097	—275
16. December	+86·76	—6259	— 30

Oppositions-Ephemeride für das Jahr 1882.

12^h mittl. B. Z.	A. R. app.	Decl. app.	Log Δ	Log r
1882 Oct. 20	$4^h\,10^m\,53'76$	$-2°\,18'\,21'98$	0·13958	0·35026
21	10 30·24	26 42·75		
22	10 5·02	34 56·91		
23	9 38·11	43 4·06		
24	9 9·54	51 3·81	0·13459	0·35118
25	8 39·36	-2 58 55·27		
26	8 7·60	-3 6 38·83		
27	7 34·30	14 13·81		
28	6 59·50	21 39·73	0·13057	0·35213
29	6 23·25	28 55·82		
30	5 45·58	36 1·34		
31	5 6·56	42 55·70		
Nov. 1	4 26·20	49 38·39	0·12759	0·35310
2	3 44·63	-3 56 8·79		
3	3 1·83	-4 2 26·63		
4	2 17·91	8 31·31		
5	1 32·92	14 22·37	0·12573	0·35410

12h mittl. B. Z.		A. R. app.	Decl. app.	Log. Δ	Log. r
1882 Nov.	6	4h 0m46s·93	−4°19′59″·24		
	7	4 0 0·00	25 21·50		
	8	3 59 12·21	30 28·61		
	9	58 23·63	35 20·20	0·12505	0·35513
	10	57 34·35	39 55·88		
	11	56 44·44	44 15·17		
	12	55 53·96	48 17·56		
	13	55 3·03	52 3·17	0·12560	0·35619
	14	54 11·67	55 31·09		
	15	53 20·03	−4 58 41·65		
	16	52 28·18	−5 1 34 39		
	17	51 36·20	4 9·14	0·12739	0·35727
	18	50 44·15	6 25·88		
	19	49 52·10	8 23·84		
	20	49 0·13	10 3·17		
☍	21	48 8·34	11 23·42	0·13040	0·35837
	22	47 16·75	12 24·36		
	23	46 25·48	13 7·17		
	24	45 34·59	13 31·67		
	25	44 44·19	13 37·70	0·13460	0·35950
	26	43 54·30	13 25·45		
	27	43 5·00	12 54·29		
	28	42 16·35	12 4·34		
	29	41 28·43	10 55·70	0·13993	0·36065
	30	40 41·28	9 28·52		
Dec.	1	39 55·00	7 42·98		
	2	39 9·62	5 39·23		
	3	38 25·22	3 17·48	0·14633	0·36183
	4	37 41·84	−5 0 37·92		
	5	36 59·57	−4 57 40·72		
	6	36 18·43	54 26·13		
	7	35 38·50	50 54·40	0·15372	0·36302
	8	34 59·82	47 6·43		
	9	34 22·43	43 0·68		
	10	33 46·38	38 39·24		
	11	33 11·71	34 1·80	0·16201	0·36423
	12	32 38·47	29 8·78		
	13	32 6·68	24 0·50		
	14	3 31 36·40	18 37·31		

Strahlende Elektrodenmaterie.

Von Dr. **Johann Puluj,**

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Mit 8 Holzschnitten.)

IV. Abhandlung.

(Vorgelegt in der Sitzung am 30. März 1882.)

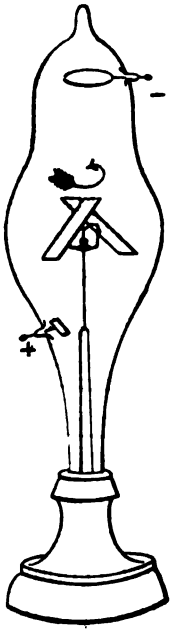
In der vorliegenden Mittheilung werden einige Apparate beschrieben, welche in der internationalen elektrischen Ausstellung in Paris 1881 ausgestellt waren und in die Sammlung der wissenschaftlichen Apparate des Conservatoir National des Arts et Métiers aufgenommen worden sind.

1. Elektrisches Radiometer mit phosphorescirenden Flügeln.

Das Flugrädchen des in der Fig. 1 dargestellten elektrischen Radiometers besteht aus zwei schräg gestellten Glimmerblättchen, welche an einer Seite mit phosphorescirenden Substanzen überzogen und mittels eines Glashütchens auf einer Nadelspitze beweglich angebracht sind. Eine eigene Arretirvorrichtung von Kupferdraht verhindert beim Umkehren des Apparates das Herabfallen des Flugrädchens.

Als phosphorescirende Substanzen werden gewöhnliche Kreide und einige Schwefelverbindungen verwendet, von welchen letzteren namentlich das grünlich phosphorescirende Schwefelcalcium durch die grosse Intensität des Leuchtens sich auszeichnet.

Fig. 1.



Ein oberhalb des Flugrädchens angebrachtes ebenes Aluminiumscheibchen dient als negative Elektrode und ist an der vom Rädchen abgewendeten Seite mit Glimmer belegt. Beim Durchgang des elektrischen Stromes geht von der negativen Elektrode nach unten ein konisches Strahlenbündel aus, erzeugt eine lebhafte Phosphorescenz der Flügel und setzt sie in rotirende Bewegung, welche im Sinne der Emission der Elektrodentheilchen von der Kathode erfolgt.

2. Elektrisches Radiometer mit phosphorescirender Scheibe.

Eine auf der Nadelspitze drehbare horizontale Glimmerscheibe ist in Sectoren getheilt und mit verschiedenen phosphorescirenden Substanzen angestrichen. Als negative Elektrode dient ein in vier Quadranten durchschnittenes Aluminiumscheibchen. Die einzelnen Quadranten sind gegen die unterhalb liegende Glimmerscheibe schräg gestellt und bilden die Form einer Schraube, die nach aufwärts gekehrte Seite der Elektrode ist mit Glimmer belegt, damit die Entladungen nur nach unten erfolgen können.

Fig. 2.

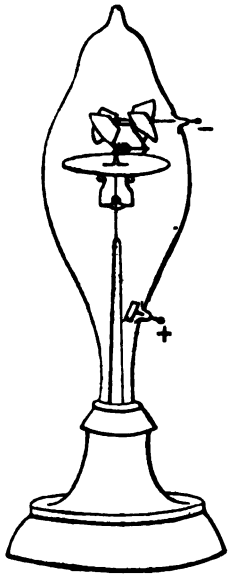
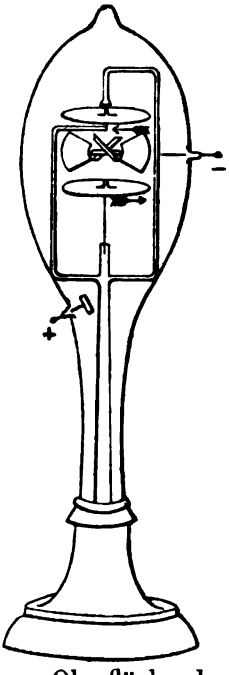


Fig. 3.



Bei einem Drucke, der grösser ist als 0·02 Mm., dreht sich die Glimmerscheibe in einer Richtung, welche einer Emission von Elektrodentheilchen senkrecht zur Oberfläche der Kathode entspricht und die wir eine normale nennen wollen. Bei grösserer Verdünnung erfolgt eine Rotation der Scheibe in entgegengesetzter anormaler Richtung und erklärt sich damit, dass die

Entladungen hauptsächlich an den Rändern der Elektrode erfolgen. Bei diesem Radiometer wurde eine äusserst rasche Rotation der Scheibe auch dann beobachtet, wenn die Drähte zur Erde abgeleitet waren und das Radiometer blos in der Nähe des Ruhmkorff'schen Apparates stand, ohne mit den Polen in Verbindung zu sein. Die Rotation erfolgte bald in der einen, bald in der andern Richtung.

Dieses Radiometer zeigt noch eine merkwürdige Bewegung. Wird nämlich die untere Elektrode, ein kleines Aluminiumblättchen, als Kathode verwendet, so rotirt die Scheibe bei der grössten Verdünnung mit einer sehr grossen Geschwindigkeit in der normalen Richtung, also entgegengesetzt der Rotationsrichtung bei Umkehrung des Stromes.

Die von der kleinen Kathode ausgehenden Strahlen werden fast gleichmässig nach allen Richtungen zerstreut und es ist daher unerklärlich, wie überhaupt irgend eine Bewegung der Scheibe entstehen könnte.

Die nebenstehende Zeichnung Fig. 3 stellt ein elektrisches Radiometer mit zwei rotirenden Scheiben dar, die schraubenförmige Kathode sendet Elektrodentheilchen gegen beide Scheiben aus und erzeugt bei geringer Verdünnung (0·06 Mm.) eine Rotation in normaler Richtung, wobei die Scheiben entgegengesetzt rotiren. Bei grösserer Verdünnung findet eine Umkehrung der Rotationsrichtung der beiden Scheiben statt.

Wird die untere kleine Elektrode mit dem negativen Pol des Ruhmkorff'schen Apparates verbunden, oder der Strom umgekehrt, so findet wieder eine äusserst lebhafte Rotation der unteren Scheibe in normaler Richtung statt. Die Rotation der oberen Scheibe ist viel langsamer und mit der der unteren Scheibe gleich gerichtet, höchst wahrscheinlich in Folge der inneren Gasreibung, die bekanntlich selbst bei höchster Verdünnung noch beträchtlich gross und bei einer 50000fach verdünnten Luft kaum dreimal geringer ist als bei Luft von gewöhnlicher Dichte.

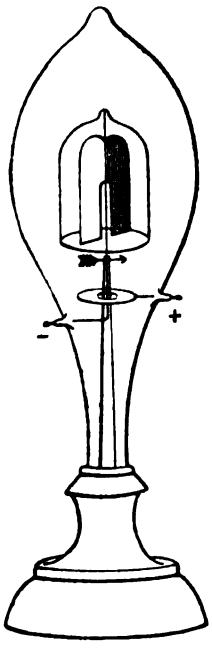
3. Elektrisches Radiometer mit rotirender Glasglocke.

Die fixen Aluminiumflügel dieses Radiometers sind einerseits mit Glimmer belegt und von einer sehr dünnen Glasglocke umschlossen, die auf einer Nadelspitze um das Flügelpaar

rotiren kann. Mit dem letzteren steht ein Platindraht in Verbindung, der in die Glaswand eingeschmolzen ist und mit dem negativen Pol des Ruhmkorff'schen Apparates verbunden wird.

Eine ringförmige positive Elektrode befindet sich unterhalb des Glascylinders.

Fig. 4.



Dieses Radiometer habe ich bereits in meiner ersten Abhandlung über strahlende Elektrodenmaterie beschrieben und daselbst die Erwartung ausgesprochen, dass während die mit Glimmer einerseits belegten Flügel, wenn sie beweglich sind, bei der höchsten Verdünnung ihre Rotationsrichtung umkehren, dies beim Glascylinder nicht der Fall sein wird. Zahlreiche Versuche haben auch meine Erwartung bestätigt. Im Radiometer, welches mir zu jenen Versuchen diente, war die positive Elektrode, ein ebenes Aluminiumscheibchen oberhalb des Glascylinders angebracht. Ich war daher nicht wenig überrascht, als ich an dem hier beschriebenen Radiometer eine Umkehrung der Rotationsrichtung des Glascylinders bei einer Verdünnung von ungefähr 0·02 Mm. Druck beobachtet habe. Der Glascylinder rotirt von der Glimmerseite des einen Flügels zur Aluminiumseite des zweiten.

Merkwürdig ist es auch, dass die Rotationsrichtung bei demselben Verdünnungsgrade verschieden war, je nachdem ein grosser Ruhmkorff mit Quecksilberunterbrecher oder ein ganz kleiner mit dem Neef'schen Hammer benützt wurde. Ich unterlasse diesmal über diese seltsamen Bewegungserscheinungen blosse Muthmassungen anzustellen.

4. Phosphorescirende Lampe.

In einem birnförmigen Glasgefäss ist ein mit grünlich phosphorescirendem Schwefelcalcium einerseits überzogenes Glimmerblättchen schief gegen die verticale Richtung so befestigt, dass

es von den Kathodenstrahlen getroffen wird, die von einer passend angebrachten schalenförmigen Aluminium-Elektrode ausgehen. Neben der Kathode ist seitwärts eine Anode, ein kleines Aluminiumblättchen angebracht. Fig. 6 zeigt die Lampe in etwas veränderter Form. Sie besteht aus einer einfachen Glasröhre, welche in der Mitte ein schief gestelltes, mit Schwefelcalcium angestrichenes elliptisches Glimmerblatt trägt. Unterhalb des Glimmerblattes ist ein Aluminiumscheibchen von demselben Durchmesser, als der Querschnitt der Röhre angebracht und dient als Kathode. Oberhalb des Glimmerblattes befindet sich die viel kleinere Anode.

Fig. 5.

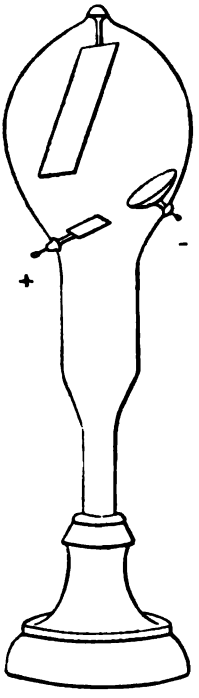
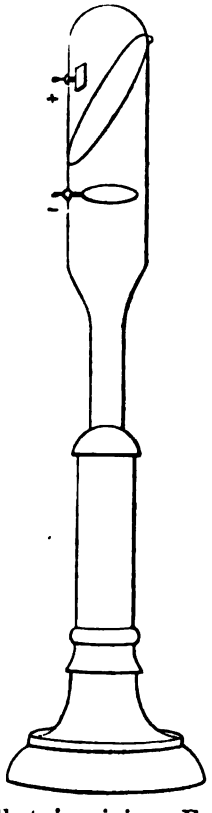


Fig. 6.



Das Licht der phosphorescirenden Lampe ist intensiv genug, um ein Zimmer zu beleuchten und es kann selbst in einiger Entfernung von derselben gelesen werden.

Das Licht intermittirt so oft in der Secunde, als der primäre Strom unterbrochen wird, man sieht jedoch, wegen der längeren Dauer des Lichteindruckes, die Lampe continuirlich leuchten und überzeugt sich von der Intermission des Leuchtens erst durch Bewegung der Körper, welche dann mehrfach erscheinen.

Es sollen hier einige Vorlesungsversuche angeführt werden, die beim Licht dieser intermittirenden Lampe gemacht werden können.

a) Versuch mit dem Spiegel. Betrachtet man das Bild der Lampe in einem grossen Spiegel, der um eine horizontale Axe mit der Hand in schwingende Bewegung versetzt wird, so sieht man einen weisslichen elliptischen breiten Lichtstreifen mit einzelnen sehr hellen Lichtflecken, deren Zahl desto geringer ist, je schneller der Spiegel bewegt wird.

b) Freier Fall. Vor der Lampe wird ein grosser Schirm aus Seidenpapier aufgestellt und vor demselben einzelne Quecksilbertropfen rasch nach einander fallen gelassen. Am Schirme erscheinen die von den Tropfen in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege. Wird ein continuirlich erscheinender Wasserstrahl von der Lampe beleuchtet, so sieht man denselben in einzelne Wassertropfen aufgelöst.

c) Versuch mit einer Kugel. Eine Glaskugel von ungefähr 4 Ctm. Durchmesser wird auf einem Faden vor dem von rückwärts beleuchteten Schirm in einem Kreis geschwungen. Sie erscheint vierfach, wenn während der Zeit, als sie den Kreis beschreibt, der Strom viermal unterbrochen wird. Die vier Kugelbilder würden immer an derselben Stelle erscheinen, wenn die Rotationsgeschwindigkeit constant wäre. Ist die Rotation eine beschleunigte, so entstehen die Bilder an anderen Stellen der Kreisbahn und man sieht wegen der längeren Dauer des Lichteindruckes die vier Kugeln vorrücken. Bei einer verzögerten Rotation werden die Kugeln in entgegengesetzter Richtung rotiren. Lässt man die Kugel um einen Punkt als Pendel schwingen, so sieht man die Geschwindigkeit in verschiedenen Punkten der Kreisbahn.

d) Versuch mit einer durchlöcherten Scheibe. — Eine Kartonscheibe mit drei concentrischen Löcherreihen wird mittelst eines Uhrwerkes oder irgend einer anderen Vorrichtung vor dem Papierschirme in Rotation versetzt. Die Löcherreihen rotiren nach verschiedenen Richtungen und es lässt sich immer eine derselben dadurch in Ruhe erhalten, dass man die rotirende Scheibe mit dem Finger berührt und ihre Rotationsgeschwindigkeit passend modifizirt.

Für die Lampe Fig. 5 genügt ein Strom von 3—4 Ctm. Funkenlänge. Ein stärkerer Strom erhitzt das Glimmerblättchen,

die Phosphorescenz hört auf und es erscheint ein dunkler Fleck, umgeben mit einem phosphorescirenden Ring.

Für die Lampe Fig. 6 kann auch ein Strom von 5—6 Ctm. Funkenlänge verwendet werden, weil hier die Strahlen nicht gesammelt werden. Es ist ein starker Strom nöthig, um das Glimmerblättchen zu erhitzen, und es lässt sich daher bei dieser Lampe eine fast doppelte Intensität des Leuchtens erzielen als bei der ersten Lampe.

5. Wirkung der genäherten Leiter auf die elektrischen Entladungen.

Wird das Glasgefäss Fig. 5 oberhalb des Glimmerblättchens mit der Hand oder irgend einem Leiter berührt oder auch nur angehaucht, so werden die Entladungen in der Lampe oft bis zum gänzlichen Auslöschen des Phosphorescenzlichtes abgeschwächt, wenn der Strom nicht zu stark ist. Beim Anhauchen des Gefässes werden die Entladungen so lange verhindert, als das letztere feucht ist. Aber auch selbst das Nähern eines Leiters kann die Entladungen bedeutend abschwächen.

Dieselbe Erscheinung beobachtet man bei der ersten Lampe noch in einer anderen Weise. Wird zuerst das ebene Aluminiumblättchen als Kathode benützt, wobei die nach aufwärts gehenden Strahlen die ganze Oberfläche des Glimmerblättchens treffen und nachher der Strom umgekehrt, so leuchtet das Glimmerblatt anfangs nur schwach und hellt sich nach 3—4 Secunden plötzlich auf.

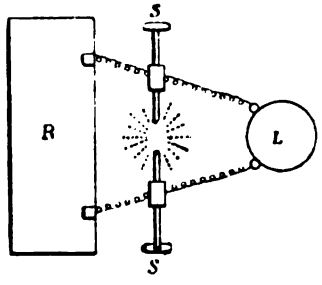
Wird bei der zweiten Lampe das Glimmerblättchen zuerst von oben und dann von unten bestrahlt, so ist nicht blos der Lichtfleck anfangs sehr schwach, sondern er wird auch gegen den oberen Rand des Blättchens abgelenkt und springt nach Verlauf von einigen Secunden plötzlich gegen die Mitte des Blättchens und hellt sich auf.

Diese Erscheinung der Schwächung und Unterbrechung der elektrischen Entladung suchte ich damit zu erklären, dass die statische Elektricität des Glimmerblättchens die in den Drähten zufliessende Elektricität zurückdrängt.

Wäre diese Ansicht richtig, so müsste die strömende Elektricität sich sofort an einer andern Stelle der Leitung entladen, deren Widerstand geringer ist, als der des evacuirten Raumes.

Es ist daher nöthig, zwischen die Zuleitungsdrähte nur zwei Entladungsspitzen einzuschalten, und es lässt sich immer eine solche Funkenstrecke finden, dass zwischen den Spitzen eine Entladung erfolgt, sobald das Glasgefäss angehaucht oder mit der Hand berührt wird. Die Anordnung der Apparate stellt die beiliegende Zeichnung dar: *R* ist der Ruhmkorff'sche Apparat, *S* die Entladungsspitzen und *L* die Lampe.

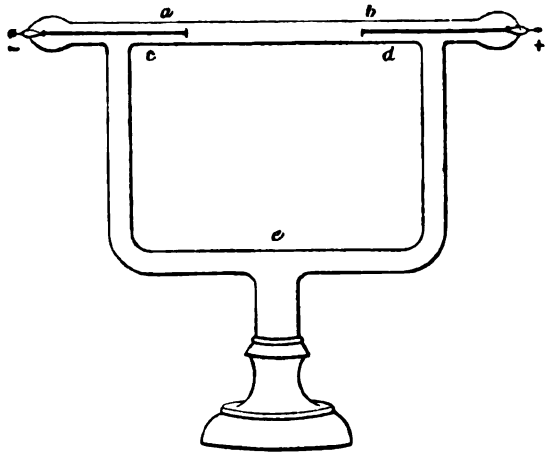
Fig. 7.



6. Apparat zur Demonstration, dass die elektrischen Entladungen im Vacuum durch die statische Elektricität der Wände verhindert werden.

Um diese Erscheinung leicht demonstriren zu können, habe ich einen Apparat construirt, welcher die Form eines Rechteckes hat, in dessen einem Schenkel zwei Draht-Elektroden ein-

Fig. 8.



geschmolzen sind, und mit ihren Enden ungefähr 8 Ctm. von einander entfernt sind.

Bei einer Verdünnung von ungefähr 0·06 Mm. Quecksilberdruck erfolgen die elektrischen Entladungen auf der kurzen Strecke *ab* und der viel längeren *ced*. Wird aber der horizontale Schenkel in der Nähe der Elektrodenenden bei *a* und *b* mit zwei Fingern umfasst, so wird die elektrische Entladung zwischen den Spitzen unterbrochen und auf der fast 5mal längeren Luftstrecke *ced* wird sie stärker.

Beim Berühren der verticalen Schenkel bei *c* und *d* kann die Entladung in den horizontalen Schenkel zurückgedrängt werden. Es ist zu erwarten, dass bei entsprechender Wahl der Dimensionen des Apparates und des Druckes die Entladung nur auf der kürzeren Strecke *ab* erfolgen wird, und bei Berührung der Glaswand mit der Hand oder einem guten Leiter, etwa Staniolblatt, in das Seitenrohr, welches auch mehrfach gebogen sein kann, sich zurückdrängen lässt.

Herr Hittorf hat in der Londoner Ausstellung 1868 eine Röhre ausgestellt, welche einen ähnlichen Fall der elektrischen Entladung im Vacuum zeigte und der nach meiner Ansicht in der Wirkung der statischen Elektricität auf die Elektroden seine Erklärung findet.

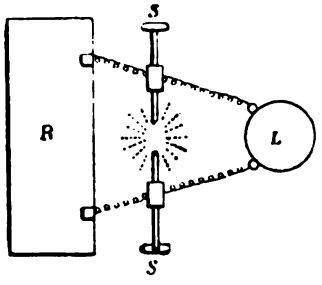
Es war eine Art Spectralröhre mit einem capillaren Mittelstück. Die beiden weiten Endstücke communicirten mit einander durch ein 2mal gebogenes Seitenrohr und waren mit Drahtelektroden versehen, welche in den capillaren Theil der Röhre mündeten. Die Elektrodenenden waren nur wenige Millimeter von einander entfernt. Bei sehr grosser Verdünnung erfolgten die elektrischen Entladungen nicht durch die kürzere Strecke im capillaren Theil der Röhre, sondern durch das viel längere Seitenrohr.

Nach dem Obigen hat es nunmehr keine Schwierigkeit, diese Erscheinung zu erklären. Die Dichte der statischen Elektricität an den Röhrenwänden wird desto grösser sein, je kleiner der Querschnitt der Röhre ist. Während daher die Dichte der Elektricität im capillaren Mittelstück bereits hinreichend ist, um die Entladungen daselbst verhindern zu können, erfolgen die

Wäre diese Ansicht richtig, so müsste die strömende Elektricität sich sofort an einer andern Stelle der Leitung entladen, deren Widerstand geringer ist, als der des evacuirten Raumes.

Es ist daher nöthig, zwischen die Zuleitungsdrähte nur zwei Entladungsspitzen einzuschalten, und es lässt sich immer eine solche Funkenstrecke finden, dass zwischen den Spitzen eine Entladung erfolgt, sobald das Glasgefäss angehaucht oder mit der Hand berührt wird. Die Anordnung der Apparate stellt die beiliegende Zeichnung dar: *R* ist der Ruhmkorff'sche Apparat, *S* die Entladungsspitzen und *L* die Lampe.

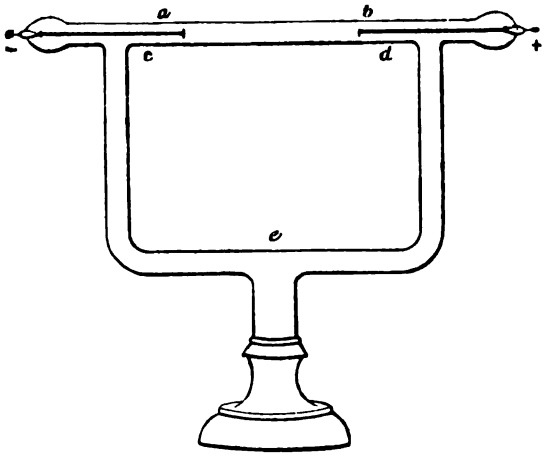
Fig. 7.



6. Apparat zur Demonstration, dass die elektrischen Entladungen im Vacuum durch die statische Elektricität der Wände verhindert werden.

Um diese Erscheinung leicht demonstriren zu können, habe ich einen Apparat construirt, welcher die Form eines Rechteckes hat, in dessen einem Schenkel zwei Draht-Elektroden ein-

Fig. 8.



geschmolzen sind, und mit ihren Enden ungefähr 8 Ctm. von einander entfernt sind.

Bei einer Verdünnung von ungefähr 0·06 Mm. Quecksilberdruck erfolgen die elektrischen Entladungen auf der kurzen Strecke *ab* und der viel längeren *ced*. Wird aber der horizontale Schenkel in der Nähe der Elektrodenenden bei *a* und *b* mit zwei Fingern umfasst, so wird die elektrische Entladung zwischen den Spitzen unterbrochen und auf der fast 5mal längeren Luftstrecke *ced* wird sie stärker.

Beim Berühren der verticalen Schenkel bei *c* und *d* kann die Entladung in den horizontalen Schenkel zurückgedrängt werden. Es ist zu erwarten, dass bei entsprechender Wahl der Dimensionen des Apparates und des Druckes die Entladung nur auf der kürzeren Strecke *ab* erfolgen wird, und bei Berührung der Glaswand mit der Hand oder einem guten Leiter, etwa Staniolblatt, in das Seitenrohr, welches auch mehrfach gebogen sein kann, sich zurückdrängen lässt.

Herr Hittorf hat in der Londoner Ausstellung 1868 eine Röhre ausgestellt, welche einen ähnlichen Fall der elektrischen Entladung im Vacuum zeigte und der nach meiner Ansicht in der Wirkung der statischen Elektricität auf die Elektroden seine Erklärung findet.

Es war eine Art Spectralröhre mit einem capillaren Mittelstück. Die beiden weiten Endstücke communicirten mit einander durch ein 2mal gebogenes Seitenrohr und waren mit Drahtelektroden versehen, welche in den capillaren Theil der Röhre mündeten. Die Elektrodenenden waren nur wenige Millimeter von einander entfernt. Bei sehr grosser Verdünnung erfolgten die elektrischen Entladungen nicht durch die kürzere Strecke im capillaren Theil der Röhre, sondern durch das viel längere Seitenrohr.

Nach dem Obigen hat es nunmehr keine Schwierigkeit, diese Erscheinung zu erklären. Die Dichte der statischen Elektricität an den Röhrenwänden wird desto grösser sein, je kleiner der Querschnitt der Röhre ist. Während daher die Dichte der Elektricität im capillaren Mittelstück bereits hinreichend ist, um die Entladungen daselbst verhindern zu können, erfolgen die

elektrischen Entladungen in weiten Röhrentheilen wegen der geringen Dichte der Elektricität der Wände.

Das Ausbleiben der elektrischen Entladungen in stark evacuirten Röhren ist öfters als Beweis für die Unrichtigkeit der unitarischen Ansicht über das Wesen der Elektricität angeführt worden. Würde, so meinte man, der elektrische Strom in progressiver Fortführung einer unwägbaren Materie, des Äthers, bestehen, so müssten die Entladungen auch im besten Vacuum vor sich gehen, weil in demselben noch immer der Äther vorhanden wäre. Dem gegenüber lässt sich bemerken, dass die elektrischen Entladungen bei demselben Verdünnungsgrade desto leichter erfolgen, je weiter die Wände von der Kathode abstehen und nach dem Obigen sind wir berechtigt zu erwarten, dass die elektrischen Entladungen selbst im besten Vacuum erfolgen würden, wenn nicht die unvermeidlichen statischen Ladungen der nahen Glaswände vorhanden wären.

7. Wie entstehen die statischen Ladungen der Glaswände?

Die statischen Ladungen in der Nähe der negativen Elektrode können entweder durch die von der Kathode ausgehende Induction oder auch in Folge directer Übertragung statischer Elektricität durch die fortgeschleuderten Kathodentheilchen entstehen, die mit statischer negativer Elektricität geladen sind.

Durch eine solche Induction lässt sich die Erscheinung erklären, dass Körper, die in der Nähe einer Kathode sich befinden, bei der höchsten Verdünnung durch die fortgeschleuderten Elektrodentheilchen nicht mehr fortgestossen, sondern von der Kathode angezogen werden. Diese Anziehung beobachtete ich öfters, selbst bei geringer Verdünnung, als ein Glimmerblättchen einer Platin-Elektrode gegenübergestellt wurde, um es mit Platinspiegel zu überziehen.

In einem andern Apparate wurde ein Aluminiumblättchen, das zugleich als Anode diente, in ungefähr 2—3 Mm. Entfernung unterhalb der Kathode angebracht und die Anziehung war so stark, dass das Blättchen umgebogen und mit der Kathode vereinigt wurde.

Die statische Elektricität wird aber auch direct an die Wände übertragen, da nach der von mir ausgesprochenen und vielfach begründeten Ansicht über das Wesen der strahlenden Elektrodenmaterie von der Kathode sehr kleine, mit negativer Elektricität geladene Körpertheilchen losgerissen und fortgeschleudert werden, welche ihre negative Elektricität an die umliegenden Wände grösstentheils abgeben. Die negative Elektricität der inneren Glaswände bindet die positive Elektricität der Aussenwände, während die negative Elektricität der letzteren an die äussere Luft abgegeben wird.

Das evacuirte Glasgefäss bildet somit eine Art Leydner-Flasche mit einer negativen inneren und positiven äusseren Ladung, die manchesmal, namentlich bei höchster Verdünnung, so stark sind, dass dünne Glaswände durchbohrt werden. Wie ich bereits in meiner dritten Abhandlung über strahlende Elektrodenmaterie erwähnt habe, ist die äussere Ladung eines Glasgefässes bei der höchsten Verdünnung positiv, während der Kathoden- als auch Anodendraht negativ elektrisch sind. Der Glasapparat wurde auf seine elektrischen Ladungen in der Weise geprüft dass ein isolirter Kupferdraht zuerst mit verschiedenen Stellen der Glaswand und dann mit dem Zuleitungsdraht eines sehr empfindlichen Quadrantenelektrometers in Berührung gebracht wurde. Dabei zeigte sich auch, dass die Dichte der statischen Elektricität gegenüber den Entladungsstellen der Kathode am grössten war.

P. S. Sämmtliche hier und in den früheren Abhandlungen beschriebenen Vacuumapparate habe ich im physikalischen Cabinete der Wiener Universität ausgeführt. Die Firma F. O. R. Goetre in Leipzig, Härtelstrasse Nr. 6, hat die Fabrikation dieser Apparate übernommen und ich kann es hier nicht unterlassen anzuerkennen, dass die mir übersendeten Proben mit grosser Eleganz und Sachkenntniss ausgeführt sind.

Über das optische Drehungsvermögen des Tyrosins und Cystins.

Von Dr. **Julius Mauthner.**

(Aus dem Laboratorium des Herrn Prof. E. Ludwig in Wien.)

I. Tyrosin.

Die Auffassung des Tyrosins als Oxyphenylamidopropionsäure, zuerst von v. Barth[1] ausgesprochen und von Baumann[2] durch den Nachweis der Bildung von Hydroparacumarsäure bei der Fäulniss des Tyrosins bestätigt, lässt nur zwei Constitutionsformeln für diesen Körper zu, die sich bloss durch die Stellung der Gruppe NH_2 von einander unterscheiden.

Es sind dies die beiden Formeln:

$$C_6H_4\begin{cases}OH\\CH(NH_2)—CH_2—COOH\end{cases} \text{ und } C_6H_4\begin{cases}OH\\CH_2—CH(NH_2)—COOH\end{cases}$$

Jede der beiden Formeln weist ein sogenanntes „asymmetrisches" Kohlenstoffatom auf, d. h. ein solches, welches mit vier verschiedenen Atomgruppen, resp. Atomen verbunden erscheint und es war unter Berücksichtigung der Hypothese von Le Bel und van't Hoff über die Ursache des optischen Drehungsvermögens organischer Substanzen wohl denkbar, dass das Tyrosin die Fähigkeit besitzen könnte, in seinen Lösungen die Ebene des polarisirten Lichtstrahles abzulenken.

Zu jenem Interesse, welches eine positive Entscheidung dieser Frage als ein in dem Sinne jener Hypothese gelegener Beitrag zur Kenntniss eines wichtigen Körpers bieten konnte, gesellt sich ein weiteres bei der Berücksichtigung des Problems

---

[1] Ann. 152. 96.

[2] Ber. D. chem. Ges. XII. 1452.

der Synthese des Tyrosins, welches bereits zu wiederholten Malen Gegenstand der Erörterung gewesen ist. Denn bei dem jetzigen Stande unserer Kenntnisse in dieser Richtung ist es für die Beurtheilung der Schwierigkeiten, die der synthetischen Bildung eines Körpers sich entgegenstellen, gewiss von nicht geringem Belange, ob der darzustellende Körper optisch activ ist, oder nicht.

Da ich in der Literatur keinerlei Angabe über die optische Wirksamkeit des Tyrosins vorfand, stellte sich mit sorgfältigst gereinigten Tyrosinproben, die aus Caseïn, Horn und Seide durch Spalten mit Salzsäure erhalten waren, zunächst bloss qualitative Versuche an dem Hoppe-Seyler'schen Polarisationsapparate an, welche übereinstimmend die ausgesprochene Vermuthung bestätigten.[1] Verschieden concentrirte Lösungen von Tyrosin in Salzsäure oder Kalilauge brachten sehr deutliche Ablenkungen hervor, wie etwa 0·5—1·5procentige Zuckerlösungen, doch nach der entgegengesetzten Seite. Zur Bestimmung der specifischen Drehung verwendete ich ein Tyrosin, das von meinem Freunde Dr. Horbaczewski aus Seide dargestellt worden war. Das noch etwas verunreinigte Product wurde zunächst aus warmem, wässerigem Ammoniak unter Zusatz von Kohle umkrystallisirt, die durch unvollständiges Austreiben des Ammoniaks erhaltene, kaum gefärbte Krystallmasse nach dem Absaugen und Waschen in verdünnter Salzsäure gelöst, nach neuerlicher Behandlung mit Thierkohle filtrirt, und mit essigsaurem Natron gefällt.

Der blendend weisse Niederschlag wurde darauf mit grossen Mengen Wasser gewaschen. Das Tyrosin wurde so vollkommen rein und aschefrei erhalten. Die Verbrennung gab folgende Werthe:

0·3007 Grm. gaben 0·1668 Grm. Wasser und 0·6584 Grm. Kohlensäure.

	Berechnet:	Gefunden:
C	59·67	59·72
H	6·08	6·16

[1] Auch Tyrosin aus zwei pathologischen Harnen nach der Methode von Frerichs und Städeler erhalten, sowie tyrosinsulfonsaures Baryum erwiesen sich als linksdrehend.

Die Bestimmungen der specifischen Drehung wurden in einem Wild'schen Polaristrobometer mit einer Lösung in Salzsäure und zwei verschieden concentrirten Lösungen in Kalilauge ausgeführt.

I. Lösung in Salzsäure mit 21·07 Gewicht Proc. HCl.

Concentration der Lösung: c = 4·51 Grm. in 100 Cub. Ctm.

Beobachtungstemperatur: t = 16·2° C.

Abgelesener Winkel α (Mittel aus zahlreichen von zwei Beobachtern angestellten, gut übereinstimmenden Ablesungen) = —0·72°.

Länge des Rohres: l = 2 Decim.

$$\frac{100\ \alpha}{l.\ c} = [\alpha]_D = -\ 7{\cdot}98°$$

II. Lösung in Kalilauge mit 11·598 Gew. Proc. KHO.

1.	c	=	5·8
	l	=	2
	t	=	20·5° C.
	α	= —	1·045°
	$[\alpha]_D$	= —	9·01
2.	c	=	11·51
	l	=	2
	t	=	16·1· C.
	α	= —	2·04°
	$[\alpha]_D$	= —	8·86°

Ob die Differenzen zwischen den Resultaten in der verschiedenen Concentration einerseits, in der Verschiedenheit des Lösungsmittels andererseits begründet sind, oder den bei so geringem Drehungsvermögen schwer ins Gewicht fallenden Beobachtungsfehlern ihre Entstehung verdanken, möge einstweilen dahingestellt bleiben. Wahrscheinlich besitzt das Tyrosin in saurer Lösung in der That ein anderes Drehungsvermögen, als in alkalischer, eine Erscheinung, die bei Asparagin und Asparaginsäure sogar in der Verschiedenheit der Drehungsrichtung zu Tage tritt, die beide in saurer Lösung nach rechts, in alkalischer nach links ablenken.

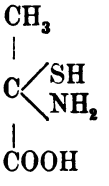
Ob mit zunehmendem Gehalt der alkalischen Tyrosinlösung wirklich ein Sinken der specifischen Drehung eintritt, wie es nach

den ermittelten Zahlen scheinen möchte, müsste ebenso durch weitere Versuche festgestellt werden, wie es für den Einfluss grösseren oder geringeren Gehaltes der Lösungsmittel an Säure oder Alkali und für den Einfluss verschiedener alkalischer oder saurer Substanzen erforderlich wäre.

Ich begnüge mich mit den oben wiedergegebenen Zahlen, weil eine sehr ausgedehnte Reihe vonVersuchen zur Beantwortung dieser Fragen erforderlich wäre und das Interesse der Chemiker doch in erster Linie darauf gerichtet ist, ob ein Körper überhaupt optisch activ ist, oder nicht, und weil im vorliegenden Falle die genaue Kenntniss des specifischen Drehungsvermögens und dessen Abhängigkeit von Concentration und Gegenwart verschiedener Mengen inactiver Substanzen, wie Salzsäure oder Alkali, nicht den Werth hat, wie etwa beim Zucker oder anderen Körpern, deren Drehungsvermögen für quantitative Bestimmungen praktisch verwendet wird.

II. Cystin.

Ähnliche Erwägungen, wie jene, die zur Frage führten, ob Tyrosin optisch activ sei, veranlassten einen Versuch mit dem Cystin. Mochte man die Gruppen SH und NH_2 auf zwei verschiedene Kohlenstoffatome sich vertheilt vorstellen, oder die neuerdings von Baumann und Preusse[1] vorgeschlagene aus der Analogie mit dem Bromphenylcystin abgeleitete, wahrscheinlichere Formel



der Betrachtung zu Grunde legen, in beiden Fällen schien die Vermuthung gerechtfertigt, das Cystin werde vielleicht ebenfalls Drehungsvermögen besitzen. Die Beobachtung zeigte auch, dass dem Cystin in hohem Grade diese Eigenschaft zukomme. Es lenkt stark nach links ab. Durch eine kleine Menge der in Salzsäure gelösten Substanz aus einigen Steinfragmenten, die ich der Liberalität der Herren Prof. Albert und Prof. R. v. Dittel verdanke,

[1] Zeitschr. f. physiol. Chemie. V. 328.

wurde bei einem qualitativen Versuche im Hoppe-Seyler'schen Apparate ein Farbenunterschied hervorgebracht, wie von einer Lösung, die 15 Procent Zucker enthält.

Nicht unerwähnt will ich es lassen, dass nach den Versuchen von Baumann und Preusse[1] bei Fütterung mit Brombenzol im Harne eine stark linksdrehende Substanz auftritt, bei deren leicht eintretender Spaltung unter gleichzeitigem Verschwinden der Linksdrehung sich jene Bromphenylmercaptursäure abscheidet, die durch Behandeln mit Säuren ein Derivat des Cystins, das Bromphenylcystin liefert.

---

[1] Zeitschr. f. physiol. Chemie. V. 310.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXV. Band. V. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XI. SITZUNG VOM 4. MAI 1882.

Herr Dr. L. J. Fitzinger führt als Alterspräsident den Vorsitz.

Die officielle Nachricht über das am 25. April erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Hofrathes Dr. Josef Aschbach und des am 19. April verstorbenen ausländischen Ehrenmitgliedes Herrn Charles Robert Darwin wurde bereits in der Gesammtsitzung der Akademie vom 27. April zur Kenntniss genommen und der Theilnahme an diesen Verlusten Ausdruck gegeben.

Das k. u. k. Ministerium des Äussern übermittelt eine im Gesandtschaftswege aus Teheran eingelangte gedruckte Abhandlung des Herrn Dr. Tholozan: „Sur deux petites épidémies de peste dans le Khorassan."

Das c. M. Herr Regierungsrath Th. Ritter v. Oppolzer in Wien übermittelt die von ihm veröffentlichten: „Syzygien-Tafeln für den Mond, nebst ausführlicher Anweisung zum Gebrauche derselben."

Herr Prof. Dr. C. B. Brühl, Vorstand des zootomischen Institutes der Wiener Universität, übermittelt die 25. Lieferung seines illustrirten Werkes: „Zootomie aller Thierclassen", welche vier Tafeln mit vom Verfasser selbst gezeichneten und gestochenen Originalbildern und den vollständigen Text: „Über die Gehirne der fleischfressenden Säuger" enthält.

Das c. M. Herr Director C. Hornstein übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. G. Gruss, Adjuncten der Prager Sternwarte: „Über die Bahn der Loreley (165)."

Das c. M. Herr Prof. C. Claus übersendet eine Arbeit aus dem zoologisch-vergleichend-anatomischen Institute der Wiener Universität, betitelt: „Zur Entwicklungsgeschichte der Ascidien.

Eibildung und Knospung von *Chavelina lepadiformis*," von Herrn Oswald Seeliger.

Das c. M. Herr Prof. J. Wiesner übersendet eine im pflanzenphysiologischen Institute der Wiener Universität von Herrn Max Singer ausgeführte Untersuchung, welche den Titel führt: „Beiträge zur näheren Kenntniss der Holzsubstanz und der verholzten Gewebe."

Das c. M. Herr Prof. E. Ludwig übersendet eine in seinem Laboratorium von Herrn Dr. Sigmund Lustgarten ausgeführte Arbeit: „Über den Nachweis von Jodoform, Naphtol und Chloroform in thierischen Flüssigkeiten und Organen."

Herr Prof. Dr. C. Doelter in Graz übersendet eine Abhandlung: „Über die mechanische Trennung der Mineralien."

Herr Prof. Dr. A. Wassmuth in Czernowitz übersendet eine Abhandlung: „Über die specifische Wärme des magnetisirten Eisens und das mechanische Äquivalent einer Verminderung des Magnetismus durch die Wärme."

Der Secretär legt noch folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über ein bipolares Liniencoordinatensystem", von Herrn Ferdinand Wittenbauer, dipl. Ingenieur und Docent an der technischen Hochschule in Graz.
2. „Beiträge zur Theorie des Doppelverhältnisses und zur Raum-Collineation", von Herrn Prof. Dr. M. Allé an der technischen Hochschule in Graz.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von den Herren Professoren an der Staats-Gewerbeschule in Reichenau J. V. Janovsky und H. Ritter v. Perger vor, welches die Aufschrift trägt: „Über eine neue Reaction der Azokörper."

Das w. M. Herr Hofrath Ritter v. Hochstetter überreicht eine Arbeit des Herrn Custos Dr. Aristides Brezina in Wien, betitelt: „Bericht über neue oder wenig bekannte Meteoriten" IV.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Herrn Rudolf Wegscheider: „Über Derivate und Constitution der Opiansäure und Hemipinsäure".

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit des Herrn Dr. Z. H. Skraup in Wien: „Synthetische Versuche in der Chinolinreihe.“ III. Mittheilung.

Prof. Dr. M. Neumayr überreicht einen von Herrn August Böhm im paläontologischen Museum der Wiener Universität verfassten Aufsatz: „Über Tertiärfossilien von der Insel Madura nördlich von Java“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg: Bulletin. Tome XXVIII No. 1. St. Pétersbourg. 1882; 4°.

Akademie der Wissenschaften, ungarische in Budapest. Almanach 1882. Budapest 1882; kl. 8°. — Értesitö, 15. Jahrg. Nr. 1—8, Budapest 1881: 8°. — Évkönyv, 16. Bd. 7. Heft. Budapest, 1881; fol. — Monumenta Hungariae archeologica aevi praehistorici. Az Aggteleki barlang mint öskori temetö. Budapest, 1881; fol. — Revue, ungarische. 1881, Heft 3—12. Budapest, 1881—1882. Heft 1—3, Budapest, 1882; 8°. — Ábel, J., Egyetemeink a középkorban. Budapest, 1881; 8°. — Molnár, A., A közoktatás története Magyarországon a XVIII. században. I. Bd. Budapest, 1881; 8°.

— — Értekezések a mathematikai tudományok köréböl. 7. Bd. Nr. 23—25, Budapest, 1881; 8°. — 8. Bd. Nr. 1—12. Budapest, 1881; 8°. — Értekezések a természettudományok köréböl. 11. Bd. Nr. 1—20. Budapest, 1881; 8° — Közlemények (mathematikai és természettudományi). 16. u. 17. Bd. Budapest, 1881; 8°.

Apotheker-Verein, Allgem.-österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt, XX. Jahrgang, Nr. 12 u. 13. Wien, 1882; 8°.

Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus: Jahrbücher. Officielle Publication. Jahrgang 1878. N. F. XV. Band, der ganzen Reihe XXIII. Band. Wien, 1881; 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VI. Nr. 18—20. Cöthen, 1882; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCIV. Nos. 15—17. Paris, 1882; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XV. Jahrgang Nr. 6. Berlin, 1882; 8°.

Gesellschaft, deutsche, geologische: Zeitschrift. XXXIII. Bd., 4. Heft, Berlin, 1881; 8°.

— k. k. der Ärzte: Medizinische Jahrbücher. Jahrgang 1882. I. Heft. Wien, 1882; 8°,

— Berliner medicinische: Verhandlungen aus dem Gesellschaftsjahre 1880—81. Band XII. Berlin 1882; 8°.

— physikalisch-chemische: Journal. Tom. XIV. Nr. 3. St. Pétersbourg, 1882; 8°.

Halle, Universität: Akademische Schriften pro 1881. 143 Stücke. 8°, 4° u. Folio.

Heinze's, Dr. Anklageschrift „Hungarica" im Lichte der Wahrheit. Pressburg und Leipzig, 1882; 8°.

Le Paige, M. C.: Sur la Form quadrilinéaire. Turin 1882; 8°.,

Lotos: Jahrbuch für Naturwissenschaft. N. F. II. Band, der ganzen Reihe XXX. Prag, 1882; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXVIII. Band. 1882. IV. Gotha, 4°. — Ergänzungsheft Nr. 67: Professor Ferd. Blumentritt, Versuch einer Ethnografie der Philippinen. Gotha, 1882; 4°.

Nature. Vol. XXV. Nr. 651 u. 652. London, 1882; 8°.

Società degli Spettroscopisti italiani: Memorie. Vol. XI. Disp. 3ª. Roma, 1882; 4°.

Verein der čechischen Chemiker: Listy chemické. VI Jahrgang. Nr. 1, 3—7. Prag, 1881—82; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXII. Jahrgang, Nr. 16 u. 17. Wien. 1882; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. III. Jahrgang, Nr. 7. und Ausserordentliche Beilage Nr. 5. Wien, 1882; 8°

Die Construction der algebraischen Curven und Flächen aus der Anzahl sie bestimmender Punkte mittelst reciproker linearer Systeme höherer Stufe.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von G. v. Escherich.

(Vorgelegt in der Sitzung am 30. März 1882.)

In einer früheren Abhandlung[1] habe ich die Erzeugung der algebraischen Flächen mittelst reciproker Flächenbündel erörtert und Mittel gesucht, um die reciproken Bündeln festzulegen, welche eine durch die nöthige Zahl ihrer Punkte bestimmte Fläche erzeugen. Es lassen sich aber, wie ich in meiner Arbeit[2] über die reciproken linearen Flächen-Systeme gezeigt habe, die algebraischen Flächen und, da die dortigen Begriffe und Entwicklungen ohne weiters auf lineare Systeme algebraischer Curven übertragbar sind, auch die algebraischen Curven als Erzeugnisse reciproker linearer Systeme höherer Stufe darstellen. Hieraus erwächst nun die Aufgabe, auch derartige Systeme aus der zur Bestimmung ihres Erzeugnisses nöthigen Zahl von Punkten herzustellen. Ich werde im Folgenden die Grundzüge eines Verfahrens zur Lösung dieser Aufgabe entwickeln. Dasselbe erlaubt, die reciproken Systeme, deren Erzeugnisse die Curven und Flächen der II.–VIII. Ordnung bilden, aus der zur Bestimmung dieser Gebilde nothwendigen Zahl von Punkten mit blosser Hilfe des Lineals und Cirkels herzustellen. Durch die construirten reciproken Systeme gelingt es aber nun keineswegs in allen diesen Fällen auch ihre Erzeugnisse blos mit Lineal und Cirkel punktweise zu construiren, sondern im Allgemeinen nur wenn der Grad des Erzeugnisses die Zahl vier nicht übersteigt; es sind also durch dieses Verfahren die Curven und Flächen der II. bis IV. Ordnung aus der Anzahl der sie bestimmen-

[1] Sitzb. der Acad. in Wien Bd. LXXXV.

[2] ibidem Bd. LXXV.

den Punkte punktweise herstellbar. Eine punktweise Construction der allgemeinen Curven und Flächen der höheren als vierten Ordnung mit blosser Hilfe des Lineals und Cirkels ist weder durch diese noch überhaupt durch irgend eine der bisher in Anwendung gebrachten Methoden erzielbar. Doch ist dieselbe keineswegs unmöglich, sondern entspriesst, wie ich bei einer späteren Gelegenheit zeigen will, einem Satze, welchen der tiefsinnige und geniale Schöpfer der Ausdehnungslehre in diesem wunderbaren, aber wenig gekannten Werke aufgestellt hat.

Einer anderen Gelegenheit behalte ich es auch vor, das hier blos skizzirte allgemeine Verfahren und seine nur angedeuteten Anwendungen in allen Einzelheiten auszuführen und die hinweggelassenen Beweise beizubringen.

I.

Es dürfte vielleicht nicht unzweckmässig sein, bevor ich auf den gestellten Vorwurf eingehe, die hiebei nothwendigen Sätze[1] über reciproke lineare Systeme vorauszuschicken.

Ich nenne zwei lineare Systeme der μ^{ten} Stufe:

$$\lambda_0 U_0 + \lambda_1 U_1 + \ldots + \lambda_\mu U_\mu = o$$
$$k_0 V_0 + k_1 V_1 + \ldots + k_\mu V_\mu = o$$

zu einander reciprok, wenn die Parameter λ und k ihrer Gleichungen durch blos eine lineare Gleichung:

$$\sum_{r,i=0}^{\mu} a_i^r \lambda_r k_i = o$$

aneinander geknüpft sind.

Jeder Punkt der Mannigfaltigkeit, in welcher die beiden Systeme liegen, bestimmt in jedem der beiden Systeme ein System $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Stufe und somit in jedem ein Individuum. Ist etwa A dieser Punkt und bezeichnet U^α und V^α die Substitution der Coordinaten dieses Punktes bezüglich in U oder V, so bestimmt derselbe im V-Systeme das Gebilde

$$\begin{vmatrix} a_0^0 a_0^1 \ldots . a_0^\mu U_0^\alpha \\ a_1^0 a_1^1 \ldots . a_1^\mu U_1^\alpha \\ a_\mu^0 a_\mu^1 \ldots . a_\mu^\mu U_u^\alpha \\ V_0 V_1 \ldots . V_\mu 0 \end{vmatrix} \equiv \sum_{i,r} A_i^r U_r^\alpha V_i = o \qquad (I)$$

[1] l. c.

im U-Systeme:

$$\begin{vmatrix} a_0^0 a_0 & \dots & a_0^\mu U_0 \\ a_1^0 a_1^1 & \dots & a_1^\mu U_1 \\ & & \\ a_\mu^0 a_\mu^1 & \dots & a_\mu^\mu U_\mu \\ V_0^\alpha V_1^\alpha & \dots & V_\mu^\alpha 0 \end{vmatrix} = \sum_{i,r} A_i^r U_i^\alpha V_i^\alpha = o, \qquad (I)'$$

wo A_i^r die Subdeterminante des Elementes a_i^r in der Determinante der a bedeutet. Jedes durch einen Punkt derart bestimmte Gebilde nenne ich diesem Punkte entsprechend.

Die vorstehenden Gleichungen lehren, dass jeder Punkt des Gebildes

$$\begin{vmatrix} a_0^0 a_0^1 & \dots & a_0^\mu U_0 \\ a_1^0 a_1^1 & \dots & a_1^\mu U_1 \\ & & \\ a_\mu^0 a_\mu^1 & \dots & a_\mu^\mu U_\mu \\ V_0 V_1 & \dots & V_\mu 0 \end{vmatrix} = \sum_{r,i} A_i^r U_r V_i = o \qquad (II)$$

in jedem Systeme in seinem entsprechenden Gebilde liegt.

Dieses Gebilde, dessen Ordnung also gleich der Summe der Ordnungen der U- und V-Gebilde ist, nenne ich das Erzeugniss der beiden reciproken Systeme.

Diese Thatsache wird sich nun zur Construction der allgemeinen Curven und Flächen der $(m+n)^{\text{ten}}$ Ordnung aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte benützen lassen, wenn es möglich ist, zwei reciproke lineare Systeme μ^{ter} Stufe und bezüglich von der Ordnung m und n herzustellen, dergestalt, dass jede Fläche, welche den einzelnen gegebenen Punkten entspricht, durch ihren entsprechenden Punkt hindurchgeht.

II.

Bei der Aufsuchung eines derartigen Verfahrens gehe ich von der Bemerkung aus, welche sich aus der Gleichung des Erzeugnisses zweier reciproken Systeme unmittelbar ergibt, dass dasselbe alle Punkte enthält, welche in jedem Systeme allen Individuen desselben gemeinsam sind. Von den gegebenen $N(n+$

$+m$)-Punkten, welche das Erzeugniss der beiden reciproken Systeme markiren, bestimmen nun $N(n)-(\mu)$ ein lineares System μ^{ter} Stufe und n^{ter} Ordnung und $N(m)-(\mu)$ andere ein lineares System derselben Stufe und der m^{ten} Ordnung. Diese beiden Systeme lassen sich nun, wie sich zeigen wird, derart reciprok aufeinander beziehen, dass jedes Gebilde, welches den einzelnen von irgend $(\mu+1)$ der gegebenen anderen Punkte entspricht, durch seinen entsprechenden Punkt hindurchgeht. Gelingt es nun, ein Verfahren aufzufinden, wodurch sich vermöge der Construction mehrerer derartiger reciproker Systeme neue reciproke Systeme ableiten lassen, in denen die Zahl der den Gebilden jedes der Systeme gemeinsamen Punkte vermindert, hingegen die der Punkte, deren jeder in seinem entsprechenden Gebilde liegt, vergrössert wird, und lässt sich durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens jeder der gegebenen Punkte mit seinem entsprechenden Gebilde zur Incidenz bringen, so ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Ein solches Verfahren ergibt sich nun aus dem folgenden Satze, den ich in seiner Einschränkung auf Flächenbündel schon früher mitgetheilt habe.

Es seien im Raume $(\mu+1)$ collineare Flächen- oder in einer Ebene $(\mu+1)$ collineare Curvensysteme derselben Ordnung und der μ^{ten} Stufe gegeben. Je $(\mu+1)$ entsprechende Individuen dieser Systeme bestimmen wieder ein derartiges System. Zu jedem Individuum irgend eines dieser „derivirten Systeme" findet sich nun in jedem anderen ein weiteres, derart, dass alle diese Individuen ein neues System μ^{ter} Stufe bilden, welches zu den ursprünglichen collinear ist in Hinsicht der Individuen, welche sie mit demselben derivirten Systeme gemein haben. Diese derivirten Systeme sind selbst zu einander collinear hinsichtlich der Individuen, welche sie mit demselben ursprünglichen oder neuen Systeme gemein haben.

Ist daher im vorhinein ein derartiges „neues" System bekannt, so ist auch die projectivische Beziehung der derivirten Systeme gegeben, da in jedem derselben die $(\mu+2)$ Individuen eines anderen Systems entsprechenden Individuen gegeben sind.

III.

Die Anwendungen dieses Satzes erstrecken sich übrigens viel weiter und ermöglichen die Lösung der folgenden Aufgabe, in der die vorhergehende als specieller Fall enthalten ist und die ich nunmehr in Angriff nehme: Zwei reciproke Systeme der μ^{ten} Stufe und bezüglich von der Ordnung m und n zu construiren derart, dass jedes Individuum des einen Systems, welches den einzelnen von $[N(n)+N(m)-2\mu]\mu+(\mu+1)^2-1$ gegebenen Punkten des anderen Systems entspricht, durch einen ihm zugewiesenen Punkt gehe.

Hierin bedeutet wie früher $N(m)$ und $N(n)$ die Anzahl der Punkte, welche bezüglich ein Individuum des ersten und zweiten Systems bestimmen und ist vorausgesetzt, dass die gegebenen correspondirenden Punkte der beiden Systeme nicht etwa identisch sind. Denn in diesem Falle darf, wie die Gleichung II lehrt, die Zahl der gegebenen Punkte, deren jeder in seinem entsprechenden Individuum liegen soll, nicht grösser als die Zahl der das Erzeugniss der beiden Systeme bestimmenden Punkte, also $N(m+n)$ sein.

Die Verwendung des obigen Satzes zur Bewältigung dieses Vorwurfes bedarf nur weniger Auseinandersetzungen.

Ich nehme zunächst an, es sei ein Verfahren bekannt, um zu einem gegebenen linearen Systeme μ^{ter} Stufe ein reciprokes zu construiren, derart, dass alle Individuen desselben durch p gegebene Punkte gehen und die r gegebenen Punkten des ersten $(1,2\ldots r)$ bezüglich entsprechenden Individuen des zweiten Systems $J_1, J_2 \ldots J_r$ bezüglich durch die gegebenen Punkte $(1',2'\ldots r')$ gehen.

Ich lasse nun im zweiten der beiden Systeme einen der p gemeinsamen Punkte fallen und ersetze ihn der Reihe nach durch die Punkte $1', 2'\ldots r'$. Vermöge des bekannten Verfahrens können dann r zu dem gegebenen reciproke Systeme construirt werden, in deren jedem die den Punkten $1,2,\ldots r, r+1$ entsprechenden Individuen bezüglich durch die Punkte $1',2',\ldots r',(r+1)'$ gehen. Diese Systeme selbst, deren sämmtliche Individuen $(p-1)$ Punkte gemein haben, sind also zu einander collinear und zwar sind die Individuen derselben, welche bezüglich durch die Punkte

$1',2'\ldots.r',(r+1)'$ hindurchgehen, einander zugeordnet. Aus diesen r collinearen Systemen, wo $r>\mu+1$ vorausgesetzt werden darf, mögen $(\mu+1)$ herausgehoben und nach II zur Bildung neuer Systeme verwendet werden, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen.

Die so erhaltenen Systeme sind aber, wie leicht ersichtlich, alle möglichen. Denn gäbe die Zusammenfassung anderer μ der construirten r collinearen Systeme anderweitigen derartigen Systemen Entstehung, so würden je μ derselben mit dem schon gefundenen neue derartige Systeme erzeugen und es könnte also irgend einem Punkte q ein Individuum entsprechend angenommen werden, welches durch q', die $(p-1)$ und irgend $(\mu-1)$ weitere der gegebenen Punkte geht. Diese Punkte, $p+\mu-1$ an der Zahl, bestimmen aber unzweideutig ein Individuum des ursprünglichen Systems und es wäre also dem Punkte q eine durch die gegebenen Punkte fixirtes Individuum zugeordnet, was bestimmte Beziehungen zwischen den gegebenen Stücken voraussetzt.

Es bilden somit alle Gebilde, welche einem Punkte x des gegebenen Systems entsprechen, ein System μ^{ter} Stufe, das nämlich bestimmt ist, durch die $(\mu+1)$ Individuen, welche in den herausgehobenen $(\mu+1)$ collinearen Systemen dem Punkte x entsprechen. Alle diese Systeme sind nach II zu einander collinear und da, $r>\mu+1$, mindestens $(\mu+2)$ Systeme gegeben sind, welche den gestellten Bedingungen genügen, so ist die collineare Beziehung zwischen diesen „derivirten" Systemen bekannt, und man kann also unmittelbar zu jedem Individuum eines solchen Systems alle zugehörigen finden, welche zusammen ein System von der gesuchten Beschaffenheit liefern.

Die dem Punkte $(r+2)$ entsprechenden Gebilde bilden also in diesem Vereine ein System μ^{ter} Stufe, somit constituiren alle Gebilde, welche dem Punkte $(r+2)$ entsprechen und durch den Punkt $(r+2)'$ gehen, ein System $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Stufe. Diesem Systeme entspricht in dem irgend einem Punkte des gegebenen Systems zugehörigen Systeme μ^{ter} Stufe ein collineares System $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Stufe. Die entsprechenden Individuen dieser collinearen Systeme $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Stufe bilden dann immer ein System μ^{ter} Stufe, das zu dem gegebenen reciprok ist und in dem die den Punkten $(1,2,..$

$r, r+1, r+2$) entsprechenden Individuen bezüglich durch die Punkte $1', 2' \ldots r', (r+2)'$ gehen.

In diesem neuen Vereine bilden also die irgend einem Punkte x entsprechenden Gebilde irgend ein System $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Stufe und alle den verschiedenen Punkten entsprechenden Systeme sind zu einander collinear. Es bilden somit die Individuen der Systeme, welche dem Punkte $(r+3)$ entsprechen und durch den Punkt $(r+3)'$ gehen, ein System $(\mu-2)^{\text{ter}}$ Stufe. Demselben entspricht in dem irgend einem Punkte des gegebenen Systems zugehörigen Systeme $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Stufe ein collineares System $(\mu-2)^{\text{ter}}$ Stufe und die entsprechenden Individuen dieser collinearen Systeme bilden Systeme μ^{ter} Stufe, welche zu dem gegebenen reciprok sind und zwar dergestalt, dass die den Punkten $1, 2 \ldots r, r+1, r+2, (r+3)$ entsprechenden Individuen bezüglich durch $1, 2 \ldots r', (r+1)', (r+2)', (r+3)'$ gehen.

Man sieht, wie man so fortfahrend schliesslich zu einem einzigen Systeme μ^{ter} Stufe gelangt, welches dergestalt zu dem gegebenen reciprok ist, dass die den Punkten $1, 2 \ldots r, r+1 \ldots r+\mu$ entsprechenden Individuen bezüglich durch die Punkte $1', 2' \ldots r', (r+1)', \ldots (r+\mu)'$ gehen.

IV.

Es kommt also Alles darauf an, ein Verfahren zu finden, um zwei gegebene lineare Systeme derart reciprok auf einander zu beziehen, dass von den Individuen des einen, deren jedes einem aus einer gegebenen Anzahl von Punkten entspricht, jedes durch einen gegebenen Punkt gehe. Die Aufgabe lässt sich gleichfalls mittelst des aufgestellten Satzes durch folgendes stufenförmiges Verfahren lösen. — Da die Gleichung, welche die reciproke Beziehung zweier linearer Systeme der μ^{ten} Stufe ausdrückt, in homogener Weise $(\mu+1)^2$ Constante enthält, so gibt die obige Forderung zunächst zur Aufgabe Veranlassung:

Zwei gegebene lineare Systeme der μ^{ten} Stufe derart reciprok auf einander zu beziehen, dass von den Individuen des einen, welche den einzelnen von $(\mu+1)^2-1$ gegebenen Punkten des anderen Systems entsprechen, jedes durch einen ihm zugewiesenen Punkt gehe.

Es mögen nun zuvörderst, was keine Schwierigkeiten hat, die beiden Systeme dergestalt reciprok auf einander bezogen werden, dass jedem von $(\mu+2)$ der gegebenen Punkte des ersten Systems im anderen Systeme ein Individuum entspricht, welches durch den ihm zugewiesenen Punkt geht. Ordnet man nun irgend einem dieser Punkte im anderen Systeme immer andere Individuen zu, welche aber alle durch den diesem Punkte gegebenen correspondirenden gehen, so entsteht eine Reihe zu dem ersten reciproker Systeme, in denen jedes der den $(\mu+2)$ Punkten desselben entsprechende Individuum ($\mu+1$ sind gemeinsam) durch den ihm zugewiesenen Punkt geht. Alle diese Systeme sind zu einander collinear und daher durch Anwendung des Satzes II möglich neue zu dem gegebenen reciproke Systeme zu construiren, in denen die Anzahl der gegebenen Punkten des ersten Systems entsprechenden Individuen, deren jedes selbst durch einen ihm zugewiesenen Punkt geht, um $(\mu+1)$ grösser ist als im vorhergehenden Falle. Denn es zeigt sich wieder ähnlich, wie in III, dass nicht nur die dem $(\mu+2)^{\text{ten}}$ sondern auch jedem anderen Punkte x des ersten Systems in den verschiedenen Systemen entsprechenden Individuen ein System $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Stufe bilden und diese Systeme sind zu einander projectivisch hinsichtlich der Individuen, welche einem und demselben zu dem ursprünglichen reciproken Systeme angehören. Es bilden daher alle Individuen, welche in diesen zu dem ursprünglichen Systeme reciproken Systemen demselben Punkte x entsprechen und durch einen gegebenen Punkt x' gehen, ein System $(\mu-2)^{\text{ter}}$ Stufe. Diesem Systeme $(\mu-2)^{\text{ter}}$ Stufe entspricht in dem irgend einem Punkte y des ersten Systems zugehörigen Systeme $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Stufe ein collineares System und jedes System entsprechender Individuen dieser collinearen Systeme bildet mit den angenommenen $(\mu+1)$-Individuen ein System μ^{ter} Stufe, welches zu dem ursprünglichen derart reciprok ist, dass die den einzelnen von $(\mu+1)$ gegebenen Punkten des ersten entsprechenden Individuen des zweiten Systems gegeben sind und im zweiten Systeme das jedem von zwei weiteren gegebenen Punkten des ersten Systems entsprechende Individuum durch einen ihm zugewiesenen Punkt geht.

In dem nunmehr irgend einem Punkte z des ersten Systems zugehörigen Systeme der $(\mu-2)^{\text{ten}}$ Stufe bilden die Individuen, welche durch irgend einen gegebenen Punkt gehen, ein System $(\mu-3)^{\text{ter}}$ Stufe, dem in jedem der collinearen, den Punkten des ersten Systems zugeordneten Systeme $(\mu-2)^{\text{ter}}$ Stufe wieder ein collineares System entspricht. Jedes System entsprechender Individuen dieser collinearen Systeme bildet mit den angenommenen $(\mu+1)$-Individuen ein zu dem ersten Systeme reciprokes System, in dem jedem von $(\mu+1)$ gegebenen Punkten des ersten Systems ein gegebenes Individuum zugeordnet ist, und jedes drei weiteren gegebenen Punkten entsprechende Individuum durch einen ihm zugewiesenen Punkt geht.

Es ist klar, wie man so fortfahrend, schliesslich die Aufgabe löst:

„Zu einem gegebenen Systeme der μ^{ten} Stufe ein reciprokes zu construiren, dergestalt, dass jedem von $(\mu+1)$ gegebenen Punkten des ersten ein zugewiesenes Individuum entspricht und dass das jedem von μ weiteren gegebenen Punkten des ersten Systems im anderen Systeme bezüglich entsprechende Individuum durch einen ihm zugewiesenen Punkt gehe."

Durch wiederholte Anwendung des vorigen Verfahrens, indem man die μ der gegebenen Punkte zugewiesenen Individuen ungeändert lässt, aber dem $(\mu+1)^{\text{ten}}$ verschiedene, durch den correspondirenden gegebenen Punkt gehende Individuen zuordnet, und ganz analoge Überlegungen gelangt man zur Lösung der Aufgabe:

„Zu einem gegebenen Systeme der μ^{ten} Stufe ein reciprokes zu construiren, dergestalt, dass jedem von μ gegebenen Punkten des ersten, ein zugewiesenes Individuum entspricht, und dass das jedem von 2μ weiteren gegebenen Punkten des ersten Systems bezüglich entsprechende Individuum im zweiten Systeme durch einen ihm zugewiesenen Punkt gehe."

Es bedarf nun wohl keiner weiteren Ausführung, dass dieses stufenförmige Verfahren[1] auf seiner letzten Stufe die Eingangs gestellte allgemeine Aufgabe löst.

---

[1] Für ebene und räumliche Systeme der ersten Ordnung wurde es im Wesentlichen von Herrn Schroeter (Journal f. Math. Bd. LXII) im ersten und von mir im zweiten Falle (l. c.) angewandt.

V.

Ich will nun das eben entwickelte allgemeine Verfahren zur Construction zweier reciproker linearer Systeme anwenden zur Construction der algebraischen Curven mittelst reciproker Systeme der zweiten und der algebraischen Flächen, mittelst solcher der dritten Stufe aus der Anzahl sie bestimmender Punkte.

Die punktweise Herstellung der allgemeinen Curve oder Fläche gelingt allerdings nur in dem Falle, als die Ordnung des Gebildes die Zahl vier nicht übersteigt; doch lässt sich zeigen, dass es theoretisch stets möglich ist, zwei reciproke lineare Systeme dieser Stufe herzustellen, deren Erzeugniss das durch die gegebenen Punkte bestimmte Gebilde ist.

Ist das zu construirende Gebilde vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade und $N(m+n)$ die Anzahl der gegebenen dasselbe bestimmenden Punkte, so ist zu zeigen, dass sich stets zwei reciproke lineare Systeme der μ^{ten} Stufe (wo $\mu=3$ oder 4 ist), deren eines von der m^{ten} und das andere von der n^{ten} Ordnung ist, herstellen lassen dergestalt, dass jedes Individuum, welches einem der $N(m+n)$ gegebenen Punkte entspricht, durch seinen entsprechenden Punkt, geht. Zu dem Zwecke wird man nach II aus den $N(m+n)$ gegebenen Punkten zwei Gruppen entnehmen, deren eine $N(m)-\mu$ und deren andere $N(n)-\mu$ Punkte enthält, und die durch diese Gruppen bestimmten linearen Systeme der μ^{ten} Stufe derart reciprok auf einander beziehen, dass in dem einen Systeme jedes einem von $(\mu+1)^2-1$ anderen der gegebenen Punkte des anderen Systems entsprechende Individuum durch diesen Punkt selbst hindurchgehe. Aus diesen beiden Systemen können nun in der oben III angegebenen Weise neue abgeleitet werden, in denen die Zahl der den Individuen jedes oder eines der Systeme gemeinsamen Punkte veringert, aber die der Individuen, deren jedes durch seinen entsprechenden Punkt geht, vergrössert ist. Da diese Zahl $(\mu+1)$ mal so gross als jene ist, so wird die kleinste Zahl der Knotenpunkte, welche man von den ursprünglichen $N(m)+N(n)-2\mu$ fallen lassen muss, um das gewünschte System zu erhalten aus der Gleichung sich ergeben:

$$N(m+n)-(\mu+1)^2+1-[N(n)+N(m)-2\mu-x]=(\mu+1)x,$$

wenn für dieselbe, falls x selbst keine ganze Zahl ist, die nächst höhere ganze Zahl genommen wird. Der hieraus sich ergebende Werth von x zeigt auch, dass stets in den betrachteten Fällen

$$N(n) + N(m) - 2\mu \leqq x$$

und hiermit ist der gewünschte Beweis geliefert, dass es stets möglich sei, zwei reciproke lineare Systeme der zweiten oder dritten Stufe zu construiren, welche resp. eine Curve oder Fläche erzeugen, von der die Anzahl der sie bestimmenden Punkte gegeben ist.

VI.

Um eine durch die Anzahl der sie bestimmenden Punkte gegebene Curve als das Erzeugniss zweier reciproker linearer Curvensysteme der zweiten Stufe darzustellen, ist es also zuvörderst nothwendig, ein Verfahren ausfindig zu machen, welches mit Benützung möglichst einfacher Constructionsmittel zwei gegebene Curvensysteme der zweiten Stufe reciprok aufeinander beziehen lehrt.

Ein solches Verfahren, das etwas von dem bekannten bei zwei ebenen Systemen der ersten Ordnung gebrauchten abweicht, ist folgendes:

Den Punkten B_1, B_2, B_3, B_4, von denen keine drei in derselben Curve des Systemes liegen, (richtiger den durch sie bestimmten Büscheln) des einen Systems, seien im anderen bezüglich die vier Curven C_1, C_2, C_3, C_4, von denen keine drei demselben Büschel angehören, als entsprechende zugewiesen. Der Curve des Büschels B_1, die durch B_2 geht, ist dann die Punktgruppe $(C_1 C_2)$ ebenso den Curven $(B_1 B_3)$ und $(B_1 B_4)$ des Büschels B_1 bezüglich die Punktgruppen $(C_1 C_3)$ und $(C_1 C_4)$ zugewiesen. Die Curve C_4', welche den Büscheln $(C_2 C_3)$ und $(C_1 C_4)$ angehört, geht somit gleichfalls durch die Punktgruppe $(C_1 C_4)$ und es kann somit zu jeder Curve des Büschels (B_1) die auf C_2 zugehörige Punktgruppe mittelst des zu B_1 projectivischen Büschels $(C_2 C_3 C_4')$ und zu jedem der letzteren die erstere construirt werden. In analoger Weise kann man die durch die einzelnen Curven des Büschels B_2 bestimmten Büschel im anderen Systeme ausfindig machen. — Um nun die irgend einem Punkte P des ersten ent-

sprechende Curve des zweiten Systems zu bestimmen, wird man die den Curven $(B_1 P)$ und $(B_2 P)$ bezüglich entsprechenden Büschel construiren. Die diesen beiden Büscheln gemeinsame Curve ist dann die gesuchte.

Jede Curve des zweiten Systems hinwiederum schneidet sowohl die Curve C_1 als auch C_2 in einer Punktgruppe, die diesen Punktgruppen bezüglich in B_1 und B_2 entsprechenden Curven bestimmen dann den gesuchten Curvenbüschel. Da nun jede Curve der Systeme durch zwei Punkte und ein Punkt durch zwei Curven bestimmt ist, so ist ersichtlich, wie zu jedem dieser Gebilde das entsprechende zu construiren ist.

Dieses Verfahren zur reciproken Beziehung zweier Curvensysteme der zweiten Stufe beruht also auf der Ausführbarkeit folgender Aufgaben:

1. Die Curve eines Curvenbüschels zu construiren, welche durch einen gegebenen Punkt geht.
2. Die zwei Curvenbüscheln desselben Curvensystems der zweiten Stufe gemeinsame Curve herzustellen.
3. In zwei projectivischen Curvenbüscheln, die irgend einer Curve des einen entsprechende Curve des anderen zu construiren.

Die Lösung dieser Aufgaben ergibt sich aus den bekannten Sätzen, dass sämmtliche Geraden die Curven eines Curvenbüschels in zum Büschel projectivischen Involutionen schneiden, wobei für die constructive Durchführung die Bemerkung von Wichtigkeit ist, dass jeder Basispunkt des Büschels, welcher auf einer Geraden liegt, den Grad ihrer Involution um eins erniedrigt.

In Folge dieses Umstandes ist es möglich, die reciproken Systeme, welche die allgemeinen Curven der zweiten bis achten Ordnung erzeugen, aus der diese Curven bestimmenden Anzahl von Punkten mit blosser Hilfe von Lineal und Cirkel herzustellen. Sind nun auf diese Weise zwei reciproke lineare Curvensysteme der zweiten Stufe und bezüglich der m^{ten} und n^{ten} Ordnung construirt, welche die durch die nöthige Anzahl Punkte bestimmte Curve der $(m+n)^{\text{ten}}$ Ordnung erzeugen, so wird man ihre punktweise Herstellung versuchen. Zu dem Ende wird man ihre Durchschnittspunkte mit Geraden aufzufinden trachten. Dieselben stellen sich als Coïncidenzpunkte einer (m, n) deutigen Correspondenz

dar und sind, falls $m+n$ die Zahl vier nicht übersteigt, auf Geraden, welche gegebene Punkte der gesuchten Curve enthalten, mit blosser Hilfe von Lineal und Cirkel construirbar.

VII.

Ein ganz analoges Verfahren dient, um zwei gegebene Flächensysteme der dritten Stufe reciprok auf einander zu beziehen.

Den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 A_5, von denen keine drei in derselben Basis eines Büschels und keine vier in derselben Fläche des ersten Systems liegen, seien im zweiten Systeme bezüglich die Flächen F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, von denen keine drei demselben Büschel und keine vier demselben Bündel angehören, zugeordnet. Den Flächen des Büschels $(A_1 A_2)$, welche durch A_3, A_4 und A_5 gehen, sind dann bezüglich die Punktgruppen $(F_1 F_2 F_3)$, $(F_1 F_2 F_4)$ und $(F_1 F_2 F_5)$ zugeordnet. Die Fläche F_5', welche dem Büschel $(F_3 F_4)$ und dem Bündel $(F_1 F_2 F_5)$ gemeinsam ist, geht somit gleichfalls durch die Punktgruppe $(F_1 F_2 F_5)$, und weisen wir den Flächen F_3, F_4, F_5' dieses Büschels bezüglich die Flächen $(A_1 A_2 A_3)$, $(A_1 A_2 A_4)$, $(A_1 A_2 A_5)$ des Büschels $(A_1 A_2)$ zu, so kann vermöge dieser beiden projectivischeu Büschel zu jeder Fläche von A_1 die entsprechende Punktgruppe auf $(F_1 F_2)$ und umgekehrt zu jeder der letzteren die entsprechende Fläche in $(A_1 A_2)$ construirt werden. In analoger Weise kann man die den einzelnen Flächen von $(A_1 A_3)$ und $(A_1 A_4)$ im andern Systeme zugehörigen Punktgruppen ermitteln. Um nun zu irgend einem Punkte P des ersten Systems die entsprechende Fläche im zweiten Systeme zu finden, wird man die gemeinsame Fläche der den Flächen $(A_1 A_2 P)$, $(A_1 A_3 P)$ und $(A_1 A_4 P)$, im andern Systeme bezüglich entsprechenden Bündel aufsuchen. Dieselbe erhält man, indem man zunächst den gemeinsamen Büschel zweier dieser Bündel und nun die gemeinsame Fläche dieses Büschels mit einem Büschel des dritten Bündels bestimmt. Da nun die Basis jedes Büschels durch zwei Punkte oder Flächen und die Basis jedes Bündels durch einen Punkt oder drei Flächen des Systems bestimmt ist, so ist klar, wie man zu jedem dieser Gebilde das entsprechende construiren und somit die reciproke Beziehung herstellen kann.

Das eben auseinandergesetzte Verfahren zur Construction zweier reciproker Flächensysteme der dritten Stufe beruht demnach auf der Ausführbarkeit folgender Aufgaben:

1. Die Fläche eines Flächenbüschels zu construiren, welche durch einen gegebenen Punkt geht.
2. Die zwei Büschel desselben Flächensystems der dritten Stufe gemeinsame Fläche zu construiren.
3. In zwei projectivischen Flächenbüschel, die irgend einer Fläche des einen Büschels entsprechende Fläche im anderen Büschel zu bestimmen.

Die Mittel zur Lösung dieser Aufgaben liegen in dem bekannten Satze, dass sämmtliche Geraden die Flächen desselben Büschels in zum Büschel projectivischen Involutionen schneiden. — Für die constructive Durchführung dieser Aufgaben ist die Thatsache von Wichtigkeit, dass jeder auf einer Geraden liegende Basispunkt des Büschels den Grad ihrer Involution um eins erniedrigt. In Folge dessen ist es auch möglich, reciproke lineare Flächensysteme der dritten Stufe, welche die allgemeinen Flächen der zweiten bis achten Ordnung erzeugen, aus der zur Bestimmung dieser Flächen nöthigen Zahl von Punkten mit blosser Hilfe des Lineals und Cirkels herzustellen.

Sind nun unter Anwendung von III und II die beiden reciproken Flächensysteme der m^{ten} und n^{ten} Ordnung hergestellt, welche die durch die gegebene nöthige Zahl ihrer Punkte bestimmte Fläche der $(m+n)^{\text{ten}}$ Ordnung erzeugen, so wird man auch deren punktweise Construction und zu dem Behufe die Bestimmung der Durchschnittspunkte einer Geraden mit der Fläche versuchen. Dieselben stellen sich als die Coïncidenzpunkte einer (m, n) deutigen Correspondenz dar und sind, sobald $(m+n)$ die Zahl vier nicht übersteigt, auf Geraden, welche gegebenen Punkte der gesuchten Fläche enthalten, mit blosser Hilfe von Lineal und Cirkel construirbar.

Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze.

Von Dr. **Oskar Simony**,
a. o. Professor an der Wiener Hochschule für Bodencultur.

(Mit 5 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. April 1882.)

I.

Untersuchung jener Erscheinungen, welche bei einem unverdrehten, biegsamen Ringe von kreisförmigem Querschnitte auftreten, wenn man einen, den Ring bis zur Mittellinie durchsetzenden, längs der letzteren in sich selbst zurückkehrenden Schnitt durch denselben führt.

Ein unverdrehter[1] biegsamer Ring lässt sich durch einen längs dessen Mittellinie in sich selbst zurücklaufenden Schnitt im Allgemeinen auf zweifache Art in ein neues Gebilde verwandeln, indem man den Ring hiebei entweder nur bis zur Mittellinie oder aber vollständig durchschneiden kann.

Im ersten Falle beträgt die Axendrehung des schneidenden Instrumentes bei Vollendung des Schnittes entweder $\pm 360°$ oder ein ganzes Vielfaches von $\pm 360° : t \times 360°$, im zweiten Falle entweder $\pm 180°$ oder ein ganzes Vielfaches von $\pm 180° : t \times 180°$.

Da ferner die um die Mittellinie des betreffenden Ringes erfolgende Drehung des Schnittes in beiden Fällen entweder in einem einzigen Umlaufe oder aber in $2, 3, 4, \ldots u$-Umläufen vollendet werden kann, liefert die Ausführung derartiger Schnitte eine Fülle verschiedenartiger Gebilde, deren allgemeine Con-

[1] Die Erscheinungen, welche ein verdrehter biegsamer Ring bei Ausführung eines derartigen Schnittes zeigt, sind von den hier beschriebenen wesentlich verschieden.

figuration sich zunächst nur auf Grundlage zahlreicher Experimente mit Sicherheit erschliessen lässt.

Zur Vornahme der letzteren benützt man am besten Hohlringe aus weichem, vulkanisirten Kautschuk, welche einen inneren Durchmesser von 6^{cm}, einen äusseren von 10^{cm} und eine Wanddicke von $1—2^{mm}$ besitzen. Man zeichnet sich dann für die in Betracht kommenden Specialisirungen von u und t auf den betreffenden Ringen jene Linien, in welchen die in sich selbst zurückkehrenden Schnitte deren Oberflächen durchsetzen müssen, und zerschneidet die letzteren schliesslich längs den aufgetragenen Curven. Auf diese Art können alle zwischen 1 und 28 liegenden Specialisirungen von u und t ohne grosse Schwierigkeit realisirt werden, während bei massiven Ringen von gleichen Dimensionen in Folge des bedeutenden und ungleichförmigen Widerstandes, welcher bei der Drehung des Schnittes um die Mittellinie des betreffenden Ringes überwunden werden muss, schon Specialisirungen, wie:

$$u = 3,\ t = 13;\quad u = 12,\ t = 5$$

nicht mehr mit der wünschenswerthen Präcision darstellbar sind.

Um nun speciell jene Erscheinungen, welche bei Ausführung eines in sich selbst zurücklaufenden Schnittes erster Art auftreten, übersichtlich characterisiren zu können, ist die Einführung verschiedener Hilfsbegriffe nothwendig, wobei wir uns selbstverständlicherweise so viel als möglich an die in früheren topologischen Untersuchungen[1] aufgestellte Nomenclatur anschliessen.

Demgemäss ertheilen wir im Folgenden der Drehungszahl t das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem die Windungen der Grenzlinie des Schnittes auf der Oberfläche des Ringes mit den Windungen in Fig. 2 (Taf. I) oder mit jenen in Fig. 1 gleichsinnig

---

[1] Siehe die dritte Auflage meiner Brochure: Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: „In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen“ und verwandter merkwürdiger Probleme“ (Wien, Gerold & Comp. 1881), ferner meine im LXXXIV. Bande der Sitzungsberichte der k. Akademie publicirte Abhandlung: „Über jene Gebilde, welche aus kreuzförmigen Flächen durch paarweise Vereinigung ihrer Enden und gewisse, in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen.“

verlaufen. Hiebei treten die einzelnen Theile des zerschnittenen Ringes desto weniger aus ihren ursprünglichen Lagen heraus, je grösser t im Verhältnisse zur Umlaufszahl: u gewählt wurde, so dass für $t > 3u$ die Gestalt des ursprünglichen Ringes bei sorgfältiger Ausführung des Schnittes noch deutlich erkennbar bleibt. Dies ist u. A. auch aus den beiden zuvor erwähnten Figuren zu entnehmen, welche speciell für $t = \pm 15$ zwei in vier Umläufen zerschnittene Hohlringe darstellen, deren zwischen je zwei Windungen der Schnittcurve liegende Theile überdies beträchtlich verschmälert wurden.

Was ferner die durch den jeweiligen Schnitt erzeugten Gebilde anbelangt, so sind dieselben unter allen Umständen ringartig geschlossen; ihre aufeinanderfolgenden Querschnitte bilden, falls der zerschnittene Ring ein massiver war, congruente Kreissectoren von dem Centriwinkel: $\frac{360°}{u}$, deren Scheitel, wenn λ die Länge der Mittellinie des ursprünglichen Ringes vorstellt, auf einer Linie von der Länge λu liegen. — Zur vollständigen Characteristik dieser Gebilde sind aber ausserdem von Fall zu Fall noch je zwei Angaben erforderlich:

1. Die Angabe jener Zahl: z, durch deren Multiplication mit 360° die jeweilige Verdrehung des in Betracht gezogenen Gebildes bestimmt wird.

2. Die Angabe der eventuell in demselben auftretenden Verschlingung.

Die erstere Angabe wird von Fall zu Fall durch Anwendung eines bekannten Satzes ermöglicht, gemäss welchem jede positive, respective negative Überkreuzung zweier unverdrehter Theile eines ringartig geschlossenen Gebildes das Äquivalent einer Torsion um $+360°$, respective um $-360°$ bilden kann.[1] Zeigt also ein im Übrigen unverdrehtes, ringartig geschlossenes Gebilde a im Sinne der schematischen Figur 3 (Taf. II) auftretende Überkreuzungen, so beträgt dessen Verdrehung: $+a \times 360°$, während dieselbe, falls die Überkreuzungen im Sinne der schematischen Figur 4 erfolgen, die Grösse: $-a \times 360°$ besitzt.

---

[1] Näheres hierüber findet man in der zuvor citirten Brochure, pag. 5, 6.

Ungleich schwieriger gestaltet sich die jeweilige Formulirung der zweiten Angabe, welcher wir, um hiebei der Forderung möglichster Einfachheit und Übersichtlichkeit zu genügen, die nachstehenden Gattungsbegriffe zu Grunde legen:

1. Die Knotenverbindung nullter Ordnung. — Dieselbe tritt, unter a irgend eine positive ganze Zahl gedacht, entweder als positiver (Taf. II, Fig. 5) oder als negativer (Taf. II, Fig. 6) Knoten a^{ter} Art auf[1] und besitzt demgemäss nur zwei Typen, welche am zweckmässigsten mit den Symbolen: $[(+)_a]$ und $[(-)_a]$ bezeichnet werden. Um ferner die Characteristik der höheren Knotenverbindungen zu erleichtern, wollen wir im Folgenden jenen Theil eines gegebenen Knotens a^{ter} Art, welcher dessen Umschlingungen trägt, seine Basis, den ihr gegenüberliegenden Theil des Knotens seinen Bogen und den, den letzteren überkreuzenden Theil des Knotens seinen Schlusstheil nennen.

2. Die Knotenverbindung erster Ordnung. — Dieselbe entsteht dadurch, dass der Schlusstheil eines gegebenen Knotens a^{ter} Art in den Bogen eines Knotens b^{ter} Art mit gleicher Basis übergeht, dessen Schlusstheil sämmtliche Umschlingungen des ersten Knotens durchsetzt und hierauf die Bögen beider Knoten überkreuzt. Es kann daher diese Knotenverbindung in vier Typen:

$$[(+)_a(+)_b],\ [(+)_a(-)_b],\ [(-)_a(+)_b],\ [(-)_a(-)_b]$$

auftreten, von welchen hier jedoch nur der erste (Taf. III, Fig. 13) und letzte (Taf. III, Fig. 14) in Betracht kommen.[2] Ebenso zeigt sich hinsichtlich jener Werthe, welche a und b gleichzeitig annehmen können, insoferne eine Beschränkung, als die Differenz:

---

[1] Diese Verschlingung ist zugleich die einzige, welche die hier zu betrachtenden Gebilde mit jenen Flächen gemein haben, welche aus ringförmig geschlossenen, knotenfreien Streifen durch in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen.

[2] Der zweite und dritte Typus ist erst beim Zerschneiden solcher Gebilde in Rechnung zu ziehen, welche aus zwei einander rechtwinkelig durchsetzenden, unverdrehten Ringen von gleichen kreisförmigen Querschnitten bestehen und daher die von mir in der früher angeführten Abhandlung untersuchten geschlossenen Flächen zweiter Klasse als Schnittflächen enthalten.

$b - a$ für die hier zu untersuchenden Gebilde entweder gleich 0 oder gleich $+1$ ist. Da sich ferner die Knotenverbindungen von den Typen: $[(+)_a(+)_b]$ und $[(-)_a(-)_b]$ für alle denkbaren Werthe von a und b zu einander wie ein gegebenes Object zu dem Spiegelbilde seiner Rückseite verhalten, können wir uns bei der Besprechung der wichtigsten Specialisirungen von a und b:

$$a = b = 1;\ a = 1, b = 0;\ a = 0, b = 1$$

auf Knotenverbindungen von dem Typus $[(+)_a(+)_b]$ beschränken.

Ist erstens $a = b = 1$, so lässt sich die betreffende Knotenverbindung in der durch die schematische Figur 7 (Taf. II) characterisirten symmetrischen Gestalt darstellen, und überdies in eine Verschlingung von der Form der schematischen Figur 8 transformiren; sie repräsentirt also einen positiven Knoten erster Art, dessen Schlusstheil an dem Bogen des Knotens mit einem positiven Knoten erster Art festgeknüpft erscheint.[1]

Ist zweitens $a = 1$, $b = 0$, mithin die Knotenverbindung nach dem Muster der schematischen Figur 9 gestaltet, so lässt sich dieselbe unmittelbar in einen positiven Knoten zweiter Art transformiren, d. h. es besteht die symbolische Gleichung:

$$[(+)_1(+)_0] = [(+)_2].$$

Im dritten Falle endlich ist die in Betracht gezogene Knotenverbindung gemäss der, keiner bildlichen Erläuterung bedürftigen symbolischen Relation:

$$[(+)_0(+)_1] = [(+)_1]$$

dem positiven Knoten erster Art äquivalent.

3. Die Knotenverbindung zweiter Ordnung. — Dieselbe entsteht dadurch, dass der Schlusstheil einer aus zwei Knoten a^{ter} und b^{ter} Art zusammengesetzten Knotenverbindung erster Ordnung in den Bogen eines Knotens c^{ter} Art mit gleicher Basis übergeht, dessen Schlusstheil sämmtliche Umschlin-

---

[1] Ebenso kann die Knotenverbindung von dem Typus $[(+)_1(+)_2]$ in einen positiven Knoten zweiter Art transformirt werden, dessen Schlusstheil an dem Bogen des Knotens mit einem positiven Knoten erster Art festgeknüpft ist.

gungen der beiden früher gebildeten Knoten durchsetzt und hierauf die Bögen aller drei Knoten überkreuzt. Die acht möglichen Typen dieser Knotenverbindung sind folgende:

$$[(+)_a(+)_b(+)_c],\ [(+)_a(+)_b(-)_c],\ [(+)_a(-)_b(+)_c],$$
$$[(-)_a(+)_b(+)_c],\ [(+)_a(-)_b(-)_c],\ [(-)_a(+)_b(-)_c],$$
$$[(-)_a(-)_b(+)_c],\ [(-)_a(-)_b(-)_c].$$

Auch von diesen Typen kommen bei den hier auftretenden Verschlingungen nur der erste (Taf. IV, Fig. 17) und letzte (Taf. IV, Fig. 18) in Betracht, welche sich zu einander wieder wie ein gegebenes Object zu dem Spiegelbilde seiner Rückseite verhalten. Desgleichen sind jene Werthe, welche a, b, c gleichzeitig erhalten können, insoferne beschränkt, als für die hier zu besprechenden Gebilde die Differenzen: $b-a$, $c-a$ entweder beide gleich 0 oder beide gleich $+1$ werden. — Die wichtigsten, in einfachere Verschlingungen transformirbaren Specialisirungen der Knotenverbindung zweiter Ordnung sind folgende:

1. Die auf Tafel II (Fig. 10) abgebildete Knotenverbindung von dem Typus: $[(+)_1(+)_0(+)_0]$, welche sich direct in einen positiven Knoten dritter Art transformiren lässt, respective der symbolischen Gleichung:

$$[(+)_1(+)_0(+)_0] = [(+)_3]$$

Genüge leistet.

2. Die Knotenverbindung von dem Typus: $[(+)_1(+)_0(+)_1]$, (Taf. II, Fig. 11), welche, wie man sich leicht experimentell überzeugen kann, einer Knotenverbindung von dem Typus: $[(+)_1(+)_2]$ äquivalent ist, also die symbolische Relation:

$$[(+)_1(+)_0(+)_1] = [(+)_1(+)_2]$$

geometrisch begründet.

3. Die Knotenverbindung von dem Typus: $[(+)_1(+)_1(+)_0]$, für welche die analoge Gleichung:

$$[(+)_1(+)_1(+)_0] = [(+)_2(+)_1]$$

besteht. — Sämmtliche Transformationsgleichungen gelten auch nach Vertauschung des Zeichens $+$ mit $-$.

4. Als allgemeinsten Gattungsbegriff führen wir schliesslich jenen der Knotenverbindung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ein, welche sich aus r-einfachen Knoten a_1^{ter}, a_2^{ter}, $a_3^{\text{ter}} \ldots a_{r-1}^{\text{ter}}$ a_r^{ter} Art mit gemeinsamer Basis in ganz derselben Weise aufbaut, wie die Knotenverbindung erster Ordnung aus zwei, und jene zweiter Ordnung aus drei Knoten entsteht. Ihre 2^r Typen sind der Reihe nach folgende:

$$[(+)a_1(+)a_2(+)a_3\ldots(+)a_{r-1}(+)a_r],$$
$$[(+)a_1(+)a_2(+)a_3\ldots(+)a_{r-1}(-)a_r],$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$
$$[(-)a_1(-)a_2(-)a_3\ldots(-)a_{r-1}(+)a_r],$$
$$[(-)a_1(-)a_2(-)a_3\ldots(-)a_{r-1}(-)a_r].$$

Der erste dieser Typen entspricht der positiven Knotenverbindung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, (Taf. V, Fig. 19), der letzte der negativen Knotenverbindung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung (Taf. V, Fig. 20). Die übrigen $2(2^{r-1}-1)$ Typen sind bei den hier vorkommenden Verschlingungen nicht vertreten[1], und findet überdies bezüglich jener Werthe, welche $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{r-1}, a_r$ gleichzeitig annehmen können, insoferne eine Beschränkung statt, als die Differenzen:

$$a_2-a_1,\ a_3-a_1, \ldots a_{r-1}-a_1,\ a_r-a_1$$

entweder insgesammt gleich 0 oder insgesammt gleich $+1$ oder theilweise gleich 0, theilweise gleich $+1$ sind. Hiebei erscheint es, falls zwei oder mehrere unmittelbar benachbarte Knoten einander gleich sind, oder aber in der betreffenden Knotenverbindung zwei oder mehrere, durch keine heterogenen Zwischenglieder getrennte Knotengruppen von gleicher Beschaffenheit vorkommen, der Kürze wegen zweckmässig, symbolische Potenzexponenten einzuführen, z. B. also Typen wie die folgenden:

---

[1] Dieselben kommen beim Zerschneiden solcher Gebilde in Betracht, welche aus r— einander durchsetzenden, unverdrehten Ringen von gleichen kreisförmigen Querschnitten bestehen und daher geschlossene Flächen mit $2r$ bandförmigen Fortsätzen als Schnittflächen enthalten.

$$[(+)_k(+)_k(+)_k(+)_{k+1}(+)_k(+)_k],$$
$$[(+)_k(+)_{k+1}(+)_k(+)_{k+1}(+)_k(+)_{k+1}],$$
$$[(+)_k(+)_k(+)_{k+1}(+)_k(+)_k(+)_{k+1}(+)_k]$$

in den Formen:

$$[(+)_k^2(+)_{k+1}(+)_k^2],\ [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^3],\ [\{(+)_k^2(+)_{k+1}\}^2(+)_k]$$

zu schreiben.

Man hat sich jedoch bei einer derartigen Schreibweise immer gegenwärtig zu halten, dass die einzelnen Glieder eines solchen Typus nie wie die Factoren eines Productes mit einander vertauschbar sind, indem für keine einzige Knotenverbindung eine Abänderung der Reihenfolge der sie constituirenden Knoten möglich wird. Es wäre demgemäss auch unrichtig, beispielsweise die Typengleichungen:

$$T = [(+)_k^4\{(+)_{k+1}(+)_k^2\}^2],\ T = [(+)_k^3\{(+)_{k+1}(+)_k^2\}^2],$$
$$T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^4(+)_{k+1}\{(+)_k(+)_{k+1}^{-1}\}^3]$$

etwa durch die symbolischen Relationen:

$$T = [\{(+)_k^2(+)_{k+1}(+)_k^3\}^2],\ T = [\{(+)_k(+)_{k+1}(+)_k^2\}^3],$$
$$T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^7(+)_{k+1}]$$

zu ersetzen, welche in der That drei von den früheren völlig verschiedene Knotenverbindungen characterisiren. Ausserdem ist noch hervorzuheben, dass sich die Ordnungszahl einer gegebenen Knotenverbindung nur dann erniedrigen lässt, wenn die Grössen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_{r-1}, a_r$, welche im Folgenden als Windungszahlen bezeichnet werden mögen, theilweise verschwinden, und zwar sind speciell jene Transformationen,[1] deren Kenntniss zur Verwerthung der hier mitgetheilten empirischen Resultate unentbehrlich ist, in den nachstehenden symbolischen Gleichungen enthalten:

---

[1] Um etwaigen Missverständnissen bei der experimentellen Prüfung derselben, welche von mir auf Grundlage von 74, mit schmalen Kautschukstreifen ausgeführten Experimenten gefunden worden sind, vorzubeugen, habe ich speciell die Knotenverbindungen von den Typen: $[\{(+)_1(+)_0\}^2]$. $[\{(+)_1(+)_0\}^2(+)_1]$, $[(+)_1^2(+)_0(+)_1^2]$ in den Figuren 12, 15 und 16 bildlich dargestellt.

$$[\{(+)_1(+)_0^p\}^q] = [(+)_{p+1}^q],$$

$$[\{(+)_0(+)_1^p\}^q] = [(+)_1^p\{(+)_2(+)_1^{p-1}\}^{q-1}],$$

$$[\{(+)_0^p(+)_1\}^q(+)_0^{p-1}] = [(+)_p(+)_{p+1}^{q-1}],$$

$$[(+)_1^p\{(+)_0(+)_1^{p+1}\}^q\{(+)_0(+)_1^p\}] =$$

$$= [\{(+)_1^p(+)_2\}^{q+1}(+)_1^{p-1}];^*$$

$$[\{(+)_1(+)_0\}^p(+)_0\{(+)_1(+)_0\}^p] = [(+)_2^p(+)_2(+)_2^{p-1}],$$

$$[\{(+)_0(+)_1\}^p(+)_1\{(+)_0(+)_1\}^{p-1}] = [\{(+)_1(+)_2^{p-1}\}^2];$$

$$[\{(+)_0^2(+)_1\}^2\{(+)_0(+)_1(+)_0\}^2] = [\{(+)_2(+)_3\}^2],$$

$$[\{(+)_1(+)_0(+)_1\}(+)_1(+)_0\{(+)_1(+)_0(+)_1\}^2] =$$

$$= [(+)_1\{(+)_2(+)_1(+)_2\}^2].$$

Dieselben gelten im Vereine mit der allgemeinen Relation:

$$[(+)_0^k(+)_a(+)_b(+)_c\ldots] = [(+)_a(+)_b(+)_c\ldots],$$

welche unmittelbar aus der Entstehungsweise der positiven Knotenverbindung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hervorgeht, auch nach Vertauschung des Zeichens $+$ mit $-$ und erläutern zugleich den wichtigen Erfahrungssatz:

Jede Knotenverbindung s^{ter} Ordnung, von deren $s+1$ Windungszahlen: a_1, a_2, $a_3\ldots a_s$, a_{s+1} etwa s_1 mit der Null zusammenfallen, während die $s-s_1+1$ übrigen Windungszahlen gleich 1 werden, lässt sich in eine Knotenverbindung $(s-s_1)^{\text{ter}}$ Ordnung transformiren.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen sei es nunmehr gestattet, die Ergebnisse meiner bisherigen Erperimente [1], so weit

---

* Hieraus folgt u. A. für $p=1$, $q=r-1$ in Hinblick auf die Identität:

$$[(+)_1\{(+)_0(+)_1^{r-1}\{(+)_0(+)_1\}] = [\{(+)_1(+)_0(+)_1\}^r]$$

die interessante Transformationsgleichung:

$$[\{(+)_1(+)_0(+)_1\}^r] = [\{(+)_1(+)_2\}^r],$$

welche als eine directe Verallgemeinerung der Relation: $[(+)_1(+)_0(+)_1] = [(+)_1(+)_2]$ zu betrachten ist.

[1] Ich habe alle complicirten Knotenverbindungen mittelst Nähnadeln auf kleinen Holztafeln bleibend fixirt, weil die Transformation der jeweiligen Verschlingungen aus ihren ursprünglichen in gesetzmässige

sich dieselben auf den vorliegenden ersten Theil der Arbeit beziehen, in schematischer Darstellungsweise mitzutheilen, wobei die jeweilige Umlaufszahl[1] des in sich selbst zurückkehrenden Schrittes als Eintheilungsgrund benützt, und als gemeinsames Symbol für die Typen der verschiedenen Knotenverbindungen der Buchstabe T gebraucht werden mag.

$$(1) \ldots u = 2.^*$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +1$.

$t = -1$: Knotenfreies Gebilde; $t = -3 : T = [(+)_1]$;

$t = -5 : T = [(+)_2]$; $t = -7 : T = [(+)_3]$;

$t = -9 : T = [(+)_4]$; $t = -11 : T = [(+)_5]$.

Formen theilweise ausserordentlich schwierig ist. Es hat dies seinen Grund darin, dass die Reihenfolge der Umläufe des Schnittes gemeiniglich nicht der Reihenfolge der nebeneinander fortlaufenden Theile seiner Grenzcurve auf der Oberfläche des Ringes entspricht. — So trifft beispielsweise ein mit einer Drehung um $13 \times 360°$ nach 21 Umläufen in sich selbst zurückkehrender Schnitt die Peripherie jenes Querschnittes, in welchem sein Ausgangspunkt gelegen ist, nach dem 1ten, 2ten, 3ten, ... 20ten Umlaufe der Reihe nach in den Punkten:

14, 6, 19, 11, 3, 16, 8, 21, 13, 5, 18, 10, 2, 15, 7, 20, 12, 4, 17, 9,

wenn man bei der Numerirung der Schnittpunkte im Sinne der stattfindenden Drehung vorschreitet. Ferner ist noch zu erwähnen, dass es sich für $u \leqq 6$, $t > 2u$ empfiehlt, vor der Construction der betreffenden Knotenverbindung die Breite der einzelnen Theile des zerschnittenen Hohlringes bis auf circa 2^{mm} zu reduciren, weil hiedurch die Isolirung der einzelnen Knoten wesentlich erleichtert wird. Schliesslich hat man beim Fixiren der einzelnen Theile des zerschnittenen Ringes jede Zerrung derselben zu vermeiden, weil der vulkanisirte Kautschuk im Laufe der Zeit seine Elasticität fast vollständig verliert, und daher im Falle des Vorhandenseins starker Spannungen nachträglich leicht Querrisse entstehen könnten.

[1] Die Umlaufszahl 1 kommt hier praktisch nicht in Betracht, da ein nur bis zur Mittellinie des betreffenden Ringes reichender Schnitt denselben in einem einzigen Umlaufe nie so zerschneiden kann, dass eine gegenseitige Verschiebung seiner Theile längs der Mittellinie möglich würde.

* Die aus dieser Reihe von Experimenten hervorgehenden allgemeinen Sätze fallen theilweise mit jenen zusammen, welche ich bereits in der früher citirten Brochure auf pag. 28 abgeleitet habe.

$$(2) \ldots u = 3.$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +2$.

$t = -1$: Knotenfreies Gebilde, $t = -2 : T = [(+)_1]$;

$t = -4 : T = [(+)_1^2]$; $t = -5 : T = [(+)_1(+)_2]$;

$t = -7 : T = [(+)_2^2]$; $t = -8 : T = [(+)_2(+)_3]$;

$t = -10 : T = [(+)_3^2]$; $t = -11 : T = [(+)_3(+)_4]$;

$t = -13 : T = [(+)_4^2]$; $t = -14 : T = [(+)_4(+)_5]$.

$$(3) \ldots u = 4.\ *$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +3$.

$t = -1$: Knotenfreies Gebilde; $t = -3 : T = [(+)_1^2]$;

$t = -5 : T = [(+)_1^3]$; $t = -7 : T = [(+)_1(+)_2^2]$;

$t = -9 : T = [(+)_2^3]$; $t = -11 : T = [(+)_2(+)_3^2]$;

$t = -13 : T = [(+)_3^3]$; $t = -15 : T = [(+)_3(+)_4^2]$;

$t = -17 : T = [(+)_4^3]$.

$$(4) \ldots u = 5.$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +4$.

$t = -1$: Knotenfreies Gebilde; $t = -2 : T = [(+)_2]$;

$t = -3 : T = [(+)_1(+)_2]$; $t = -4 : T = [(+)_1^3]$;

$t = -6 : T = [(+)_1^4]$; $t = -7 : T = [(+)_1^2(+)_2(+)_1]$;

$t = -8 : T = [\{(+)_1(+)_2\}^2]$; $t = -9 : T = [(+)_1(+)_2^3]$;

$t = -11 : T = [(+)_2^4]$; $t = -12 : T = [(+)_2^2(+)_3(+)_2]$;

$t = -13 : T = [\{(+)_2(+)_3\}^2]$; $t = -14 : T = [(+)_2(+)_3^3]$;

$t = -16 : T = [(+)_3^4]$; $t = -17 : T = [(+)_3^2(+)_4(+)_3]$;

$t = -18 : T = [\{(+)_3(+)_4\}^2]$; $t = -19 : T = [(+)_3(+)_4^3]$.

---

* Diese Reihe von Experimenten lässt sich auch mit massiven Ringen sehr präcis ausführen, indem die Querschnitte der hier in Betracht kommenden Gebilde Kreisquadranten sind, also der jeweilige Schnitt erster Art einem in zwei Umläufen in sich selbst zurückkehrenden Schnitte zweiter Art äquivalent ist.

(5) . . . $u = 6$.

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +5$.

$t = -1$: Knotenfreies Gebilde; $t = -5 : T = [(+)_1^5]$;

$t = -7 : T = [(+)_1^5]$; $t = -11 : T = [(+)_1 (+)_2^4]$;

$t = -13 : T = [(+)_2^5]$; $t = -17 : T = [(+)_2 (+)_3^4]$;

$t = -19 : T = [(+)_3^5]$; $t = -23 : T = [(+)_3 (+)_4^4]$.

(6) . . . $u = 7$.

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +6$.

$t = -1$: Knotenfreies Gebilde; $t = -2 : T = [(+)_3]$;

$t = -3 : T = [(+)_2^2]$; $t = -4 : T = [(+)_1 (+)_2^2]$;

$t = -9 : T = [(+)_1^3 (+)_2 (+)_1^2]$;

$t = -10 : T = [(+)_1^2 \{(+)_2 (+)_1\}^2]$;

$t = -11 : T = [\{(+)_1 (+)_2\}^3]$; $t = -12 : T = [\{(+)_1 (+)_2^2\}^2]$.

(7) . . . $u = 8$.

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +7$.

$t = -3 : T = [(+)_2 (+)_3]$; $t = -5 : T = [\{(+)_1 (+)_2\}^2]$;

$t = -11 : T = [\{(+)_1^2 (+)_2\}^2 (+)_1]$;

$t = -13 : T = [(+)_1 \{(+)_2 (+)_1 (+)_2\}^2]$.

(8) . . . $u = 9$.

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +8$.

$t = -2 : T = [(+)_4]$; $t = -4 : T = [(+)_2^3]$;

$t = -11 : T = [(+)_1^4 (+)_2 (+)_1^3]$;

$t = -13 : T = [(+)_1^2 \{(+)_2 (+)_1\}^3]$;

$t = -14 : T = [\{(+)_1 (+)_2\}^4]$; $t = -16 : T = [\{(+)_1 (+)_2^3\}^2]$.

$$(9) \ldots u = 10.^*$$

$$t = -3 : T = [(+)_3^2]; \quad t = -7 : T = [(+)_1^2 \{(+)_2 (+)_1\}^2];$$
$$t = -13 : T = [(+)_1^3 \{(+)_2 (+)_{11}^2\}^2]; \quad t = -17 : T = [(+)_1 (+)_2^2\}^3].$$

$$(10) \ldots u = 11.$$

$$t = -2 : T = [(+)_5]; \quad t = -3 : T = [(+)_3 (+)_4];$$
$$t = -4 : T = [(+)_2 (+)_3^2]; \quad t = -7 : T = [\{(+)_1 (+)_2\}^3].$$

$$(11) \ldots u = 13.$$

$$t = -3 : T = [(+)_4^2]; \quad t = -4 : T = [(+)_3^3];$$
$$t = -5 : T = [\{(+)_2 (+)_3\}^2]; \quad t = -11 : T = [(+)_1^5 (+)_2 (+)_1^4].$$

$$(12) \ldots u = 14.$$

$$t = -3 : T = [(+)_4 (+)_5]; \quad t = -11 : T = [\{(+)_1^3 (+)_2\}^2 (+)_1^2].$$

$$(13) \ldots u = 15.$$

$$t = -4 : T = [(+)_3 (+)_4^2]; \quad t = -11 : T = [\{(+)_1^2 (+)_2\}^3 (+)_1].$$

$$(14) \ldots u = 16.$$

$$t = -3 : T = [(+)_5^2]; \quad t = -11 : T = [(+)_1^2 \{(+)_2 (+)_1\}^4];$$
$$t = -13 : T = [(+)_1^4 \{(+)_2 (+)_{11}^3\}^2].$$

$$(15) \ldots u = 17.$$

$$t = -4 : T = [(+)_4^3]; \quad t = -11 : T = [\{(+)_1 (+)_2\}^5];$$
$$t = -12 : T = [(+)_1^2 \{(+)_2 (+)_1\}^2 (+)_1 \{(+)_2 (+)_1\}^2];$$
$$t = -13 : T = [(+)_1^3 \{(+)_2 (+)_1^2\}^3];$$
$$t = -14 : T = [\{(+)_1^4 (+)_2\}^2 (+)_1^3].$$

---

* Bei diesen und den folgenden Experimenten habe ich die jeweilige Verdrehung des durch den Schnitt erhaltenen Gebildes nicht mehr untersucht, weil dies bei der Einfachheit des für die erstere bestehenden Gesetzes überflüssig gewesen wäre.

$$(16) \ldots u = 18.$$

$$t = -11 : T = [(+)_1 \{(+)_2 (+)_1 (+)_2\}^2];$$
$$t = -13 : T = [\{(+)_1^2 (+)_2\}^2 \{(+)_1 (+)_2 (+)_1\}^2].$$

$$(17) \ldots . u = 19.$$

$$t = -11 : T = [\{(+)_1 (+)_2^2\}^2 (+)_2 \{(+)_1 (+)_2^2\}];$$
$$t = -12 : T = [\{(+)_1 (+)_2\}^3 (+)_2 \{(+)_1 (+)_2\}^2];$$
$$t = -14 : T = [\{(+)_1^2 (+)_2\}^4 (+)_1];$$
$$t = -15 : T = [\{(+)_1^3 (+)_2\}^3 (+)_1^2].$$

$$(18) \ldots u = 20.$$

$$t = -11 : T = [\{(+)_1 (+)_2^4\}^2].$$

$$(19) \ldots u = 21.$$

$$t = -13 : T = [\{(+)_1 (+)_2\}^2 (+)_2 (+)_1 \{(+)_2 (+)_1 (+)_2\}^2].$$
$$t = -16 : T = [(+)_1^3 \{(+)_2 (+)_1^2\}^4].$$

$$(20) \ldots u = 22.$$

$$t = -13 : T = [\{(+)_1 (+)_2^2\}^4].$$

$$(21) \ldots u = 23.$$

$$t = -13 : T = [\{(+)_1 (+)_2^2\}^3];$$
$$t = -14 : T = [\{(+)_1 (+)_2\} \{(+)_1 (+)_2^2\}^3 \{(+)_1 (+)_2\}];$$
$$t = -16 : T = [(+)_1^2 \{(+)_2 (+)_1\}^3 (+)_1 \{(+)_2 (+)_1\}^2].$$

$$(22) \ldots u = 25.$$

$$t = -14 : T = [\{(+)_1 (+)_2^3\}^2 (+)_2 \{(+)_1 (+)_2^3\}];$$
$$t = -16 : T = [\{(+)_1 (+)_2\}^4 (+)_2 \{(+)_1 (+)_2\}^3].$$

$$(23) \ldots u = 26.$$

$$t = -15 : T = [\{(+)_1 (+)_2^2\} \{(+)_1 (+)_2^3\}^2 \{(+)_1 (+)_2^2\}].$$

$$(24) \ldots u = 27.$$

$$t = -16 : T = [\{(+)_1 (+)_2^2\}^5].$$

Auf Grundlage dieser und der folgenden Ergebnisse:

$$u = 2,\ t = +3 : z = -1,\ T = [(-)_1];$$
$$u = 3,\ t = +4 : z = -2,\ T = [(-)_1^2];$$
$$u = 4,\ t = +15 : z = -3,\ T = [(-)_3(-)_4^2];$$
$$u = 13,\ t = +5 : z = -12,\ T = [\{(-)_2(-)_3\}^2]$$

ist es zunächst möglich, auf inductivem Wege ein vollständiges Schema für jene Knotenverbindungen zu construiren, welche sich ergeben, wenn man die Axe des schneidenden Instrumentes entweder in 2, 3, 4, ... 14, 15, 16 Umläufen um ein beliebiges ganzes Vielfaches von 360° oder aber in beliebig vielen Umläufen um: $\pm 2\times 360°$, $\pm 3\times 360°$, ... $\pm 15\times 360°$, $\pm 16\times 360°$ dreht. Dieses Schema hat für $u = 2, 3, 4, \ldots 14, 15, 16$ und beliebige negative ganze Drehungszahlen t die nachstehende Gestalt:

(I) ... $u = 2,\ t = -(2k+\rho)$.

$$\rho = 1 : T = [(+)_k].$$

(II) ... $u = 3,\ t = -(3k+\rho)$.

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^2];\ \rho = 2 : T = [(+)_k(+)_{k+1}].$$

(III) ... $u = 4,\ t = -(4k+\rho)$.

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^3];\ \rho = 3 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^2].$$

(IV) ... $u = 5,\ t = -(5k+\rho)$.

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^4];\ \rho = 2 : T = [(+)_k^2(+)_{k+1}(+)_k];$$
$$\rho = 3 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^2];\ \rho = 4 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^3].$$

(V) ... $u = 6,\ t = -(6k+\rho)$.

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^5];\ \rho = 5 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^4].$$

(VI) ... $u = 7,\ t = -(7k+\rho)$.

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^6];\ \rho = 2 : T = [(+)_k^3(+)_{k+1}(+)_k^2];$$
$$\rho = 3 : T = [(+)_k^2\{(+)_{k+1}(+)_k\}^2];\ \rho = 4 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^3];$$
$$\rho = 5 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^2\}^2];\ \rho = 6 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^5].$$

$$(\text{VII}) \ldots . u = 8, \ t = -(8k+\rho).$$

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^1]; \ \rho = 3 : T = [\{(+)_k^2(+)_{k+1}\}^2(+)_k];$$

$$\rho = 5 : T = [(+)_k\{(+)_{k+1}(+)_k(+)_{k+1}\}^2];$$

$$\rho = 7 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^8].$$

$$(\text{VIII}) \ldots u = 9, \ t = -(9k+\rho).$$

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^8]; \ \rho = 2 : T = [(+)_k^1(+)_{k+1}(+)_k^7];$$

$$\rho = 4 : T = [(+)_k^2\{(+)_{k+1}(+)_k\}^3]; \ \rho = 5 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^4];$$

$$\rho = 7 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^2\}^2]; \ \rho = 8 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^1].$$

$$(\text{IX}) \ldots u = 10, \ t = -(10k+\rho).$$

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^9]; \ \rho = 3 : T = [(+)_k^3\{(+)_{k+1}(+)_k^5\}^2];$$

$$\rho = 7 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^2\}^3]; \ \rho = 9 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^8].$$

$$(\text{X}) \ldots u = 11, \ t = -(11k+\rho).$$

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^{10}]; \ \rho = 2 : T = [(+)_k^5(+)_{k+1}(+)_k^4];$$

$$\rho = 3 : T = [\{(+)_k^3(+)_{k+1}\}^2(+)_k^5];$$

$$\rho = 4 : T = [\{(+)_k^2(+)_{k+1}\}^3(+)_k];$$

$$\rho = 5 : T = [(+)_k^1\{(+)_{k+1}(+)_k\}^4]; \ \rho = 6 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^5];$$

$$\rho = 7 : T = [(+)_k\{(+)_{k+1}(+)_k(+)_{k+1}\}^3];$$

$$\rho = 8 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^2\}^2(+)_{k+1}\{(+)_k(+)_{k+1}^2\}];$$

$$\rho = 9 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^1\}^2]; \ \rho = 10 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^9].$$

$$(\text{XI})^* \ldots u = 12, \ t = -(12k+\rho).$$

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^{11}];$$

$$\rho = 5 : T = [(+)_k^1\{(+)_{k+1}(+)_k\}^2(+)_k\{(+)_{k+1}(+)_k\}^2];$$

$$\rho = 7 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^3(+)_{k+1}\{(+)_k(+)_{k+1}\}^2];$$

$$\rho = 11 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^{10}].$$

* Diese Gruppe von Specialisirungen der Grössen u und t ist die letzte, welche sich unter die, dem Erfahrungssatze IV beigegebenen symbolischen Relationen vollständig subsumiren lässt.

$$(\mathrm{XII})\ldots u = 13,\ t = -(13k+\rho).$$

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^{12}];\ \rho = 2 : T = [(+)_k^{6}(+)_{k+1}(+)_k^{5}];$$

$$\rho = 3 : T = [(+)_k^{4}\{(+)_{k+1}(+)_k^{2}\}^{2}];$$

$$\rho = 4 : T = [(+)_k^{3}\{(+)_{k+1}(+)_k^{2}\}^{3}];$$

$$\rho = 5 : T = [\{(+)_k^{2}(+)_{k+1}\}^{2}\{(+)_k(+)_{k+1}(+)_k\}^{2}];$$

$$\rho = 6 : T = [(+)_k^{2}\{(+)_{k+1}(+)_k\}^{5}];\ \rho = 7 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^{6}];$$

$$\rho = 8 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^{2}(+)_{k+1}(+)_k\{(+)_{k+1}(+)_k(+)_{k+1}\}^{2}];$$

$$\rho = 9 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^{2}\}^{4}];\ \rho = 10 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^{2}\}^{2}];$$

$$\rho = 11 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^{5}\}^{2}];\ \rho = 12 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^{11}].$$

$$(\mathrm{XIII})\ldots u = 14,\ t = -(14k+\rho).$$

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^{13}];\ \rho = 3 : T = [\{(+)_k^{4}(+)_{k+1}\}^{2}(+)_k^{3}];$$

$$\rho = 5 : T = [\{(+)_k^{2}(+)^{k}_{+1}\}^{4}(+)_k];$$

$$\rho = 9 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}\{(+)_k(+)_{k+1}^{2}\}^{3}\{(+)_k(+)_{k+1}\}];$$

$$\rho = 11 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^{3}\}^{2}(+)_{k+1}\{(+)_k(+)_{k+1}^{3}\}];$$

$$\rho = 13 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^{12}].$$

$$(\mathrm{XIV})\ldots u = 15,\ t = -(15k+\rho).$$

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^{14}];\ \rho = 2 : T = [(+)_k^{7}(+)_{k+1}(+)_k^{6}];$$

$$\rho = 4 : T = [\{(+)_k^{3}(+)_{k+1}\}^{3}(+)_k^{2}];$$

$$\rho = 7 : T = [(+)_k^{2}\{(+)_{k+1}(+)_k\}^{6}];\ \rho = 8 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^{7}];$$

$$\rho = 11 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^{2}\}\{(+)_k(+)_{k+1}^{3}\}^{2}\{(+)_k(+)_{k+1}^{2}\}];$$

$$\rho = 13 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^{6}\}^{2}];\ \rho = 14 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^{13}].$$

$$(\mathrm{XV})\ldots u = 16,\ t = -(16k+\rho).$$

$$\rho = 1 : T = [(+)_k^{15}];\ \rho = 3 : T = [(+)_k^{5}\{(+)_{k+1}(+)_k^{2}\}^{2}];$$

$$\rho = 5 : T = [(+)_k^{3}\{(+)_{k+1}(+)_k^{2}\}^{4}];$$

$$\rho = 7 : T = [(+)_k^{2}\{(+)_{k+1}(+)_k\}^{3}(+)_k\{(+)_{k+1}(+)_k\}^{3}];$$

$$\rho = 9 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^{4}(+)_{k+1}\{(+)_k(+)_{k+1}\}^{3}];$$

$$\rho = 11 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^{2}\}^{5}];\ \rho = 13 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^{4}\}^{3}];$$

$$\rho = 15 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^{15}].$$

Vertauscht man unter Beibehaltung sämmtlicher Zeichen die numerischen Werthe von t und u, so erhält man die Knoten-

verbindungen für jede beliebige ganze Umlaufszahl: u und eine Drehung um: $-2\times360°$, $-3\times360°$, ... $-15\times360°$, $-16\times360°$, während, wenn man unter Beibehaltung sämmtlicher numerischer Werthe und des Zeichens von ρ die übrigen Plus- und Minus-Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt, jene Knotenverbindungen dargestellt werden, welche einer Drehung um ein beliebiges positives ganzes Vielfaches von 360° in 2, 3, 4, .. 14, 15, 16 Umläufen, beziehungsweise einer Drehung um: $+2\times360°$, $+3\times360°$, ... $+15\times360°$, $+16\times360°$ in beliebig vielen Umläufen entsprechen.

Setzt man endlich in den für T aufgestellten symbolischen Relationen $k = 0$, so liefern dieselben gemäss den früher mitgetheilten Transformationsgleichungen jene Knotenverbindungen, welche derselben Substitution für k in den diesbezüglichen allgemeinen Zahlenformen von t entsprechen, aus welcher Thatsache die Giltigkeit des Schema's für alle mit der Bedeutung von t vereinbaren Werthe von k zu entnehmen ist.

Unsere auf empirischem Wege gewonnenen speciellen Ergebnisse berechtigen überdies zu folgenden Inductionsschlüssen, welche, insoferne ihre Ableitung sich vorläufig lediglich auf eine Reihe von Experimenten stützt, als mathematische Erfahrungssätze bezeichnet werden müssen:

I. Führt man durch einen unverdrehten, biegsamen Ring von kreisförmigem Querschnitte [1] einen in sich selbst zurücklaufenden Schnitt erster Art, so besitzt das hiedurch erhaltene, ringartig geschlossene Gebilde stets eine in Form von Überkreuzungen auftretende Verdrehung, welche bei positiver Axendrehung des schneidenden Instrumentes negativ, bei negativer Axendrehung desselben positiv ausfällt und ihrer absoluten Grösse nach durch das Produkt der um 1 verminderten Umlaufszahl: u des Schnittes in 360° bestimmt wird. Es ist also

[1] Es versteht sich von selbst, dass die hier ausgesprochenen Sätze ihre Giltigkeit nicht verlieren, wenn die aufeinanderfolgenden Querschnitte des Ringes von Ellipsen oder irgend welchen anderen geschlossenen Curven begrenzt werden. Ebensowenig braucht die Mittellinie des betreffenden Gebildes kreisförmig zu sein; es genügt vielmehr, wenn dieselbe ohne Verdrehung des letzteren in eine ebene geschlossene Curve transformirbar ist.

diese Verdrehung völlig unabhängig von dem jeweiligen Werthe der Drehungszahl: t.

II. Das durch den Schnitt erhaltene Gebilde ist nur für $t = \pm 1$ und $u \geqq 2$ knotenfrei, in allen übrigen Fällen jedoch mit einer Verschlingung versehen, welche bei positiver Axendrehung des schneidenden Instumentes als negative Knotenverbindung, bei negativer Axendrehung desselben als positive Knotenverbindung auftritt. Die jeweilige Ordnungszahl dieser Knotenverbindung wird erhalten, wenn man den absoluten Betrag der kleineren der beiden Zahlen u und t — er mag mit a bezeichnet werden — um zwei Einheiten vermindert, wonach die Knotenverbindungen, welche bei einer Drehung des Schnittes um $\pm t \times 360°$ in u—Umläufen, beziehungsweise bei einer Drehung um $\pm u \times 360°$ in t—Umläufen entstehen, eine und dieselbe Ordnungszahl: $a-2$ besitzen.

III. Die zwei hiebei erhaltenen positiven Knotenverbindungen $(a-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sind überdies von gleichem Typus und stehen zu den beiden, durch die erwähnten Schnitte hergestellten negativen Knotenverbindungen derselben Ordnung in dem Verhältnisse eines gegebenen Objektes zu dem Spiegelbilde seiner Rückseite. Ihre allgemeine Beschaffenheit lässt sich sofort präcisiren, wenn man — unter b den absoluten Betrag der grösseren der beiden Zahlen u und t verstanden — den unechten Bruch: $\frac{b}{a}$ als eine gemischte Zahl, d. h. in der Form:

$$\frac{b}{a} = k + \frac{\rho}{a}$$

darstellt. Es characterisirt nämlich die bei der Division von b durch a erhaltene ganze Zahl k die Arten, ferner der Divisionsrest im Vereine mit a die Anzahl der untereinander gleichen Knoten, indem jede der vier in Betracht gezogenen Knotenverbindungen $(a-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sich aus $a-\rho$ Knoten k^{ter} Art und $\rho-1$ Knoten $(k+1)^{\text{ter}}$ Art zusammensetzt. Hienach ist die Summe der Windungszahlen sämmtlicher Knoten:

$$k(a-\rho)+(k+1)(\rho-1)=b-k-1$$

von dem jeweiligen Werthe von a völlig unabhängig.

IV. Die einem bestimmten Werthe von a und sämmtlichen, der Bedingung $b>a$ Genüge leistenden Specialisirungen von b zugehörigen Knotenverbindungen $(a-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallen in so viele von einander verschiedene Gruppen, als die Zahlenreihe: 1, 2, 3, $\ldots a-2$, $a-1$ relative Primzahlen gegen a aufweist, d. h. es ist, wenn wir die in a ohne Rest aufgehenden Primzahlen der Reihe nach mit p_1, p_2, p_3, $\ldots p_s$ bezeichnen, für

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\ldots p_s^{\alpha_s}$$

allgemein:

$$Z=(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_s-1)p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\ldots p_s^{\alpha_s-1}$$

die Anzahl der auf a bezüglichen heterogenen Gruppen von Knotenverbindungen.

Um also deren Typen für irgend einen, willkürlich gewählten Werth von a vollständig zu beschreiben, hat man höchstens: $2(a-1)$ symbolische Gleichungen aufzustellen, von welchen sich die ersten $a-1$ Gleichungen auf negative, die übrigen auf positive Drehungszahlen beziehen. Da ferner die letzteren Gleichungen aus den ersteren unmittelbar durch Vertauschung des Zeichens $+$ mit $-$ hervorgehen, genügt von Fall zu Fall die Angabe des Schemas der Typengleichungen für negative Drehungszahlen, dessen allgemeiner Bau aus den nachstehenden symbolischen Relationen zu entnehmen ist:

$$\rho=1: T=[(+)_k^{a-1}];$$

$$\rho=2,\ a=2m+1: T=[(+)_k^m(+)_{k+1}(+)_k^{m-1}];$$

$$\rho=3,\ a=3m+1: T=[(+)_k^m\{(+)_{k+1}(+)_k^{m-1}\}^2];$$

$$\rho=3,\ a=3m+2: T=[\{(+)_k^m(+)_{k+1}\}^2(+)_k^{m-1}];$$

$$\rho=4,\ a=4m+1: T=[(+)_k^m\{(+)_{k+1}(+)_k^{m-1}\}^3];$$

$$\rho=4,\ a=4m+3: T=[\{(+)_k^m(+)_{k+1}\}^3(+)_k^{m-1}];$$

. . . .

$$\rho=\frac{a-2}{2}: T=[(+)_k^2\{(+)_{k+1}(+)_k\}^{\frac{a-4}{4}}(+)_k\{(+)_{k+1}(+)_k\}^{\frac{a-4}{4}}];$$

$$\rho = \frac{a-1}{2} : T = [(+)_k^2 \{(+)_{k+1}(+)_k\}^{\frac{a-3}{2}}];$$

$$\rho = \frac{a+1}{2} : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^{\frac{a-1}{2}}];$$

$$\rho = \frac{a+2}{2} : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}\}^{\frac{a}{4}}(+)_{k+1}\{(+)_k(+)_{k+1}\}^{\frac{a-4}{4}}];$$

. . . .

$$\rho = a-4,\ a = 4m+1 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^{m-1}\}^4];$$

$$\rho = a-4,\ a = 4m+3:$$

$$T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^{m-1}\}\{(+)_k(+)_{k+1}^{m}\}^2\{(+)_k(+)_{k+1}^{m-1}\}];$$

$$\rho = a-3,\ a = 3m+1 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^{m-1}\}^3];$$

$$\rho = a-3,\ a = 3m+2:$$

$$T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^{m-1}\}^2(+)_{k+1}\{(+)_k(+)_{k+1}^{m-1}\}];$$

$$\rho = a-2,\ a = 2m+1 : T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^{m-1}\}^2].$$

$$\rho = a-1 : T = [(+)_k(+)_{k+1}^{a-2}].$$

V. Was schliesslich die Anordnung der, eine gegebene Knotenverbindung $(a-2)^{\text{ter}}$ Ordnung constituirenden Knoten k^{ter} und $(k+1)^{\text{ter}}$ Art längs ihrer gemeinsamen Basis anbelangt, so ist dieselbe stets eine derartige, dass die symbolische Gleichung ihres Typus, wenn $k = 0$ gesetzt wird, eine in jene Knotenverbindung transformirbare Verschlingung characterisirt, welche bei einer Drehung des Schnittes um $a \times 360°$ in ρ-Umläufen erhalten wird. Während also die Anzahl und die Arten der Knoten durch die Zahlen a, k und ρ eindeutig bestimmt erscheinen, kommen bei der Characteristik ihrer Reihenfolge sämmtliche Nenner: $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \rho_s$ jenes Kettenbruches:

$$\cfrac{1}{\rho_1 + \cfrac{1}{\rho_2 + \ddots + \cfrac{1}{\rho_s}}}$$

in Betracht, in welchen sich der Quotient: $\frac{\rho}{a}$ von

Fall zu Fall verwandeln lässt, da die Exponenten in der jeweiligen Gleichung für T direct von $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \rho_s$ abhängen. — So ist unter Voraussetzung negativer Drehungszahlen beispielsweise für:

$$\rho_1 = m,\ \rho_2 = n,\ \rho_3 = \rho_4 = \ldots = \rho_s = \infty:$$
$$T = [(+)_k^m \{(+)_{k+1}(+)_k^{m-1}\}^{n-1}],$$

ferner für

$$\rho_1 = 1,\ \rho_2 = m,\ \rho_3 = n,\ \rho_4 = \ldots = \rho_s = \infty:$$
$$T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^m\}^n],$$
$$\rho_1 = m,\ \rho_2 = 1,\ \rho_3 = n,\ \rho_4 = \ldots \rho_s = \infty:$$
$$T = [\{(+)_k^m(+)_{k+1}\}^n(+)_k^{m-1}],$$

endlich für

$$\rho_1 = 1,\ \rho_2 = m,\ \rho_3 = 1,\ \rho_4 = n,\ \rho_5 = \ldots \rho_s = \infty:$$
$$T = [\{(+)_k(+)_{k+1}^m\}\{(+)_k(+)_{k+1}^{m+1}\}^{n-1}\{(+)_k(+)_{k+1}^m\}],$$

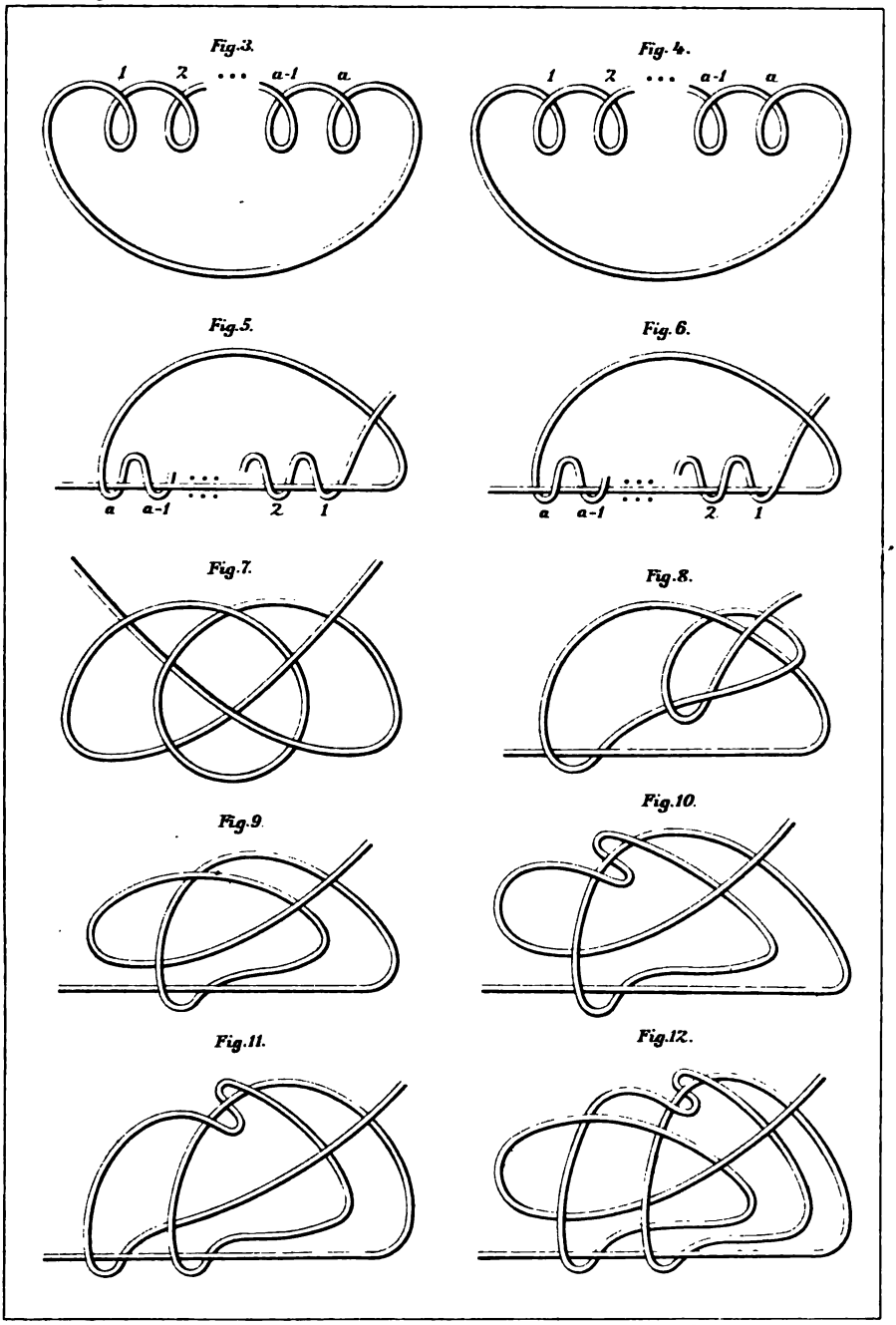
welche Relationen für beliebige positive ganze Werthe von m und n ihre Giltigkeit behaupten und daher die weitgehendsten Verallgemeinerungen vorstellen, welcher die in dem vorliegenden ersten Theile unserer Arbeit mitgetheilten empirischen Gleichungen für T ohne Hinzuziehung theoretischer Betrachtungen fähig sind.

Fig. 1.

Fig. 2.

Lichtdruck der k.k. Hof- u. Staatsdruckerei

Sitzungsb. d. kais. Akad. d. W. math. naturw. Classe LXXXV. Bd. II. Abth. 1882.



Autor del. F. Hesse lith. K.k. Hof- u. Staatsdruckerei

Sitzungsb. d. kais. Akad. d. W. math. naturw. Classe LXXXV. Bd. II. Abth. 1882.

Fig. 13.

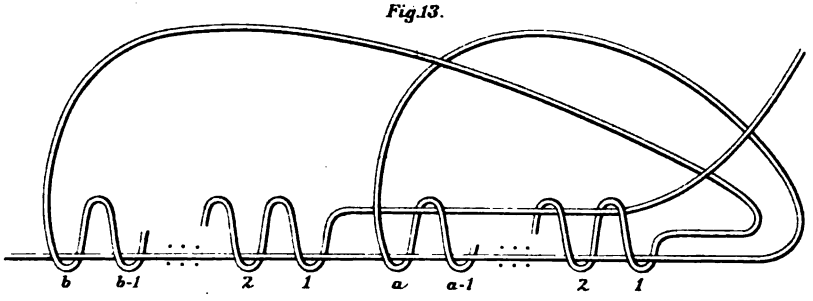


Fig. 14.

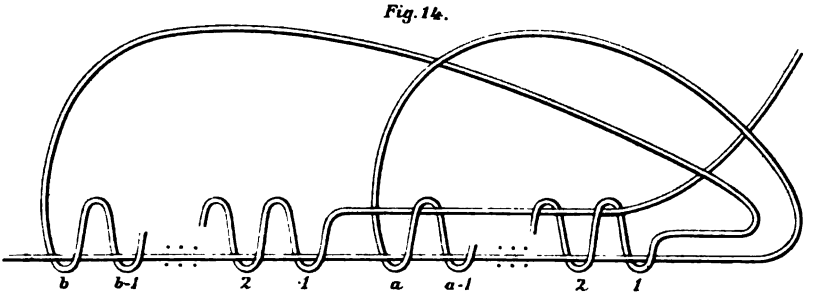


Fig. 15.

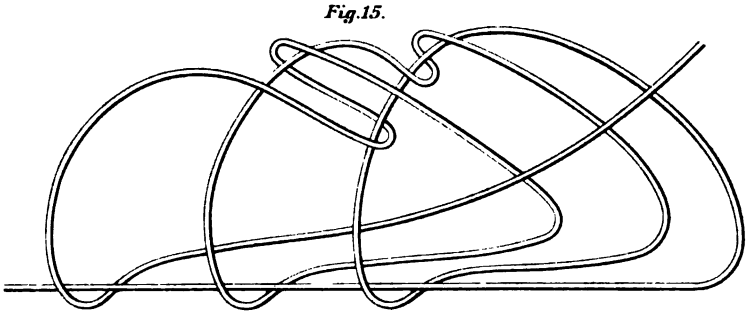
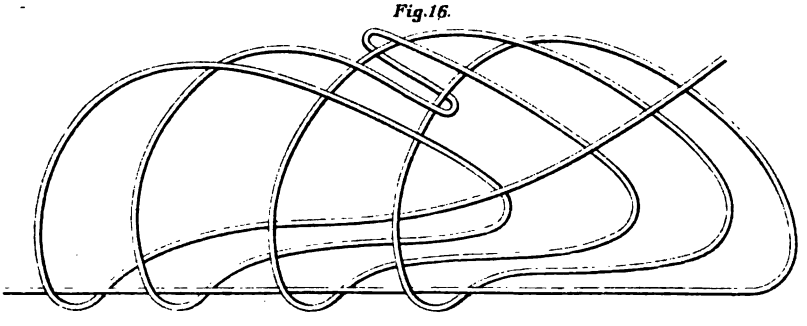
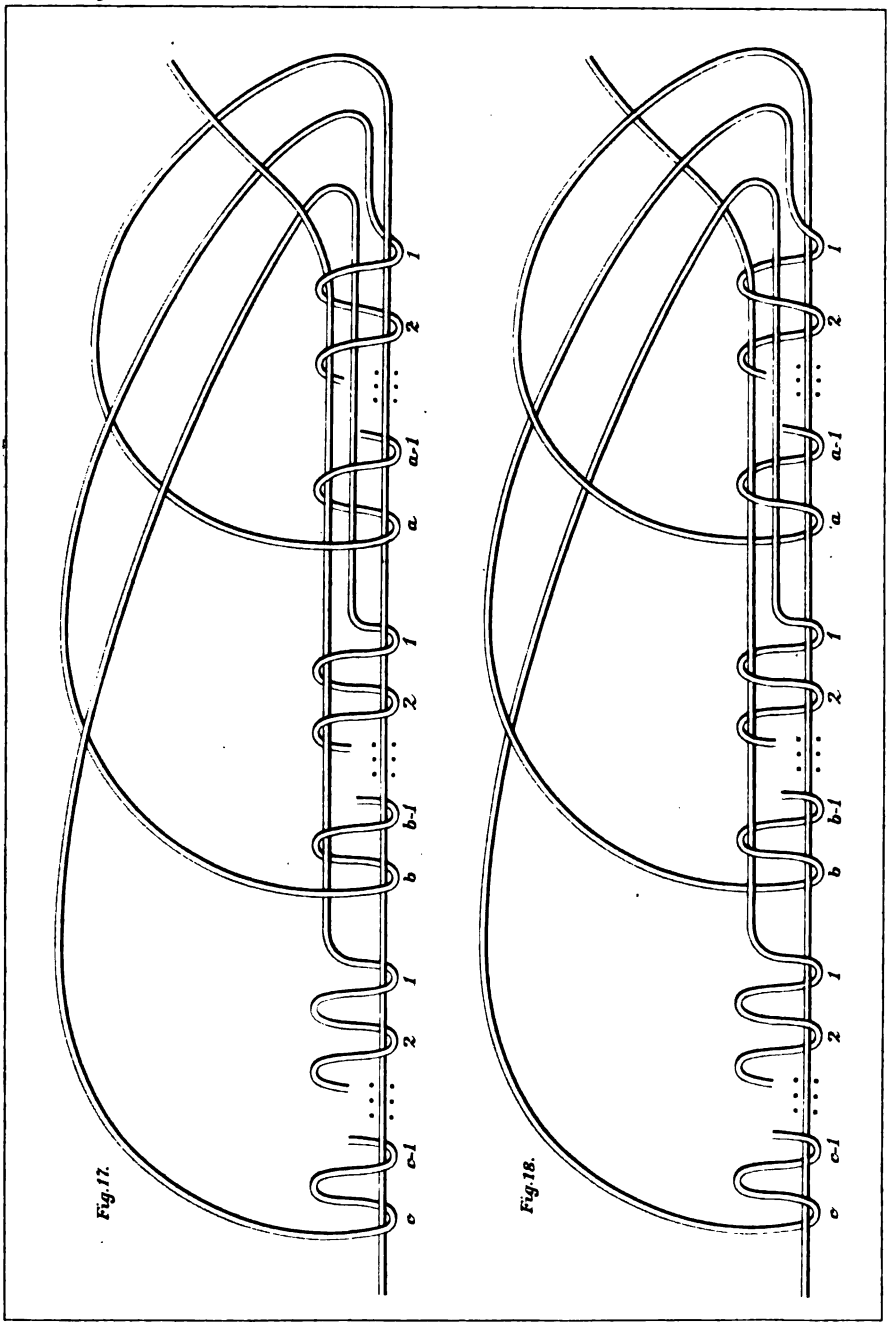


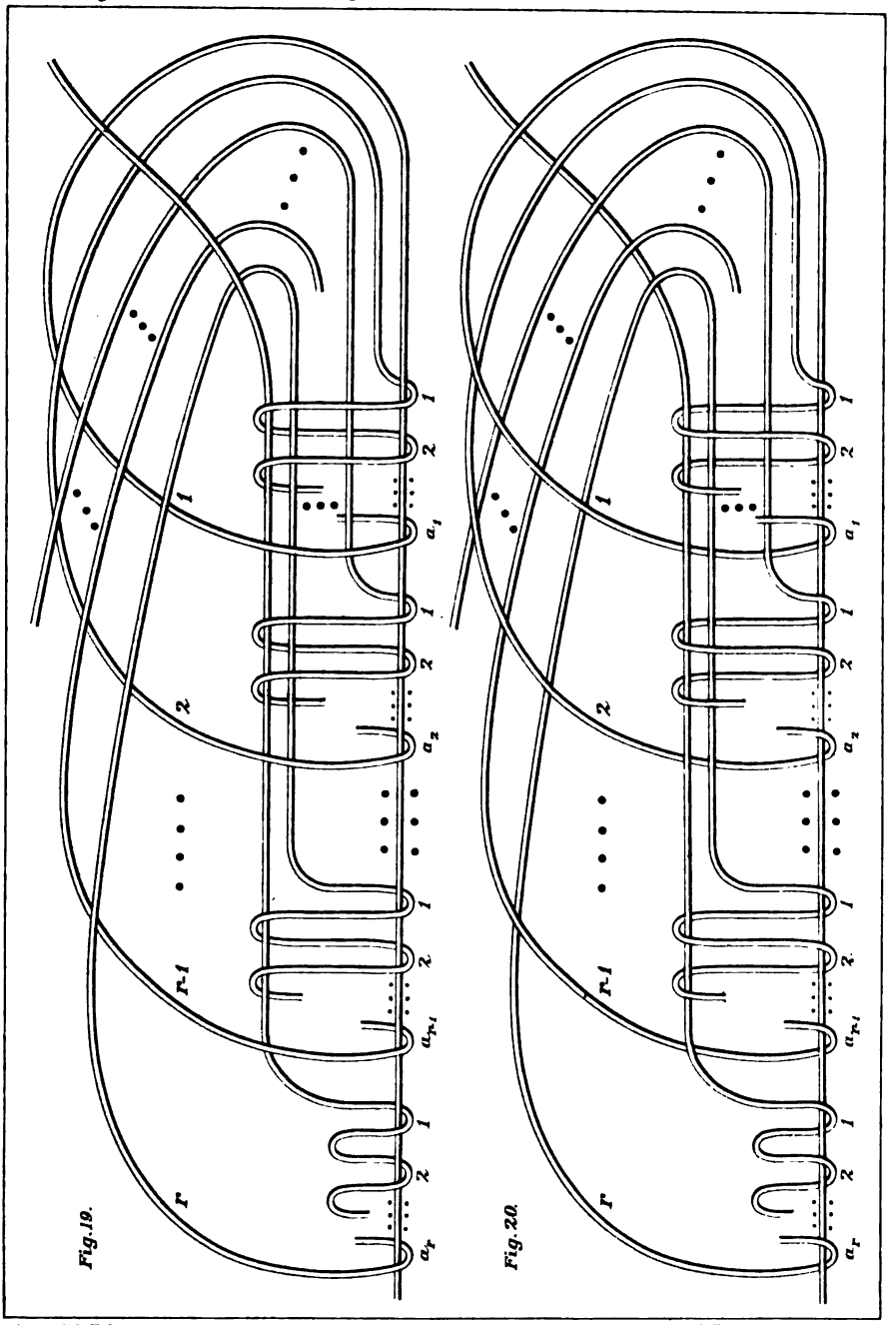
Fig. 16.



Autor del. F. Hesse lith. K.k. Hof- u. Staatsdruckerei
Sitzungsb. d. kais. Akad. d. W. math. naturw. Classe LXXXV. Bd. II. Abth. 1882.



Autor del. F. Hesse lith. K.k Hof- u. Staatsdruckerei



Autor del. F. Hesse lith. Kk. Hof- u. Staatsdruckerei.

Sitzungsb. d. kais. Akad. d. W. math. naturw. Classe LXXXV. Bd. II. Abth. 1882.

Über die Bahn der Loreley (165)

Von Dr. **Gustav Grass**,
Adjunct an der k. k. Sternwarte zu Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1882.)

Ich habe im LXXVI. Bande, Juli-Heft der Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften die Bahn der Loreley aus der ersten Opposition (1876) abgeleitet, und gebe nun die Fortsetzung der Bearbeitung dieses Planeten aus den bisherigen beobachteten Oppositionen.

Da die aus den wahrscheinlichsten Elementen der citirten Abhandlung abgeleitete Ephemeride für die zweite Opposition noch beträchtliche Abweichungen von den Betrachtungen zeigte, so leitete ich mir, um die Elemente den Beobachtungen der zweiten Opposition besser anzuschliessen, mittelst Betrachtung des Einflusses einer veränderten Annahme über $-\mu$ auf die Elemente folgendes, für die weitere Rechnung als Grundlage dienendes Elementensystem ab:

Epoche 1876 Sept. 23·5. mittl. Berl. Zt.

$$M = 44^\circ\ 40'\ 52''0$$
$$\pi = 277\ 55\ 31\cdot5 \quad \left.\right\} \text{ mittl.}$$
$$\Omega = 304\ 8\ 2\cdot9 \quad \left.\right\} \text{ Äquin. Ecl.}$$
$$i = 11\ 13\ 9\cdot3 \quad \left.\right\} \text{ 1880.0}$$
$$\varphi = 4\ 21\ 58\cdot0$$
$$\mu = 641''1515$$
$$\lg a = 0\cdot4953620.$$

Die Darstellung der ersten Opposition durch dieses System gestaltet sich wie folgt:

				Beob.—Rechn. $d\alpha \cos\delta$	Beob.—Rechn. $d\delta$
1876.	I	Aug.	12·5	+138″5	+73″4
	II	„	15·5	+144·4	+71·8
	III	„	21·5	+142·8	+67·9
	IV	Sept.	10·5	+128·8	+60·2
	V	„	21·5	+120·2	+53·8
	VI	Oct.	9·5	+102·6	+43·9
	VII	„	21·5	+ 94·9	+36·2.

Für die zweite Opposition finden sich folgende Unterschiede zwischen der Beobachtung und Rechnung (bei gehöriger Berücksichtigung der Störungen von Jupiter und Saturn):

			$d\alpha$	$d\delta$
1877 Oct.	9.	Pola	−12'62	−68'1
	9.	Berlin ...	−13·30	−64·3
	10.	„	−13·35	−66·2
	12.	„	−13.58	−68·9
Im Mittel	Oct. 9·0		−13·21	−66·9.

In der dritten Opposition wurde der Planet nur in Paris beobachtet und es ergaben sich folgende Unterschiede im Sinne Beobachtung—Rechnung:

			$d\alpha$	$d\delta$
1879 Jänner	15.	Paris ...	−5'42	+14'3
	20.	„	−5·60	+15·2
	21.	„	−5·34	+14·3
Im Mittel	Jänner 19·2		−5'45	+14'6.

In der vierten Opposition wurde der Planet in Berlin und Madrid beobachtet; die Madrider Beobachtungen sind bis jetzt noch nicht veröffentlicht. Die Berliner Beobachtungen ergaben:

		$d\alpha$	$d\delta$
1880 März	12·5	+36'14	−300'4
	13·5	+35·53	−302·9
	16·5	+35·36	−308·7
Im Mittel	März 14·2	+35'68	−304'0.

Beobachtungen aus der fünften Opposition (1881) sind mir bisher nicht bekannt geworden. Um die Fehler möglichst wegzuschaffen, wurden die Bedingungsgleichungen gesucht, die sich zwischen den Elememten und den geocentrischen Orten aufstellen lassen; es ergaben sich nebst den in der citirten Abhandlung angeführten 14 Bedingungsgleichungen[1] aus der ersten Opposition (in

[1] In der citirten Abhandlung sind einige nicht unwesentliche Druckfehler enthalten:

In den Bedingungsgleichungen Seite 6 Zeile 13 von oben statt 0·29379 lies 9·29379,
„ 3 von unten statt 9·71667 lies „ 9·71667,
„ 1 von „ statt 9·70570 lies „ 9·70570.

In den letzten Gliedern der Bedingungsgleichungen sind die Zeichen in die entgegengesetzten zu verwandeln.

welchen jedoch die letzten Glieder entsprechend den neuen Elementensysteme durch die Logarithmen der Zahlen: —138·5, —144·4, —142·8, —128·8, —120·2, —102·6, —94·9; —73·4, —71·8, —67·9, —60·2, —53·8, —43·9 und —36·2 zu ersetzen sind), folgende sechs weitere Bedingungsgleichungen:

$$\begin{array}{llll}
0{\cdot}08101\,dL' & +2{\cdot}69712\,d\mu & +_n0{\cdot}30029\,d\Phi' & +0{\cdot}17881\,d\Psi' \quad +_n9{\cdot}16224\,d\Omega'\sin i' \\
 & & & +_n9{\cdot}47874\,di' \quad +2{\cdot}22639 = 0 \\
0{\cdot}05971\,dL' & +2{\cdot}98213\,d\mu & +9{\cdot}88495\,d\Phi' & +0{\cdot}36313\,d\Psi' \quad +_n8{\cdot}97961\,d\Omega'\sin i' \\
 & & & +9{\cdot}55960\,di' \quad +1{\cdot}86788 = 0 \\
0{\cdot}09025\,dL' & +3{\cdot}19425\,d\mu & +0{\cdot}39500\,d\Phi' & +_n8{\cdot}43304\,d\Psi' \quad +9{\cdot}54635\,d\Omega'\sin i' \\
 & & & +_n9{\cdot}27748\,di' \quad +_n2{\cdot}71772 = 0 \\
9{\cdot}50124\,dL' & +2{\cdot}19131\,d\mu & +_n9{\cdot}67537\,d\Phi' & +9{\cdot}69414\,d\Psi' \quad +_n9{\cdot}93840\,d\Omega'\sin i' \\
 & & & +0{\cdot}02719\,di' \quad +1{\cdot}81543 = 0 \\
_n9{\cdot}59284\,dL' & +_n2{\cdot}51226\,d\mu & +_n9{\cdot}40272\,d\Phi' & +_n9{\cdot}89818\,d\Psi' \quad +9{\cdot}96787\,d\Omega'\sin i' \\
 & & & +0{\cdot}02582\,di' \quad +_n1{\cdot}16435 = 0 \\
_n9{\cdot}85616\,dL' & +_n2{\cdot}97173\,d\mu & +_n0{\cdot}15761\,d\Phi' & +9{\cdot}11168\,d\Psi' \quad +0{\cdot}14736\,d\Omega'\sin i' \\
 & & & +_n9{\cdot}51302\,di' \quad +_n2{\cdot}48287 = 0.
\end{array}$$

Die Bedingungsgleichungen vereinigen sich nach den bekannten Methoden in die folgenden Normalgleichungen,[1] wo $(d\mu) = 100\,d\mu$ ist:

$$\begin{array}{llll}
21{\cdot}9194\,dL' & +37{\cdot}5649\,(d\mu) & -21{\cdot}5714\,d\Phi' & -16{\cdot}8885\,d\Psi' \quad -5{\cdot}75870\,d\Omega'\sin i \\
 & & & -0{\cdot}04492\,di' = 2055{\cdot}10 \\
37{\cdot}5649\,dL' & +465{\cdot}6060\,(d\mu) & +60{\cdot}0100\,d\Phi' & +40{\cdot}7090\,d\Psi' \quad -13{\cdot}3773\,d\Omega'\sin i' \\
 & & & -0{\cdot}1642\,di' = 8660{\cdot}47 \\
-21{\cdot}5714\,dL' & +60{\cdot}0100\,(d\mu) & +47{\cdot}5262\,d\Phi' & +29{\cdot}4071\,d\Psi' \quad +5{\cdot}8154\,d\Omega'\sin i' \\
 & & & +0{\cdot}28042\,di' = -107{\cdot}55 \\
-16{\cdot}8885\,dL' & +40{\cdot}7090\,(d\mu) & +29{\cdot}4071\,d\Phi' & +36{\cdot}4425\,d\Psi' \quad +3{\cdot}47131\,d\Omega'\sin i' \\
 & & & -0{\cdot}10581\,di' = -2469{\cdot}34 \\
-5{\cdot}7587\,dL' & -13{\cdot}3773\,(d\mu) & +5{\cdot}8154\,d\Phi' & +3{\cdot}47131\,d\Psi' \quad +17{\cdot}16717\,d\Omega'\sin i \\
 & & & +3{\cdot}52805\,di' = -444{\cdot}00 \\
-0{\cdot}0449\,dL' & -0{\cdot}1642\,(d\mu) & +0{\cdot}2804\,d\Phi' & -0{\cdot}10581\,d\Psi' \quad +3{\cdot}52805\,d\Omega\sin i' \\
 & & & +4{\cdot}01064\,di' = -21{\cdot}612.
\end{array}$$

---

[1] Auch in den Normalgleichungen der citirten Abhandlung ist $(d\mu) = 100\,d\mu$; ferner ist in denselben Gleichungen:

Pag. 7, Zeile 9 von unten statt +1.08725 zu lesen —17·5101
„ 7 „ „ „ —1·60216 „ —64·2121
„ 5 „ „ „ —0·12022 „ —54·5964
„ 3 „ „ „ +8·53790 „ —10·0152
„ 1 „ „ „ —0·84273 „ — 1·3423.

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergeben sich folgende Correctionen der Elemente:

$$di' = -\ 17''226$$
$$d\Omega' \sin i' = +\ 7\cdot938$$
$$d\Psi' = -147\cdot92$$
$$d\Phi' = +\ 24\cdot741$$
$$d\mu = 0\cdot32566$$
$$dL' = -\ 49''614.$$

Bringt man diese Correctionen an die Äquatorelemente an und verwandelt sie nachher in Ekliptikelemente, so folgt aus dem bisherigen Beobachtungsmateriale folgendes wahrscheinlichstes Elementensystem:

Osculation u. Epoche 1876 Sept. 23·5
mittl. Berl. Zeit.

$$M = 45^\circ\ 11'\ 45''81$$
$$\pi = 277\ 23\ 45\cdot32$$
$$\Omega = 304\ 7\ 37\cdot73 \quad \text{Ecl. } 1880\cdot0$$
$$i = 11\ 12\ 50\cdot98$$
$$\varphi = 4\ 21\ 18\cdot57$$
$$\mu = 641''47716.$$

Die Darstellung der Oppositionen durch dieses System ist folgende:

				$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
I. Opposition	1876	Aug.	12·5	−3″3	−0″7
			15·5	+2·8	−1·0
			21·5	+2·4	−1·9
		Sept.	10·5	−1·5	+1·4
			21·5	−1·2	+1·4
		Oct.	9·5	−1·2	+1·3
			21·5	+0.9	−0·3.

				$d\alpha$	$d\delta$
II. Opposition	1877	Oct.	9·0....	−0″4	−0″8
III. „	1879	Jän.	19·0....	0·0	+1·2
IV. „	1880	März	14·0....	+1·6	−3 2.

Um den störenden Einfluss des Planeten Jupiter und Saturn zu ermitteln, wurden die Störungswerthe der Elemente durch Anwendung des Principes der Variation der Constanten ermittelt und

sind die Differentialquotienten in folgender Übersicht gegeben. Das mittlere Äquinoctium, auf welches sich die Störungen beziehen, ist das 1880.0; das angenommene Zeitintervall ist 60 Tage, als Osculationsepoche wurde gewählt 1876 September 23·5 mittlere Berliner Zeit.

Jupiter.

12h mittl. Berl. Zeit	$60\frac{di}{dt}$	$60\frac{d\Omega}{dt}$	$60\frac{\partial\varphi}{dt}$	$60\frac{\partial\pi}{dt}$	$3600\frac{\partial\mu}{\partial t}$	$60\frac{\partial M}{dt}$
1878 Juni 22	+0'06	—0'32	—10'59	123'1	—3'474	—134'5
Aug. 21	—0·10	+0·38	—11·00	105·6	—3·208	—118·5
Oct. 20	—0·31	+0·81	—11·18	88 4	—2·914	—102·8
Dec. 19	—0·55	+0·89	—11·03	72·8	—2·560	— 88·3
1879 Feb. 17	—0·80	+0·59	—10·73	59·3	—2·189	— 75·8
Apr. 18	—1·03	—0·10	—10·29	48·5	—1.786	— 65·7
Juni 17	—1·22	— 1·17	— 9·78	40·7	—1·356	—58·7
Aug. 16	—1·35	— 2·56	— 9·27	36·1	—0·900	—54·5
Oct. 15	—1·41	— 4·16	— 8·84	34·6	—0·417	—53·2
Dec. 14	—1·36	— 5·87	— 8·56	35·7	+0·089	—54·2
1880 Feb. 12	—1·22	— 7·53	— 8·49	39·0	+0·621	—57·2
Apr. 12	—0·98	— 9·01	— 8·70	43·0	+1·163	—60·6
*Juni 11	—0.66	—10·17	— 9·19	47·2	+1·704	—63·9
Aug. 10	—0·27	—10·86	—10·00	48·8	+2·254	—64·5
Oct. 9	+0·16	—11·00	—10·97	47·6	+2.784	—61·9
Dec. 8	+0·58	—10·54	—12·11	41·8	+3·285	—55·1
1881 Feb. 6	+0·98	— 9 50	—13·24	30.6	+3·731	—41·2
Apr. 7	+1.30	— 7·95	—14·21	14·4	+4·106	—22·9
Juni 6	+1·53	— 6·04	—14·86	— 6·0	+4·384	— 0·2
Aug. 5	+1·64	— 3·95	—15·05	—28·6	+4.545	+25·0
Oct. 4	+1·63	— 1·88	—14·72	—50·9	+4·569	+49·9
Dec. 3	+1·50	— 0.04	—13·88	—70·0	+4·446	+71·9
1882 Feb. 1	+1·28	+ 1·38	—12·64	—82·8	+4.166	+87·4
Apr. 2	+0·99	+ 2·25	—11·19	—87·3	+3·726	+94·7
Juni 1	+0·69	+ 2·52	— 9·78	—82·4	+3·133	+92·4
Juli 31	+0·40	+ 2·19	— 8·66	—67·7	+2·384	+80·2
Sept. 29	+0·10	+ 1·29	— 8·16	—43.4	+1·480	+58·0

Saturn.

12h mittl. Berl. Zeit	$60\frac{\partial i}{\partial t}$	$60\frac{\partial \Omega}{\partial t}$	$60\frac{\partial \varphi}{\partial t}$	$60\frac{\partial \pi}{\partial t}$	$3600\frac{\partial \mu}{\partial t}$	$60\frac{\partial M}{\partial t}$
1878 Juni 22	—0'02	+0'09	—0'36	— 3'5	—0'060	4'3
Aug. 21	—0·04	+0·14	—0·53	— 2·9	—0·122	3·6
Oct. 20	—0·06	+0·15	—0.66	— 3·0	—0·170	3·5
Dec. 19	—0·09	+0·12	—0·75	— 3·5	—0·205	3·8
1879 Feb. 17	—0·11	+0·05	—0·80	— 4·2	—0·225	4·3
Apr. 18	—0·12	—0·05	—0·81	— 4·9	—0·232	4.8
Juni 17	—0·13	—0·16	—0·78	— 5·5	—0.228	5·2
Aug. 16	—0·13	—0·29	—0·73	— 5·8	—0·212	5·3
Oct. 15	—0.13	—0·42	—0·65	— 5·8	—0·184	5·0
Dec. 14	—0·11	—0·55	—0·58	— 5·2	—0·147	4·3
1880 Feb. 12	—0·10	—0·62	—0·52	— 5·1	—0·119	4·2
Apr. 12	—0·08	—0·71	—0·48	— 3·8	—0·068	2·9
*Juni 11	—0·05	—0·78	—0·48	— 2·4	—0·012	1·4
Aug 10	—0·02	—0·80	—0·51	— 1·0	+0·047	0·0
Oct. 9	+0·01	—·.79	—0·57	+ 0·3	+0.106	— 1·3
Dec. 8	+0·04	—0·74	—0·66	+ 1·2	+0·163	— 2·0
1881 Feb. 6	+0·07	—0·64	—0·75	+ 1·5	+0·208	— 2·2
Apr. 7	+0·08	—0·52	—0·82	+ 1·3	+0·241	— 1·8
Juni 6	+0·09	—0·38	—0·85	+ 0·9	+0·256	— 1·0
Aug. 5	+0·09	—0·23	—0·83	+ 0·3	+0·249	— 0·2
Oct. 4	+0·08	—0·09	—0·74	+ 0.1	+0·217	+ 0·3
Dec. 3	+0·06	0·00	—0·59	+ 0·6	+0·159	0.0
1882 Feb. 1	+0·02	+0·02	—0·39	+ 2·2	+0·070	— 1·5
Apr. 2	—0·02	—0·04	—0·21	+ 5·3	—0·036	— 4·5
Juni 1	—0·06	—0·22	—0·05	+ 9·4	—0·159	— 8·6
Juli 31	—0·10	—0·53	+0·05	+14·4	—0·289	—13·7
Sept. 29	—0·14	—0·99	+0·13	20·4	—0·429	—19·7

Das Sternchen bedeutet, dass an dieser Stelle ein Wechsel der Elemete (Übertragung der Störungen auf die Elemente) stattgefunden hat.

Eine Integration obiger Störungsdifferentialquotienten bis 1882 August 30·5 ergab:

	Jupiter	Saturn
Δi	+ 0'01	— 1'49
$\Delta\Omega$	— 126·89	— 15·24
$\Delta\varphi$	— 334·76	— 11·38
$\Delta\pi$	+2033·40	—160·00
ΔM	—3453·00	+194·30
$\Delta\mu$	— 0·0364	+0·0289.

Bringt man diese Werthe an das wahrscheinlichste Elementensystem an, so erhält man für die Opposition im Jahre 1882 folgende:

Angewandte Elemente:

Epoche und Osculation 1882 Aug. 30·5 mittl. Berl. Zeit

$$M = 70^\circ\ 25'\ 28''1$$
$$\left.\begin{aligned} i &= 11\ 12\ 49\cdot5 \\ \Omega &= 304\ 5\ 15\cdot6 \\ \pi &= 277\ 54\ 58\cdot7 \\ \omega &= 333\ 49\ 43\cdot1 \end{aligned}\right\} \text{Ecl. } 1880.0$$
$$\varphi = 4\ 15\ 32\cdot43$$
$$\mu = 641''46966.$$

(165) Loreley 1882.

Oppositionsephemeride.

12^h mittl. Berl. Zeit	α (*app*)	δ (*app*)	log Δ	Aberrtzt.
1882 Sept. 3	$23^h\ 54^m\ 45''46$	$13^\circ\ 34'\ 47''7$	0·328800	$17^m\ 33^s$
4	54 2·18	34 2·3	0·327941	17 30
5	53 18·13	33 6·5	0·327137	17 28
6	52 33·40	32 0·2	0·326388	17 26
7	51 48·02	30 43·9	0·325695	17 24
8	51 2·07	29 17·6	0·325058	17 22
9	50 15·57	27 41·7	0·324475	17 21
10	49 28·68	25 56·1	0·323947	17 19
11	48 41·47	24 1·1	0·323474	17 18
12	47 53·93	21 56·8	0·323056	17 17
				17 16
13	47 6·13	19 43·6	0·322694	17 16
14	46 18·11	17 21·6	0·322389	17 15
15	45 29·87	14 51·1	0·322141	17 15
16	44 41·51	12 12·2	0·321949	17 15
17	43 53·09	9 25·2	0.321815	17 15
18	43 4·69	6 30·2	0·321739	17 14
19	42 16·31	3 27·6	0·321722	17 14
20	41 28·02	13 0 17·6	0·321762	17 14
21	40 39·86	12 57 0·4	0·321859	17 15
22	39 51·89	53 36·5	0·322015	17 15

12h mittl. Berl. Zeit		α (app)	δ (app)	log Δ	Aberrtzt.
1882	Sept. 23	23h 39m 4'14	13° 50' 6'2	0·322229	17 15
	24	38 16·66	46 29·3	0·322500	17 16
	25	37 29·50	41 46·7	0·322829	17 17
	26	36 42·75	38 58·3	0·323217	17 18
	27	35 56·52	35 4·5	0·323658	17 19
	28	35 10·53	31 5·6	0·324158	17 20
	29	34 25·16	27 2·1	0·324714	17 21
	30	33 40·36	22 54·1	0·325326	17 22
	Oct. 1	32 56.13	18 42·2	0·325995	17 24
	2	32 12·54	14 26·5	0·326720	17 26
	3	31 29·60	10 7·3	0·327498	17 28
	4	30 47·37	5 45·0	0·328384	17 30
	5	23h 30 5·94	12 1 19·9	0·329216	17 32

(165) ☍ ⊙ Sept. 18., Grösse 11.0.

Die mittlere Grösse des Planeten wurde aus den bisherigen Schätzungen gefunden

$$= 11.1 \pm 0·2.$$

Über Derivate und Constitution der Opiansäure und Hemipinsäure.

Von **Rudolf Wegscheider.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth.)

Durch die bisherigen Untersuchungen ist die Opiansäure als carboxylirter Dimethylprotocatechualdehyd, die Hemipinsäure als carboxylirte Dimethylprotocatechusäure erkannt worden.[1] Die ersten Schritte zum Nachweis dieser Constitution bildeten die Überführung der einbasischen Opiansäure in die zweibasische Hemipinsäure durch Oxydation[2] und das Entstehen von Mekonin und Hemipinsäure aus Opiansäure beim Erhitzen mit sehr starker Kalilauge,[3] welche beide Reactionen auf das Vorhandensein einer Aldehydgruppe in der Opiansäure hindeuteten, ferner die Abspaltung von Jod-, respective Chlormethyl bei der Einwirkung von Jod- oder Chlorwasserstoff auf Opiansäure und Hemipinsäure,[4] durch welche der Schluss auf das Vorhandensein zweier[5] Methoxyle gerechtfertigt wurde. Ein vollständiger Nachweis für die oben angegebene Constitution der beiden Säuren wurde aber

---

[1] Matthiessen und Foster, Ann. Chem. Pharm. Suppl. II. 381; Liebermann und Chojnacki, Berl. Ber. 1871, S. 196; Beckett und Wright, Jahresbericht für 1876, S. 808, 809.

[2] Wöhler, Ann. Pharm. L. 17; Blyth, Ann. Pharm. L. 44.

[3] Matthiessen und Foster, Ann. Chem. Pharm. Suppl. I. 332, Suppl. II. 381 (Hinweis auf die Analogie mit der Einwirkung der Kalilauge auf Benzaldehyd).

[4] Matthiessen und Foster, Ann. Chem. Pharm. Suppl. I. 333, Suppl. II. 378, Suppl. V. 333.

[5] Matthiessen und Foster haben die Einwirkung von Jodwasserstoff auf Hemipinsäure quantitativ durchgeführt; Ann. Chem. Pharm. Suppl. I. 333.

erst durch Beckett und Wright[1] erbracht, indem sie opiansaures Natron durch Glühen mit Natronkalk in Dimethylprotocatechualdehyd, freie Opiansäure durch Erhitzen mit rauchender Salzsäure in Vanillin, Hemipinsäure durch Schmelzen mit Kali in Protocatechusäure, durch Erhitzen mit concentrirter Salzsäure in Isovanillinsäure, endlich hemipinsaures Natron durch Erhitzen mit Natronkalk in Dimethylbrenzkatechin überführten. Die Thatsache, dass die Hemipinsäure leicht ein Anhydrid gibt,[2] macht es ferner sehr wahrscheinlich, dass die beiden Carboxyle in der Orthostellung zu einander sich befinden. Indirect wird die Orthostellung auch dadurch bewiesen, dass die einzige Formel, welche für eine carboxylirte Dimethylprotocatechusäure (respective Dimethylprotocatechualdehyd), in der die beiden Carboxyle (respective die Aldehyd- und Carboxylgruppe) nicht in der Orthostellung sich befinden, möglich ist, nämlich

$$C_6H_2\begin{cases}COOH\ (1)\\OCH_3\ (3)\\OCH_3\ (4)\\COOH\ (5)\end{cases}, \text{ respective } C_6H_2\begin{cases}COH\ (1)\\OCH_3\ (3)\\OCH_3\ (4)\\COOH\ (5)\end{cases},$$

der von Tiemann und Mendelssohn[3] dargestellten Isohemipinsäure (respective Isoopiansäure) zukommt.

Es blieben hiernach für Opiansäure und Hemipinsäure zwei Formeln möglich, zwischen denen Beckett und Wright eine Entscheidung nicht treffen konnten, nämlich für Opiansäure

$$C_6H_2\begin{cases}COH\ (1)\\OCH_3\ (3)\\OCH_3\ (4)\\COOH\ (6)\end{cases} \text{ oder } C_6H_2\begin{cases}COH\ (1)\\COOH\ (2)\\OCH_3\ (3)\\OCH_3\ (4)\end{cases},$$

für Hemipinsäure

$$C_6H_2\begin{cases}COOH\ (1)\\OCH_3\ (3)\\OCH_3\ (4)\\COOH\ (6)\end{cases} \text{ oder } C_6H_2\begin{cases}COOH\ (1)\\COOH\ (2)\\OCH_3\ (3)\\OCH_3\ (4)\end{cases}.$$

[1] Jahresbericht für 1876, S. 806 ff.

[2] Matthiessen und Wright, Annal. Chem. Pharm. Suppl. VII. 65.

[3] Berl. Ber. 1877, S. 393 ff.

Zur Erledigung der Stellungsfrage konnte der Umstand dienen, dass die Hemipinsäure, falls ihr die erste Formel zukommt, nur einen sauren Äther geben kann, während im Falle der Richtigkeit der zweiten Formel zwei isomere saure Äther zu erwarten waren. Ferner ist ersichtlich, dass die Hemipinsäure im einen Falle nur Derivate der Protocatechusäure, im andern dagegen auch Abkömmlinge der sechsten, noch unbekannten Dioxybenzoësäure liefern kann. Es schien nun denkbar, dass man durch Oxydation eines Opiansäureäthers einen sauren Hemipinsäureäther von der Formel

$$C_6H_2 \begin{cases} COOH\ (1) \\ COOX\ (2) \\ OCH_3\ (3) \\ OCH_3\ (4) \end{cases}$$

(wobei X ein Alkoholradical bedeutet) darstellen und aus diesem durch Abspaltung des freien Carboxyls zu den Derivaten der sechsten (1, 2, 3) Dioxybenzoësäure gelangen könnte. Von diesen Gesichtspunkten aus wurden auf Anrathen des Herrn Prof. v. Barth, dem ich sowohl für die Überlassung des verwendeten Narkotins, als auch für die während der Ausführung der Arbeit erhaltenen Rathschläge zu grösstem Danke verpflichtet bin, die nachfolgenden Versuche unternommen. Das Narkotin hatte Herr Prof. v. Barth durch gütige Vermittlung des Herrn Prof. Schorlemmer in Manchester von der bekannten Firma J. F. Macfarlan und Comp. in Edinburgh erhalten. Ich spreche daher sowohl Herrn Prof. Schorlemmer als auch den Herren Macfarlan und Comp. meinen herzlichsten Dank aus.

Die als Ausgangsmaterial dienende Opiansäure wurde, als die Oxydation des Narkotins mit Salpetersäure nach der Vorschrift von Anderson[1] ein unbefriedigendes Resultat gegeben hatte, nach Matthiessen und Foster mittelst Braunstein und Schwefelsäure dargestellt. Es wurden Portionen von 20 Grm. Narkotin in je 300 CC. Wasser und 17 CC. concentrirter Schwefelsäure gelöst und in die kochende Lösung portionenweise, aber sehr rasch 30 Grm. Braunstein eingetragen, filtrirt, erkalten

[1] Ann. Chem. Pharm. LXXXVI. 187.

gelassen, von der auskrystallisirenden Opiansäure filtrirt, dann zur Gewinnung des nicht herausgefallenen Theiles der Säure erschöpfend mit Äther ausgeschüttelt. Die färbenden Stoffe gehen nicht in den Äther und die beim Abdestilliren zurückbleibende Opiansäure ist weiss oder ganz schwach gelblich, so dass für die vollständige Reinigung das Umkrystallisiren aus Wasser allein völlig ausreicht. Nach dem Ausschütteln wurde mit Kalk neutralisirt und mit überschüssigem Natriumcarbonat alkalisch gemacht. Aus dem entstehenden Niederschlage lässt sich mittelst siedenden Alkohols etwas unverändertes Narkotin ausziehen. Die filtrirte Flüssigkeit wurde mit überschüssiger concentrirter Natronlauge gefällt. Das Cotarnin scheidet sich in gelben Nadeln ab. Die Ausbeute an Opiansäure betrug $49^1/_2\,\%$ des verbrauchten Narkotins ($98\,\%$ der theoretischen), an rohem Cotarnin $41^1/_4\,\%$ des Narkotins ($72\,\%$ der theoretischen).

Der Schmelzpunkt der Opiansäure wird in den meisten Lehrbüchern noch immer zu 140° angegeben, obwohl bereits Jörgensen[1] ihn bei $144^1/_2°$ und Liebermann und Chojnacki[2] bei 145° beobachtet haben.[3]

Ich habe an völlig reiner, durch Kochen mit Thierkohle und Umkrystallisiren aus Wasser bis zur Constanz des Schmelzpunktes dargestellter, in den auch von Prinz[4] beschriebenen langen, feinen, weissen, prachtvoll seidenglänzenden Nadeln krystallisirter Opiansäure den Schmelzpunkt zu 150° (wie alle folgenden Schmelzpunktsangaben uncorr.) gefunden. Die Reinheit der zur Schmelzpunktsbestimmung verwendeten Substanz wurde durch die Analyse erhärtet.

---

[1] Journal f. prakt. Chemie. N. F. II. 446.

[2] Ann. Chem. Pharm. CLXII. 323.

[3] Auch der Schmelzpunkt des Mekonins wird in den Lehrbüchern fälschlich zu 110° statt $102^1/_2°$ angegeben. Die getrocknete Hemipinsäure schmilzt unter Wasserabspaltung; der Schmelzpunkt ist sehr abhängig von der Schnelligkeit des Erhitzens. Ich habe zwischen 175° und 179° (uncorr). liegende Zahlen erhalten, während Beckett und Wright 182° (corr) angeben. Den Schmelzpunkt des durch Sublimiren der Hemipinsäure gewonnenen und durch mehrfaches Umsublimiren gereinigten Anhydrids habe ich zu 169° (uncorr.) beobachtet.

[4] Journal f. prakt. Chemie, N. F. XXIV. 356.

0·1956 Grm. Substanz gaben 0·4100 Grm. CO_2 und 0·0857 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_{10}O_5$
C....	57·17%	57·14%
H ...	4·87%	4·76%

Aus verdünnteren Lösungen krystallisirt die Opiansäure in derberen Nadeln und Prismen, im unreinen Zustand auch in kugeligen oder warzenförmigen Krystallaggregaten.

I. Salze und Methyläther der Opiansäure.

Zum Zwecke der Bereitung des Opiansäuremethyläthers mit Jodmethyl wurden das Kali- und Silbersalz dargestellt.

Das opiansaure Kali wurde durch genaues Absättigen einer wässerigen Lösung der Säure mit Kalilauge oder Kaliumcarbonat erhalten. Es ist in Wasser sehr leicht löslich und scheidet sich beim Abdampfen der Lösung, wenn man mit kleinen Mengen arbeitet, nicht eher aus, als bis das Ganze zu einem krystallinischen Kuchen erstarrt. Nur bei Verwendung grosser Mengen (etwa 100 Grm.) gelingt es, einen Theil des Salzes zum Auskrystallisiren zu bringen. Einmal erhielt ich es in prismatischen, im Exsiccator verwitternden Krystallkörnern und kurzen Prismen mit $3^1/_2$ Molekülen Krystallwasser, denen einige grössere spröde rhombische Platten beigemengt waren, ein zweites Mal in dünnen spröden Blättern mit $2^1/_2$ Molekülen Wasser.

0·2199 Grm. des in Körnern und Prismen krystallisirten, durch Auslesen von beigemengten Platten getrennten und zwischen Fliesspapier getrockneten opiansauren Kalis verloren bei 100° 0·0446 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_9KO_5 + 3^1/_2 aq.$
H_2O in % der lufttrockenen Substanz	20·28	20·26

0·2468 Grm. des in dünnen Blättern krystallisirten lufttrockenen opiansauren Kalis verloren im Exsiccator nach zehntägigem Stehen 0·0378 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_9KO_5+2^1/_2aq.$
H_2O in % der lufttrockenen Substanz	15·32	15·36

0·2090 Grm. der wasserfreien Substanz gaben 0·0725 Grm. K_2SO_4.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_9KO_5$
K ...	15·55%	15·73%

In absolutem Alkohol ist das Salz ziemlich schwer, in gewöhnlichem leicht löslich. Dampft man die mit Thierkohle gereinigte wässerige Lösung des Salzes zur Trockne ein und löst den Rückstand in wenig heissem Alkohol, so krystallisirt das Salz nach ein paar Stunden oder auch Tagen in zwei Modificationen aus, welche zur Analyse durch mechanische Sonderung getrennt wurden. Die eine bildet schöne, derbe, 1—$1^1/_2$ Mm. lange, weisse Prismen, welche ebensoviel Krystallwasser ($2^1/_2$ Moleküle) enthalten wie die aus wässeriger Lösung erhaltenen dünnen Blätter. Das Krystallwasser geht sehr langsam im Exsiccator, leicht bei 100° weg.

I. 0·4269 Grm. der lufttrockenen Substanz verloren bei 100° 0·0649 Grm. H_2O.

II. 0·3274 Grm. der lufttrockenen Substanz verloren beim sechzehntägigen Stehen im Exsiccator 0·0480 Grm. H_2O.

	Gefunden		Berechnet für $C_{10}H_9KO_5+2^1/_2aq.$
	I	II	
Wasserverlust in % ...	15·20	14·66	15·36

III. 0·3603 Grm. der wasserfreien Substanz gaben 0·1263 Grm. K_2SO_4.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_9KO_5$
K in %	15·71	15·73

Die zweite Modification bildet grosse, durchsichtige, schwach gelbliche, rhombische Platten mit abgestumpften Ecken, welche anscheinend dem triklinen System angehören. Eine Messung war nicht ausführbar, weil die Krystalle an der Luft sofort weiss und trüb werden. Sie enthalten 1 Molekül Krystallwasser.

0·1790 Grm. lufttrockene Substanz verloren nach dem Trocknen bei 110° 0·0122 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_9KO_5+aq.$
Wasserverlust in %	7·31	7·26

0·1636 Grm. der wasserfreien Substanz gaben 0·0568 Grm. K_2SO_4.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_9KO_5$
K in %	15·56	15·73

Beim raschen Auskrystallisiren des opiansauren Kalis aus heissen alkoholischen Lösungen erhält man Aggregate von ziemlich grossen Prismen und Blättchen, deren mechanische Trennung jedoch nicht ausführbar ist.

Opiansaures Silber wurde zuerst nach Wöhler[1] durch kurzes Kochen einer wässerigen Lösung von Opiansäure mit einem Überschuss von kohlensaurem Silber dargestellt. Es scheiden sich dabei schwarze Häute in geringer Menge ab, von denen filtrirt wurde. Aus dem Filtrat krystallisirten weisse Prismen, welche am Licht gelb werden. Das Filtrat wurde weiter eingedampft, wobei wieder Schwärzung eintrat. Ebenso bilden sich beim Umkrystallisiren von reinem opiansaurem Silber aus heissem Wasser schwarze Häute. Die folgenden Fractionen sind weiss, mit einem Stich ins Gelbgrüne und enthalten neben dem Salz auch noch freie Opiansäure, wie aus den Silberbestimmungen hervorgeht (gefunden 26·14, 22·90, 22·08% Ag). In der durch Zersetzung dieser unreinen Fractionen zurückgewonnenen Opiansäure liess sich etwas Hemipinsäure nachweisen. Das opiansaure Silber verwittert schon im Exsiccator. Die Analyse der ersten Fraction ergab folgendes Resultat.

I. 0·3557 Grm. lufttrockenes Silbersalz verloren bei 100° 0·0085 Grm. H_2O.

II. 0·4870 Grm. lufttrockenes Silbersalz verloren bei 100° 0·0151 Grm. H_2O.

---

[1] Ann. Pharm. L., 5.

	Gefunden		Berechnet für $C_{10}H_9AgO_5+{}^1/_2aq.$
	I	II	
Wasserverlust in %...	2·39	3·10	2·84

III. 0·3472 Grm. entwässertes Silbersalz lieferten 0·1188 Grm. metallisches Silber.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_9AgO_5$
Ag....	34·22%	34·07%

Da bei kurzem Kochen der Opiansäure mit Ag_2CO_3 keine vollständige Absättigung stattfindet, ein längeres Kochen aber wegen der eintretenden Silberabscheidung zu vermeiden war, musste für die Darstellung im Grossen eine Methode gesucht werden, welche das Salz durch Fällung in der Kälte liefert. Die Opiansäure musste ihrer Schwerlöslichkeit in Wasser halber als Kalisalz angewendet werden. Die Fällung mit Silbernitrat lieferte ein ungenügendes Resultat, indem beim Auswaschen zugleich mit dem KNO_3 auch der grössere Theil des Silbersalzes in Lösung gieng. Daher wurde nach dem Vorgang von Pfaundler[1] Fluorsilber angewendet. Einerseits wird dadurch die Anwendung einer concentrirteren Lösung möglich, alsodie Fällung vollständiger, andererseits ist zumWegwaschen des Fluorkaliums weniger Wasser nöthig als zu dem des KNO_3. Es wurde etwas mehr Ag_2CO_3, als der anzuwendenden Opiansäuremenge entsprach, in Flusssäure gelöst, der Überschuss derselben vollständig verjagt und dann die concentrirteren wässerigen Lösungen des Fluorsilbers und opiansauren Kalis vermischt. Es fällt sofort ein gelblicher, zäher, amorpher Niederschlag heraus, welcher beim Umrühren und Stehenlassen sich vermehrt und in halbkugelige oder warzenförmige Aggregate von kleinen Prismen übergeht. Nach einer Viertelstunde ist das Ganze zu einem Krystallbrei erstarrt. Nun wurde mit kaltem Wasser bis zur teigigen Consistenz verrieben, mit der Pumpe abgesaugt, mit kaltem Wasser gewaschen und scharf abgepresst. Man erhält so einen weissen Presskuchen, der sich am Licht bläulichgrau färbt.

---

[1] Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, math.-naturwissenschaftliche Classe, XLVI, 258; Jahresb. f. 1862, S. 88.

Die Darstellung des Opiansäuremethyläthers wurde zuerst in der Weise versucht, dass opiansaures Kali mit Jodmethyl und Alkohol in Röhren eingeschlossen wurde. Allein beim Erhitzen auf 100° erfolgt nur eine sehr unvollständige Umsetzung, bei 110—120° aber tritt bereits eine tiefgreifende Zersetzung ein. Beim Öffnen der Röhre zeigte sich Druck und die neben Jodkalium vorhandene dunkle Flüssigkeit liess während des Abfiltrirens noch absorbirtes Gas entweichen. Es wurde wiederholt abdestillirt und auskrystallisirendes Jodkalium beseitigt, schliesslich die auf ein sehr kleines Volumen gebrachte Flüssigkeit der freiwilligen Verdunstung überlassen. Es hinterblieb eine schwärzliche, von einzelnen Kryställchen durchsetzte, syrupöse Masse, welche beim Oxydiren mit einer wässerigen Lösung von Kaliumpermanganat ein rothes saures Harz mit der Eisenchloridreaction des Brenzkatechins, bei der trockenen Destillation weisse Nadeln gab. Da eine Reinigung des schwarzen Syrups nicht gelang, wurde die Hauptmasse desselben trocken destillirt. Das feste Destillat wurde durch Umkrystallisiren aus Weingeist und heissem Wasser, zuletzt unter Anwenduug von Thierkohle gereinigt. Man erhält so lanzettförmige Blätter oder dicke Prismen, beim raschen Auskrystallisiren kleine Nadeln. Der Körper schmilzt bei 109—110°, ist in der Kälte geruchlos, sublimirt bei 100° langsam unter Verbreitung eines sehr angenehmen vanilleähnlichen Geruches, reagirt neutral und gibt in wässeriger Lösung mit Eisenchlorid- oder Bleizuckerlösung keine Reaction. Er ist sehr leicht löslich in Alkohol, ziemlich leicht in heissem Wasser, schwer in kaltem, und lässt sich aus wässeriger Lösung mit Äther ausschütteln. Er krystallisirt wasserfrei.

0·1545 Grm. Substanz gaben 0·3580 Grm. CO_2 und 0·0770 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_8H_8O_3$
C	63·20%	63·16%
H	4·82%	5·26%

Die Analyse stimmt annähernd auf die Formel des Vanillins und es liegt vielleicht ein Isomeres desselben vor. Eine Wiederholung der Verbrennung wurde, so wünschenswerth sie auch

wegen des Deficits im Wasserstoff gewesen wäre, durch den Mangel an Material unmöglich gemacht. Ob der Körper mit dem von Tiemann und Will[1] angekündigten Isovanillin identisch ist, lässt sich wegen der Dürftigkeit der vorliegenden Angaben nicht entscheiden.

Die Darstellung des Opiansäuremethyläthers wurde ferner nach den für den Äthyläther benützten Methoden versucht. Einerseits wurde nach Anderson[2] in eine Lösung von opiansaurem Kali in Methylalkohol unter Erwärmen Chlorwasserstoffgas eingeleitet, bis die Flüssigkeit sich stark roth zu färben begann, wobei sich Chlorkalium ausschied, anderseits wurde nach Wöhler[3] Opiansäure mit Methylalkohol übergossen und unter Erwärmen SO_2 bis zur Sättigung eingeleitet. In beiden Fällen wurde ein Gemenge von Opiansäureäther mit unveränderter Opiansäure erhalten, für dessen Trennung sich keine brauchbare Methode auffinden liess.

Daher ist es weitaus am zweckmässigsten, die sehr glatte Einwirkung des Jodmethyls auf opiansaures Silber zur Darstellung des Methyläthers zu verwerthen. Feingepulvertes opiansaures Silber wird mit Methylalkohol übergossen, dann die berechnete Menge Jodmethyl hinzugefügt und umgeschüttelt. Es tritt beträchtliche Erwärmung ein (wenn man sehr wenig Methylalkohol angewendet hat, bis zum Sieden, so dass durch Einstellen in kaltes Wasser gekühlt werden muss) und statt des Silbersalzes scheidet sich gelbes Jodsilber aus. Es wird noch einige Zeit fleissig umgeschüttelt, über Nacht stehen gelassen, dann aufgekocht, filtrirt, mit Methylalkohol nachgewaschen und die Lösung sehr stark abdestillirt, schliesslich an der Luft verdunsten gelassen. Hat man so weit abdestillirt, dass der Methylalkohol nicht mehr hinreicht, um bei gewöhnlicher Temperatur den Opiansäureäther in Lösung zu erhalten, so scheidet sich entweder ein schweres Öl ab, oder die Flüssigkeit trübt sich milchig durch suspendirte feine Öltropfen. Die Krystallisation tritt in diesem Falle sofort beim

---

[1] Berl. Ber. XIV. 968.
[2] Ann. Chem. Pharm. LXXXVI. 193.
[3] Ann. Pharm. L., 6.

Übergiessen des Kolbeninhaltes in eine Schale ein. Ein kleiner Theil des Äthers bleibt beim Jodsilber und kann daraus durch Auskochen mit Alkohol gewonnen werden. Es wurden so aus der Opiansäure gegen 80% der theoretischen Menge an Methyläther erhalten. Derselbe bildet theils grosse, messbare, sechseckige Tafeln, theils rosettenförmig gruppirte Nadeln. Zur Befreiung von einer kleinen Menge noch anhaftender brauner Schmiere kann die partielle Krystallisation aus Alkohol dienen.

Der Opiansäuremethyläther ist leicht löslich in Methyl-, Äthyl- und Amylalkohol, Chloroform, Benzol, Toluol, Xylol, Eisessig und Essigäther; schwerer, aber auch noch ziemlich löslich in Äther und Schwefelkohlenstoff. Beim raschen Verdunsten seiner Lösung in Äthylalkohol oder Schwefelkohlenstoff erhält man ihn in feinen, zu baumförmigen Gebilden angeordneten Nadeln. Aus starkem Weingeist krystallisirt er in centimeterlangen, platten, schräg abgestutzten Nadeln, aus heissem Äther in messbaren glasglänzenden, vierseitigen, dicken Tafeln oder sehr kurzen, dicken, schiefen Prismen. Die aus Alkohol erhaltenen messbaren Tafeln sind bereits erwähnt worden. Herr Professor von Lang hat mich durch die Untersuchung dieser beiden Krystallisationen, ebenso wie durch die Ausführung aller noch zu erwähnenden Krystallmessungen, zu grossem Danke verpflichtet. Über die Krystalle des Opiansäuremethyläthers theilte er mir Folgendes mit:

Krystallsystem: Monosymmetrisch.

Elemente: $a : b : c = 0{\cdot}7302 : 1 : 2{\cdot}0356$.

$ac = 92° 6'$.

Die aus Alkohol erhaltenen Krystalle waren plattenförmig durch das Vorherrschen der Fläche 001, bei den aus Äther erhaltenen waren nebst dieser Fläche auch noch die Flächen 111 stärker entwickelt. Ausserdem wurden noch beobachtet die Flächen 110, 101 und 100.

Der Äther schmilzt bei 83—85° und bleibt, einmal geschmolzen, auch bei gewöhnlicher Temperatur lange Zeit flüssig. Der Schmelzpunkt ist übrigens nicht scharf. Schon bei 63° beginnt gewöhnlich die Substanz zu erweichen. Den verhältnissmässig schärfsten Schmelzpunkt zeigen die aus Äther oder Weingeist erhaltenen Krystalle. Beim vorsichtigen Erhitzen lässt sich der Opiansäureäther theilweise sublimiren.

Die Zusammensetzung wurde durch Verbrennung einer aus Methylalkohol auskrystallisirten und zwischen Fliesspapier abgepressten Probe ermittelt.

0·2277 Grm. Substanz gaben 0·4921 Grm. CO_2 und 0·1189 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_{11}H_{12}O_5$
C	58·94%	58·93%
H	5·80%	5·36%

Durch Kalilauge wird der Äther leicht verseift. In heissem Wasser ist er schwer, in kaltem fast unlöslich. Die wässerige Lösung reagirt anfangs neutral. Wird eine heisse Lösung rasch abgekühlt, so trübt sie sich zuerst milchig und erst später wird sie unter Abscheidung von Nadeln klar. Bei längerem Kochen mit Wasser wird der Äther verseift. Dass die Löslichkeit desselben in heissem Wasser, aber nicht lediglich auf der Verseifung beruht, sondern auch der Äther als solcher in Lösung geht, wurde an Proben, welche aus einer durch möglichst kurzes Erhitzen bereiteten wässerigen Lösung auskrystallisirten, sowohl durch den bei 83—85° gefundenen Schmelzpunkt, als auch durch die Analyse bewiesen.

0·2298 Grm. Substanz gaben 0·4916 Grm. CO_2 und 0·1152 Grm. H_2O.

		Berechnet für	
	Gefunden	$C_{11}H_{12}O_5$	$C_{10}H_{10}O_5$
C.....	58·34%	58·93%	57·14%
H	5·57%	5·36%	4·76%

Es schien wünschenswerth, dies ausdrücklich festzustellen, weil Wöhler[1] vom Opiansäureäthyläther angibt, er sei als solcher in Wasser unlöslich.

II. Saure Methyläther der Hemipinsäure; Constitution der Opiansäure und Hemipinsäure.

Die Oxydation des Opiansäureäthers zu saurem Hemipinsäureäther begegnet sehr bedeutenden Schwierigkeiten. Einmal

[1] Annal. Pharm. L. 6.

wird, mag man die Versuchsbedingungen wie immer modificiren, ein beträchtlicher Theil des angewendeten Oxydationsmittels nicht zur Oxydirung der Aldehydgruppe, sondern zur totalen Verbrennung eines Theiles der Substanz verwendet. Der Opiansäureäther gleicht, was die Beständigkeit der Aldehydgruppe betrifft, vollkommen der freien Opiansäure. Ich habe zur Darstellung von Hemipinsäure Opiansäure mit der berechneten Menge $K_2Cr_2O_7$ in stark schwefelsaurer Lösung bis zur vollständigen Reducirung des $K_2Cr_2O_7$ gekocht, aber dabei nicht einmal ein Drittel der angewendeten Opiansäure in der Form von Hemipinsäure, mehr als die Hälfte unverändert zurückerhalten. Ein sehr kleiner Theil nur wurde ganz verbrannt, was auch begreiflich ist, da die totale Verbrennung der Opiansäure zwanzig Mal mehr Sauerstoff erfordert, als die Überführung in Hemipinsäure.

Eine zweite Schwierigkeit liegt in der leichten Verseifbarkeit des Opiansäureäthers, welche bewirkt, dass im Reactionsproduct nicht nur unveränderter Äther und saurer Hemipinsäureäther, sondern auch Opiansäure und als deren Oxydationsproduct Hemipinsäure vorkommen. Hiedurch ist die Trennung der entstehenden Körper sehr erschwert, besonders da Opiansäure und saurer Hemipinsäureäther in ihren Löslichkeitsverhältnissen keine grossen Unterschiede darbieten.

Die Oxydation wurde zuerst mit Kaliumpermanganat in wässeriger Lösung versucht und genau nach der für die vollkommen analoge Oxydation des Isoopiansäuremethyläthers gegebenen Vorschrift von Tiemann und Mendelssohn[1] verfahren; allein hiebei entstand kein saurer Hemipinsäuremethyläther. Mehrere Oxydationsversuche mit Chromsäure in Eisessiglösung, mit Kaliumdichromat und Schwefelsäure, sowie mit Kaliumpermanganat in schwefelsaurer Lösung gaben nicht das gewünschte Resultat. Endlich führte die Variation der Versuchsbedingungen bei der Oxydation mit $KMnO_4$ in wässeriger Lösung zu der gesuchten Verbindung. Nach vielen Versuchen bin ich bei folgendem Verfahren stehen geblieben.

12 Grm. feingepulverter Opiansäuremethyläther (die Anwendung grösserer Portionen ist nicht vortheilhaft) wurden unter

[1] Berl. Ber. X. 398.

lebhaftem Umrühren mit 250 CC. Wasser in einer Porzellanschale auf 90° erwärmt und dann allmälig portionenweise unter stetem Umrühren mit einem Thermometer eine vorgewärmte Lösung von $6^1/_4$ Grm. $KMnO_4$ (etwas mehr als die berechnete Menge) in 100 CC. Wasser hinzugefügt. Während des Eingiessens der Kaliumpermanganatlösung wurde das Erhitzen unterbrochen. Sank die Temperatur unter 80°, so wurde die Eintragung des Oxydationsmittels sistirt und wieder auf 90—95° erhitzt. Das Eingiessen muss derart regulirt werden, dass keine starke Gasentwicklung bemerkbar wird. Die Abscheidung des MnO_2 erfolgt sofort nach dem Zusatz des $KMnO_4$. Die Reactionsflüssigkeit wird dann heiss filtrirt. Das MnO_2 wird auf Fliesspapier getrocknet und zur Gewinnung des darin enthaltenen Opiansäureäthers mit Alkohol ausgezogen. Das farblose Filtrat reagirt neutral, wie dies auch Tiemann und Mendelssohn[1] bei der Oxydation des Isoopiansäureäthers beobachtet haben, obwohl nach der Gleichung

$$3C_6H_2(OCH_3)_2(COOCH_3)(COH) + 2KMnO_4 =$$
$$= 2C_6H_2(OCH_3)_2(COOCH_3)(COOK) +$$
$$+ C_6H_2(OCH_3)_2(COOCH_3)(\mathbf{COOH}) + 2MnO_2 + H_2O$$

eine schwach saure Reaction zu erwarten wäre. Die Lösung trübt sich milchig beim Erkalten und scheidet dann, indem sie zugleich klar wird, flache Nadeln von Opiansäuremethyläther ab. Die hievon abfiltrirte Flüssigkeit wird sehr stark eingedampft, mit rauchender Salzsäure gefällt, filtrirt, mit Äther ausgeschüttelt, dann Salzsäurefällung und Ätherrückstand zusammen aus Wasser umkrystallisirt. Zuerst krystallisirt reiner saurer Hemipinsäuremethyläther, dann Gemenge desselben mit Opiansäure, schliesslich Opiansäure und Hemipinsäure. Die ausgeschüttelte Flüssigkeit wurde mit K_2CO_3 neutralisirt, zur Trockne verdampft und der Rückstand mit Alkohol ausgezogen; dieser nahm aber nur eine sehr kleine Menge einer rothen Schmiere auf.

Die Ausbeute ist sehr unsicher und abhängig von der Einhaltung des richtigen Tempos beim Eintragen des Kaliumpermanganats und vom fleissigen Umrühren. In gut geleiteten Operationen erhielt ich aus 12 Grm. Opiansäuremethyläther 4—$4^1/_2$ Grm. kyrstallisirten (wasserhaltigen) sauren Hemipinsäuremethyläther

[1] Berl. Ber. X. 398.

und daneben 4 Grm. unveränderten Opiansäureäther. Das Übrige erscheint zum grösseren Theile als Opiansäure, theilweise als Hemipinsäure. Nur ein geringer Theil wird ganz verbrannt. Zu bemerken ist noch, dass die Ursache der bei dieser Art des Operirens erhaltenen nicht ungünstigen Ausbeuten nicht lediglich in der dabei eingehaltenen Temperatur zu suchen ist, da ich einmal auch in einem bei circa 50° ausgeführten Versuch leidliche Resultate erhalten habe; das Hauptgewicht ist vielmehr auf die Art des Operirens zu legen.

Der durch Oxydation des Opiansäuremethyläthers erhaltene (α-) saure Hemipinsäuremethyläther (wie ich ihn zur Unterscheidung von seinem gleich zu beschreibenden Isomeren nennen will) bildet, aus Wasser krystallisirt, spröde, mehrere Millimeter lange, flache, schmale, glänzende Nadeln und schmilzt im Krystallwasser bei 96—98°, entwässert bei 121—122°. Er ist in heissem Wasser ziemlich, in kaltem sehr schwer löslich, leicht löslich in Alkohol, Äther, Benzol, Chloroform, Eisessig, Amylalkohol und besonders in Essigäther, sehr schwer löslich in Schwefelkohlenstoff, fast unlöslich in siedendem Petroläther. Aus Benzol wurden messbare Krystalle erhalten, über welche Herr Professor v. Lang Folgendes mittheilt:

Krystallsystem: Asymmetrisch.

Elemente: $a : b : c = 1{\cdot}0052 : 1 : 1{\cdot}1325$

$\xi = 112°26'$

$\eta = 100°32'$

$\zeta = 90°16'$.

Vorherrschend sind die Flächen 100 mit 110 und 101; ferner wurden beobachtet die Flächen $\bar{1}01$, 010, $\bar{1}10$ und noch einige untergeordnetere.

Die wässerige Lösung reagirt schwach sauer und gibt mit $FeCl_3$ einen hellgelbbraunen Niederschlag, wird dagegen durch Bleizucker, $AgNO_3$, $BaCl_2$, $FeSO_4$ oder $CuSO_4$ nicht verändert. Der Körper ist eine schwache Säure; beim Versetzen der wässerigen Lösung mit Kaliumcarbonat wurde Gasentwicklung beobachtet. Der Äther wird durch Kalilauge leicht verseift. Die Identität der erhaltenen Säure mit Hemipinsäure wurde durch Schmelzpunkt und Reactionen sichergestellt. Sie gibt nämlich so wie die aus Opiansäure dargestellte Hemipinsäure mit Eisenchlorid

einen hellgelbbraunen Niederschlag, mit Bleizuckerlösung eine weisse Fällung, welche sich im Überschuss des Reagens leicht löst und beim Kochen aus dieser Lösung wieder herausfällt; mit salpetersaurem Silber entsteht in der Kälte kein Niederschlag; kocht man aber, so fällt entweder sofort, oder nach dem Erkalten ein schweres, weisses Krystallpulver aus.

Der (α-)saure Hemipinsäuremethyläther verwittert schon im Exsiccator; zur Verbrennung wurde er bei 100° getrocknet.

I. 0·2152 Grm. lufttrockener Substanz verloren bei 100° 0·0163 Grm. Wasser. Die so erhaltene wasserfreie Substanz (0·1989 Grm.) lieferte 0·4018 Grm. CO_2 und 0·0925 Grm. H_2O.

II. 0·2832 Grm. lufttrockener Substanz verloren bei 100° 0·0213 Grm. Wasser.

III. 0·2050 Grm. lufttrockener Substanz verloren bei 100° 0·0150 Grm. Wasser.

IV. 0·5495 Grm. lufttrockener Substanz verloren bei 100° 0·0535 Grm. Wasser.

0·2287 Grm. wasserfreie Substanz gaben 0·4566 Grm. CO_2 und 0·1002 Grm. H_2O.

Die Analysen I bis III wurden mit aus heissem Wasser auskrystallisirten Proben, IV mit einer langsam aus einer Benzollösung abgeschiedenen, nicht ganz aschefreien ausgeführt.

	Gefunden			Berechnet für $C_{11}H_{12}O_6+1aq.$
	I	II	III	
Wasserverlust in %	7·57	7·52	7·32	6·98

	Gefunden	Berechnet für $C_{11}H_{12}O_6+1^1/_2 aq.$
	IV	
Wasserverlust in %	9·74	10·11

	Gefunden		Berechnet für $C_{11}H_{12}O_6$
	I	IV	
C	55·09%	54·55%	55·00%
H	5·17%	4·87%	5·00%.

Zur Vervollständigung des Beweises dafür, dass der vorliegende Körper ein saurer Hemipinsäuremethyläther war, wurde ein Salz dargestellt. Da Anderson[1] bei der Darstellung von

[1] Ann. Chem. Pharm. LXXXVI. 196.

Salzen des von ihm beschriebenen sauren Hemipinsäureäthyläthers auf Schwierigkeiten gestossen war, schien es geboten, die Einwirkung von überschüssigen Alkalien auf die Äthersäure zu vermeiden. Sie wurde daher mit etwas weniger als der theoretischen Menge Na_2CO_3 zusammen unter Erwärmen in Wasser gelöst, die erkaltete Lösung zur Entfernung des kleinen Überschusses an saurem Hemipinsäureäther mit Äther ausgeschüttelt und dann am Wasserbad sehr stark eingedampft.

Da nichts auskrystallisirte, wurde die Lösung über Schwefelsäure gestellt, wobei sie zunächst zu einem Syrup, dann zu einer gummiähnlichen Masse eintrocknete. Übergiesst man diese mit Alkohol, so wird sie weiss und löst sich. Die alkoholische Lösung wurde wieder in den Exsiccator gebracht. Sie dickte zu einem Syrup ein und erstarrte endlich, indem sich ein weisser krystallinischer Kuchen bildete. Erhitzt man das so erhaltene Natriumsalz des (α-)sauren Hemipinsäuremethyläthers (α-Methylnatriumhemipinat) im Capillarrohr, so zeigt es erst über 200° Anzeichen von Zersetzung, indem es sich dunkel färbt. Die wässerige Lösung gibt Niederschläge mit Eisenchlorid und Bleizucker, in concentrirter Lösung auch mit Silbernitrat. Der Bleiniederschlag ist im Überschuss des Fällungsmittels leicht löslich.

Das durch Verdunsten der alkoholischen Lösung über Schwefelsäure erhaltene Methylnatriumhemipinat enthält noch Wasser, welches erst bei 100° vollständig entweicht.

0·3901 Grm. des im Exsiccator bis zur Gewichtsconstanz getrockneten Salzes verloren bei 100° noch 0·0177 Grm. Wasser. Die so erhaltene wasserfreie Substanz (0·3724 Grm.) lieferte 0·1061 Grm. Na_2SO_4

	Gefunden	Berechnet[1] für $C_{11}H_{11}NaO_6$		
		$+\frac{1}{2}$aq.	$+\frac{2}{3}$aq.	+aq.
Wasserverlust in % des exsiccatortrockenen Salzes	4·54	3·32	4·38	6·43

[1] Auf die Wasserbestimmung kann kein Werth gelegt werden, da sich nicht feststellen liess, in welchem Moment das mechanisch beigemengte Lösungsmittel vollständig verdunstet war und das Krystallwasser zu entweichen begann.

	Gefunden	Berechnet für $C_{11}H_{11}NaO_6$
Na in % des wasserfreien Salzes	9·24	8·78

Anderson[1] hatte durch Einleiten von Chlorwasserstoffgas in die Lösung von Hemipinsäure in absolutem Alkohol einen sauren Hemipinsäureäthyläther erhalten. Es war nun von hohem Interesse, die analoge Reaction mit Methylalkohol zu studiren. Entstand dabei ein mit dem (α-)sauren Hemipinsäuremethyläther isomerer Äther, so war dies für die Constitution der Hemipinsäure entscheidend; entstand dagegen derselbe Äther, so konnte zwar auf die Constitution der Hemipinsäure nichts geschlossen werden, wohl aber war der sehr weitläufige und unsichere Weg der Darstellung dieses Äthers aus Opiansäure, respective deren Äther, umgangen.

In die Lösung von 5 Grm. Hemipinsäure in absolutem Methylalkohol wurde unter Erwärmen Chlorwasserstoffgas eingeleitet, bis die Flüssigkeit sich roth zu färben begann, dann ein grosser Theil des Alkohols abdestillirt, und, da nichts auskrystallisirte, bis zum Eintritt einer Trübung mit Wasser verdünnt. Es fiel ein braunes Harz aus, welches abfiltrirt wurde. Die Lösung wurde eingedampft und krystallisiren gelassen. Es schied sich ein Öl ab, welches später erstarrte, daneben auch warzenförmig gruppirte Nadeln. Durch Umkrystallisiren aus Äther liess sich die Substanz leicht reinigen.

Sie schmilzt bei 137—138°, ist leicht löslich in Wasser, Methyl-, Äthyl- und Amylalkohol, Äther, Benzol, Chloroform, Eisessig, Essigäther und heissem Xylol (krystallisirt daraus beim Erkalten), schwer löslich in Schwefelkohlenstoff, fast unlöslich in Petroläther. Beim Verdunsten der in einer Eprouvette befindlichen Lösungen der Substanz in Eisessig oder Essigäther ziehen sich an den Glaswänden moosartige Gebilde hinauf, aus den Lösungen in Äthylalkohol und Benzol eisblumenartig verzweigte, krumme Nadeln. Aus Alkohol erhält man daneben sternförmig gruppirte Prismen, aus Benzol Platten. Aus Chloroform wurden grössere Krystalle erhalten. Herr Prof. v. Lang schreibt darüber:

[1] Ann. Chem. Pharm. LXXXVI. 195.

Krystallsystem: Rhombisch.

Elemente: $a : b : c = 0 \cdot 6248 : 1 : 0 \cdot 7581$.

Da sämmtliche Flächen (100, 010, 110, 011) abgerundet waren, konnte das Krystallsystem nur näherungsweise ermittelt werden, doch scheint auch das optische Verhalten für das rhombische System zu sprechen.

Die wässerige Lösung des Körpers reagirt schwach sauer und gibt weder mit Eisenchlorid, noch mit Bleizucker einen Niederschlag.

Die Substanz krystallisirt wasserfrei.

0·2563 Grm. Substanz gaben 0·5177 Grm. CO_2 und 0·1161 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_{11}H_{12}O_6$
C.....	55·09%	55·00%
H.....	5·03%	5·00%

Es liegt also ein saurer Hemipinsäuremethyläther vor, welcher sich durch Krystallform, Schmelzpunkt, Leichtlöslichkeit in Wasser, den Mangel eines Niederschlages mit Eisenchlorid und des Krystallwassers scharf von dem aus Opiansäureäther erhaltenen unterscheidet und daher mit diesem isomer ist. Er mag (β-)saurer Hemipinsäuremethyläther heissen.

Bemerkenswerth ist, dass der von Anderson[1] durch Einleiten von Chlorwasserstoffgas in die äthylalkoholische Lösung der Hemipinsäure erhaltene saure Äthyläther nach seinen Eigenschaften nicht dem auf analoge Weise entstandenen Methyläther, sondern dem aus Opiansäureäther erhaltenen entspricht. Beide sind schwer löslich in Wasser, geben mit Eisenchlorid einen Niederschlag und enthalten Krystallwasser, so dass in ihnen wohl die gleiche Stellung der Alkoholradicale angenommen werden darf. Es scheint also die Einwirkung des Chlorwasserstoffs auf die methyl- und äthylalkoholische Lösung von Hemipinsäure nicht analog zu verlaufen.

---

[1] Ann. Chem. Pharm. LXXXVI. 195.

Aus der Existenz zweier isomerer saurer Hemipinsäuremethyläther folgt nach den eingangs gegebenen Auseinandersetzungen für die Hemipinsäure die Constitutionsformel

$$C_6H_2\begin{cases}COOH\ (1)\\COOH\ (2)\\OCH_3\ (3)\\OCH_3\ (4)\end{cases},$$

für die Opiansäure

$$C_6H_2\begin{cases}COH\ (1)\\COOH\ (2)\\OCH_3\ (3)\\OCH_3\ (4)\end{cases},$$

für den durch Oxydation des Opiansäuremethyläthers

$$C_6H_2\begin{cases}COH\ (1)\\COOCH_3(2)\\OCH_3\ (3)\\OCH_3\ (4)\end{cases}$$

erhaltenen (α-)sauren Hemipinsäuremethyläther

$$C_6H_2\begin{cases}COOH\ (1)\\COOCH_3(2)\\OCH_3\ (3)\\OCH_3\ (4)\end{cases},$$

endlich für den (β-)sauren Hemipinsäuremethyläther

$$C_6H_2\begin{cases}COOCH_3(1)\\COOH\ (2)\\OCH_3\ (3)\\OCH_3\ (4)\end{cases}.$$

III. Zersetzung der beiden sauren Hemipinsäuremethyläther beim Erhitzen für sich.

In der Erwartung, aus dem (α-)sauren Hemipinsäuremethyläther durch Abspaltung des freien (in der Protocatechusäure-

stellung befindlichen) Carboxyls den Methyläther der von der sechsten, noch unbekannten Dioxybenzoësäure abstammenden Dimethyldioxybenzoësäure zu bekommen, wurde entwässerter Äther in einer tubulirten Retorte im Kohlensäurestrom mittelst eines Ölbades durch zwei Stunden auf 200—220° erhitzt. Bis auf eine geringe kohlige Abscheidung sublimirte alles unter Gasentwicklung vom Boden der Retorte weg in den Hals. Nur ein ganz minimaler Theil verflüchtigte sich bis in die Vorlage. Dieser schmolz bei 78—81° und zeigte einen entfernt an Umbelliferon erinnernden Geruch. An eine Untersuchung war wegen der geringen Menge nicht zu denken. Der Retorteninhalt wurde mit Alkohol herausgeschwemmt, durch Kochen in Lösung gebracht,[1] von der Kohle filtrirt, die Lösung stark abdestillirt und über Schwefelsäure zur Trockne gebracht. Der weisse Rückstand wurde mit Benzol ausgekocht und das Ungelöste durch neuerliches Auskochen mit Benzol und schliesslich Xylol gereinigt. So erhielt man ein weisses Pulver, welches bei 177—178° unter Aufschäumen schmolz und, über den Schmelzpunkt erhitzt, ein aus Nadeln bestehendes, bei 166° schmelzendes Sublimat (Hemipinsäureanhydrid) lieferte. Die wässerige Lösung reagirte sauer und gab mit Eisenchlorid, Bleizucker und Silbernitrat alle Reactionen der Hemipinsäure.

---

[1] Beiläufig sei bemerkt, dass mit dem bei den ersten, nicht im gewünschten Sinne verlaufenen Oxydationen des Opiansäuremethyläthers erhaltenen Gemenge von Opiansäure, Hemipinsäure und unverändertem Opiansäureäther, dessen Natur damals noch nicht aufgeklärt war, derselbe Versuch (Erhitzen auf 180—190°) als Vorversuch gemacht wurde. Man erhielt damals unter anderem einen in Alkohol schwer löslichen Körper, der über 200° schmolz und nach der Analyse wahrscheinlich das von Matthiessen und Wright (Ann. Chem. Pharm. Suppl. VII, 65) beschriebene, beim Erhitzen über den Schmelzpunkt entstehende Condensationsproduct der Opiansäure $C_{40}H_{38}O_{19}$ ist.

0·1903 Grm. Substanz gaben 0·4095 CO_2 und 0·0854 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_{40}H_{38}O_{19}$
C	58·69%	58·39%
H	4·99%	4·62.%

Ich beabsichtige, das Condensationsproduct der Opiansäure näher zu untersuchen.

Es lag also wasserfreie Hemipinsäure vor, was auch durch die Analyse bestätigt wurde.

0·2165 Grm. Substanz gaben 0·4190 Grm. CO_2 und 0·0880 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_{10}O_6$
C.....	52·78%	53·10%
H	4·52%	4·42%.

Da die Hemipinsäure nicht unzersetzt sublimirt, ist sie offenbar durch die Einwirkung des in den angewendeten Lösungsmitteln (Alkohol, Benzol, Xylol) enthaltenen Wassers auf primär gebildetes Hemipinsäureanhydrid entstanden.

Der vom Benzol aufgelöste Theil des Reactionsproductes wurde durch Abdestilliren vom Lösungsmittel befreit und durch Umkrystallisiren aus Wasser, schliesslich durch Auflösen in Alkohol und Ausfällen mit Wasser gereinigt. So erhielt man spröde, dünne Nadeln vom Schmelzpunkt 141—142°. Sie sind fast unlöslich in kaltem Wasser, ziemlich leicht löslich in heissem, sehr leicht in Methylalkohol, Eisessig, Essigäther, leicht in Äthyl- und Amylalkohol, Äther, Chloroform, heissem Benzol, Xylol, schwer in Schwefelkohlenstoff. Beim Verdunsten der Lösungen erhält man aus Benzol oder Xylol flache Prismen, aus Methylalkohol büschelförmig geordnete Nadeln, aus Äther, Eisessig oder Essigäther anscheinend rechteckige Tafeln. Die aus Essigäther erhaltenen sind messbar. Herr Prof. v. Lang hat Folgendes beobachtet:

Krystallsystem: Monosymmetrisch.

Elemente: $a : b : c = 1·3596 : 1 : 0·5723$,

$ac = 90°36'$.

Die Krystalle sind plattenförmig durch das Vorherrschen der Fläche 100; beobachtet wurden noch die Flächen 101, $\bar{1}01$, 110. Die zur Symmetrieebene parallelen Flächen spiegeln sehr gut und geben bei wiederholter Messung genau dieselbe geringe Abweichung vom rhombischen System.

Die wässerige Lösung des Körpers reagirt sauer und gibt mit Eisenchlorid-, dagegen nicht mit Bleizuckerlösung einen Niederschlag. Beim Verseifen durch anhaltendes Kochen mit concentrirter Kalilauge, Ansäuern und Ausschütteln erhält man

eine Säure, welche gegen die Lösungen von Eisenchlorid, Bleizucker und Silbernitrat das Verhalten der Hemipinsäure zeigt, bei 178—179° unter Aufschäumen schmilzt und ein aus langen Nadeln bestehendes Sublimat vom Schmelzpunkt 164—166° gibt, also Hemipinsäure ist. Hiedurch ist die bei 141—142° schmelzende Substanz als ein saurer Hemipinsäureäther charakterisirt. Die Verbrennung ergab, dass es saurer Hemipinsäureäthyläther war.

Die Substanz verliert ihr Krystallwasser grösstentheils schon im Exsiccator.

0·1875 Grm. lufttrockene Substanz gaben bei 100° 0·0178 Grm. Wasser ab.

	Gefunden	Berechnet für $C_{12}H_{14}O_6+1\frac{1}{2}aq.$
Wasserverlust in %	9·49	9·61.

0·1669 Grm. wasserfreie Substanz lieferten 0·3453 Grm. CO_2 und 0·0837 Grm. H_2O.

In Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_{12}H_{14}O_6$
C.....	56·42	56·69
H	5·57	5·51.

Ein Kalisalz wurde in Form eines strahligen Krystallkuchens erhalten, konnte aber für die Analyse nicht genügend gereinigt werden.

Der Körper stimmt in seinen Eigenschaften, insbesondere dem Krystallwassergehalt, der Löslichkeit, dem mit Eisenchlorid entstehenden Niederschlag, mit dem von Anderson[1] beschriebenen sauren Äthyläther überein. Nur den Schmelzpunkt habe ich um 9° höher gefunden. Ich stehe aber nicht an, trotzdem die beiden Verbindungen für identisch zu erklären, da der Schmelzpunkt selbst durch Spuren von Verunreinigungen um ein paar Grade herabgedrückt wird, und die Substanz Neigung zeigt, schon vor dem Schmelzpunkt zu erweichen.

Der saure Äther entsteht offenbar nach der von Matthiessen und Wright[2] zuerst ausgeführten Reaction durch Einwirkung

[1] Ann. Chem. Pharm. LXXXVI. 195.

[2] Ann. Chem. Pharm. Suppl. VII. 65.

des zum Auflösen verwendeten Alkohols auf das ursprünglich gebildete Hemipinsäureanhydrid. Beim Erhitzen des (α-)sauren Hemipinsäuremethyläthers entsteht also ausschliesslich Hemipinsäureanhydrid. Eine Wiederholung des Versuches in grösserem Massstabe zur Entscheidung der Frage, ob das weggehende Gas nach der Gleichung

$$2C_8H_8O_2(COOH)(COOCH_3) = 2C_8H_8O_2\left\langle\begin{matrix}CO\\CO\end{matrix}\right\rangle O + C_2H_4 + 2H_2O$$

Äthylen, oder gemäss der Gleichung

$$C_8H_8O_2(COOH)(COOCH_3) = C_8H_8O_2\left\langle\begin{matrix}CO\\CO\end{matrix}\right\rangle O + CH_4O$$

Methylalkoholdampf ist, konnte wegen Materialmangels nicht durchgeführt werden.

Das auffallende Verhalten des (α-)sauren Hemipinsäuremethyläthers liess es wünschenswerth erscheinen, auch den β-Äther der gleichen Reaction zu unterziehen. Auch hiebei entstand ausschliesslich Hemipinsäureanhydrid. Erhitzt man eine Probe in einer Eprouvette über den Schmelzpunkt, bis die Gasentwicklung aufhört, so destillirt ein Theil ab. Beim Abkühlen erstarrt alles zu Nadeln, welche durch Kochen mit Wasser in Hemipinsäure übergehen. Diese wurde an den charakteristischen, fast centimeterlangen Prismen, dem Schmelzpunkt und den Reactionen (Niederschläge mit Eisenchlorid und Bleizucker; der Bleiniederschlag im Überschuss des Fällungsmittels löslich, fällt beim Kochen wieder heraus; Niederschlag mit Silbernitrat nach dem Kochen) sicher als solche erkannt. Zum Überfluss wurde noch eine Verbrennung gemacht.

0·0772 Grm. bei 100° getrocknete Substanz gaben 0·1491 Grm. CO_2 und 0·0330 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_{10}O_6$
C.....	52·67%	53·10%
H.....	4·75%	4·42%.

Ein anderes Product war nicht nachweisbar.

Hier mag noch eine Notiz über die Löslichkeitsverhältnisse des Hemipinsäureanhydrids Platz finden. Es ist sehr löslich in heissem Benzol und Xylol und besonders (auch in der Kälte) in Essigäther, in der Hitze leicht löslich in Alkohol, Eisessig, Amylalkohol, löslich in Chloroform, ziemlich schwer in Äther, schwer in Schwefelkohlenstoff, unlöslich in Petroläther. Beim Erkalten scheiden sich aus den Lösungen in Alkohol, Eisessig, Amylalkohol, Benzol und besonders schön aus Xylol Nadeln ab.

IV. Destillation des (α-)sauren Hemipinsäuremethyläthers mit Kalk.

Da die Kohlensäureabspaltung aus dem (α-)sauren Hemipinsäuremethyläther durch Erhitzen für sich nicht gelang, wurde die Destillation mit Kalk versucht, allein auch hiebei der gesuchte Methyläther der dimethylirten sechsten Dioxybenzoësäure nicht erhalten.

Es konnten isolirt werden:

A. Ein abdestillirendes hellgelbes, neutral reagirendes Öl, welches beim Verseifen mit Kalilauge eine in Äther gehende, in Wasser lösliche, in weissen Nadeln krystallisirte Säure vom Schmelzpunkt 164—165° lieferte. Diese gab mit Eisenchlorid nur eine gelbe Färbung, mit Bleizucker keinen Niederschlag. Beim Verschmelzen mit Kali entsteht aus ihr eine Säure vom Schmelzpunkt 188—190°, welche mit Eisenchlorid die Protocatechusäurereaction gab. Das Öl ist daher wohl unreiner Dimethylprotocatechusäuremethyläther.

B. Eine Spur eines ätherlöslichen und mit Wasserdämpfen flüchtigen Öles, welches mit Eisenchlorid eine grüne Färbung, mit Bleizucker einen Niederschlag gibt und ammoniakalische Silberlösung reducirt. Der Geruch erinnert an Guajacol.

C. Eine Säure, welche mit sehr wenig Eisenchlorid eine violette, mit etwas mehr eine blaue Farbe gibt (diese verblasst beim Stehen der verdünnten Lösung und geht in Schmutzigrothbraun über; Na_2CO_3 verwandelt sie in Roth), in Wasser sehr löslich ist, schwer in Äther geht und unter Gasentwicklung bei 153—155° schmilzt, also Methylnorhemipinsäure.

D. Eine leicht in Äther gehende, in Wasser schwer lösliche und daraus in Nadeln vom Schmelzpunkt 236—238° krystalli-

sirende Säure. Die neutrale Lösung ihres Ammonsalzes gibt mit Bleizucker und Silbernitrat Niederschläge; der Bleiniederschlag ist im Überschuss des Fällungsmittels löslich, der Silberniederschlag bräunt sich beim Kochen. Also Isovanillinsäure.

E. Eine Säure, die mit Eisenchlorid eine schwache schmutziggrüne Färbung gibt und opak wird. Nach Zusatz von wenig Na_2CO_3 fällt ein schmutzigviolblauer Niederschlag aus, der bei weiterem Zusatz von Na_2CO_3 sich wieder löst, während gleichzeitig die Farbe durch Lila in Weinroth übergeht. Ähnliche Erscheinungen zeigen Gemenge von Hemipinsäure, Methylnorhemipinsäure und Protocatechusäure. Zur Reinigung reichte die vorhandene Menge nicht aus.

Die Substanzen *B* bis *E* stammen aus dem Retortenrückstande. Dieser wurde nämlich in Salzsäure gelöst, die Lösung erschöpfend mit Äther ausgeschüttelt und die wässerige Lösung des Ätherrückstandes abdestillirt. *B* ging mit den Wasserdämpfen über, *C*, *D* und *E* liessen sich durch Umkrystallisiren aus Wasser und partielles Ausschütteln mit Äther trennen.

Der Verlauf der Reaction ist in zwei Richtungen besonders beachtenswerth. Einerseits beweist die Entstehung von Dimethylprotocatechusäuremethyläther, dass das Methyl von einem Carboxyl zum andern wandert. In Folge dessen wird gerade das Carboxyl, welches in der zu den Methoxylen benachbarten Stellung sich befindet und durch die partielle Ätherificirung der Hemipinsäure vor der Eliminirung bewahrt werden sollte, abgespalten und es entstehen unter Kohlensäurebildung nur Derivate der Protocatechusäure. Anderseits geht aus der Entstehung der Methylnorhemipinsäure hervor, dass ein im Methoxyl befindliches Methyl ungewöhnlich leicht, sogar vor der Kohlensäure, abgespalten wird, was bei einer Reaction, wie das Erhitzen mit Kalk sehr auffallend ist. Eine geringe Widerstandsfähigkeit des dem Carboxyl benachbarten Methoxyls zeigt sich übrigens in dem ganzen Verhalten der Opiansäure und Hemipinsäure.

V. Zersetzung des (α-)sauren Hemipinsäuremethyläthers mit rauchender Salzsäure.

Die Einwirkung der rauchenden Salzsäure auf (α-)sauren Hemipinsäuremethyläther wurde in vier unter verschiedenen

Bedingungen angestellten Versuchen studirt. Auch hier zeigte es sich, dass das Carboxyl, welches in der der sechsten Dioxybenzoësäure zukommenden Stellung zu den Hydroxylgruppen sich befindet, durch die Methylirung nicht vor der Abspaltung gesichert werden kann; man erhält kein Derivat der (1, 2, 3) Dioxybenzoësäure.

I. Versuch. 3 Grm. krystallwasserhaltiger, (α-)saurer Hemipinsäuremethyläther wurden mit 21 CC. concentrirter Salzsäure eingeschlossen und $3^1/_4$ Stunden auf 110—130° erhitzt. Beim Öffnen zeigte sich starker Druck; der Röhreninhalt war dunkel gefärbt und bestand aus Krystallen und einer Flüssigkeit.

II. Versuch. 2 Grm. krystallisirter Äther wurden mit 8 CC. rauchender Salzsäure am Rückflusskühler 3 Stunden gekocht. Die Krystalle lösten sich rasch auf und es trat der Geruch von Chlormethyl auf. Die klare, gelbliche Flüssigkeit schied beim Erkalten Krystallnadeln ab.

III. Versuch. 5 Grm. Äther wurden mit 20 CC. rauchender Salzsäure in eine Röhre eingeschlossen und etwas mehr als 3 Stunden auf 100° erhitzt. Beim Öffnen zeigte sich starker Druck; der aus Krystallen und einer Flüssigkeit bestehende Röhreninhalt war ungefärbt.

IV. Versuch. 6 Grm. Äther wurden mit 20 CC. rauchender Salzsäure in eine Röhre eingeschlossen und etwas mehr als $1^1/_2$ Stunden auf 100° erhitzt. Beim Öffnen zeigte sich starker Druck. Beim Verdünnen des farblosen, aus glänzenden Krystallen und einer Flüssigkeit bestehenden Röhreninhaltes mit Wasser trübt sich die Lösung, die Krystalle verwandeln sich in eine flockige, weisse, undurchsichtige Masse und es entwickelt sich viel Gas. Nach Beendigung der Gasentwicklung wurde filtrirt. Eine Wiederholung dieses Versuches in grösserem Massstabe zum Zwecke des Studiums der beim Wasserzusatz eintretenden Reaction war wegen Materialmangels unmöglich.

Bei den Versuchen I, II und III befand sich Kohlensäure unter den entweichenden Gasen. Die Aufarbeitung war in allen vier Fällen die gleiche. Es wurde zuerst mit Wasser verdünnt und filtrirt, dann mit Wasser gewaschen, wobei ein Theil des Filterrückstandes in Lösung ging. Bei den drei ersten Versuchen wurde das ungelöst Gebliebene in Wasser, worin es selbst bei

Siedhitze ziemlich schwer löslich ist, aufgelöst und (beim ersten Versuch) von einer kleinen Menge eines schwarzbraunen Pulvers filtrirt. Aus dem Filtrat krystallisirte sofort eine Säure in glänzenden, flachen, drusenförmig angeordneten, krystallwasserfreien Nadeln vom Schmelzpunkt 250°. Die neutrale Lösung des Ammonsalzes gab mit Silbernitrat- und Bleizuckerlösung Niederschläge. Der Bleiniederschlag ist im Überschusse des Fällungsmittels löslich, der Silberniederschlag bräunt sich beim Kochen langsam. Mit Eisenchlorid gibt die Substanz keine Reaction. Sie zeigt also die Eigenschaften der Isovanillinsäure. Für die Analyse wurde sie aus Alkohol umkrystallisirt. Die heisse Lösung wurde von einer kleinen Menge eines braunen Pulvers filtrirt und schied beim Erkalten schöne Prismen ab, welche allerdings nicht vollkommen farblos waren, aber den Schmelzpunkt 250° zeigten und bei der Analyse befriedigende Resultate gaben. Aus der alkoholischen Mutterlauge erhält man durch Ausfällen mit Wasser noch eine zweite reine Fraction vom Schmelzpunkt 251°.

0·2302 Grm. der aus Alkohol auskrystallisirten Substanz gaben 0·4801 Grm. CO_2 und 0·1011 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_8H_8O_4$
C.....	56·88%	57·14%
H.....	4·88%	4·76%.

Beim Versuch IV entstand keine Isovanillinsäure; der Filterrückstand ist in Wasser leicht löslich und besteht aus denselben Säuren, welche in der sofort zu besprechenden Ausschüttlung mit Äther enthalten sind.

Die Filtrate wurden wiederholt mit Äther ausgeschüttelt und der Ätherrückstand durch fractionirte Krystallisation aus Wasser in seine Gemengtheile zerlegt. Man erhielt so in allen Fällen Methylnorhemipinsäure, und zwar im Versuch I neben Protocatechusäure, bei allen anderen Versuchen neben Hemipinsäure. Die Methylnorhemipinsäure ist löslicher als die beiden anderen Säuren.

Die Protocatechusäure wurde unter Anwendung von Thierkohle als weisse, undeutlich krystallinische, bei 187—189° schmelzende Masse erhalten, welche Neigung zeigte, an den Gefässwänden hinaufzukriechen und sich braun zu färben. Sie

wurde an den Farbenreactionen mit Eisenchlorid- und Sodalösung, an dem mit Bleizucker entstehenden Niederschlag, sowie daran erkannt, dass sie ammoniakalische Silberlösung in der Kälte reducirt und 1 Molekül Krystallwasser enthält.

0·1685 Grm. der lufttrockenen Substanz verloren bei 100° 0·0161 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_7H_6O_4+aq.$
H_2O.....	9·55%	10·47%.

0·1524 Grm. wasserfreier Substanz gaben 0·3044 Grm. CO_2 und 0·0561 Grm. H_2O.

In Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_7H_6O_4$
C.....	54·47	54·55
H.....	4·09	3·90.

Die Hemipinsäure wurde an ihren Eigenschaften, dem Verhalten gegen Eisenchlorid, Bleizucker und Silbernitrat, sowie an dem beim Sublimiren erhaltenen Anhydrid erkannt. Zur Vervollständigung des Identitätsbeweises diente die Analyse.

0·1336 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 100° 0·0187 Grm. Wasser.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_{10}O_6+2^1/_2aq.$
Wasserverlust in %...	16·25	16·61.

0·1151 Grm. wasserfreie Substanz lieferten 0·2251 Grm. CO_2 und 0·0467 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_{10}O_6$
C.....	53·34%	53·10%
H.....	4·51%	4·42%.

Unveränderter (α-) saurer Hemipinsäuremethyläther liess sich selbst bei Versuch IV nicht isoliren.

Die Methylnorhemipinsäure habe ich zuerst als krystallinische Masse mit dem, den Angaben von Beckett und Wright[1] ent-

[1] Jahresbericht für 1876, S. 809.

sprechenden Schmelzpunkte 152—155° erhalten. Beim Schmelzen tritt Zersetzung ein. Sie giebt mit Bleizuckerlösung einen weissen, im Überschuss des Fällungsmittels unlöslichen Niederschlag, mit ganz wenig Eisenchlorid eine violette, mit etwas mehr $FeCl_3$ eine tiefblaue Färbung, welche mit Spuren von Soda durch Violett in Weinroth übergeführt wird, bei Zusatz von überschüssigem Eisenchlorid aber zu einem schmutzigen Carminroth verblasst. Die mit überschüssigem $FeCl_3$ versetzte Lösung der Säure gibt mit Soda keine Farbenveränderung, sondern lässt sofort Eisenoxyd herausfallen. Ist die Säure mit Protocatechusäure verunreinigt, so tritt ebenfalls zuerst die violette und blaue Färbung mit Eisenchlorid auf, die dann bei Zusatz von mehr des Reagens durch die grüne Protocatechusäurereaction verdrängt wird. Bei einer Verunreinigung mit erheblichen Mengen Hemipinsäure tritt zuerst ebenfalls die violette und blaue Farbe auf, jedoch meist wenig intensiv und unrein. Dann fällt ein Niederschlag aus und man sieht alles in einer schmutzig-gelbgrünen oder bläulichen Mischfarbe. Lässt man aber einige Zeit stehen, so setzt sich der gelbe Niederschlag einigermassen aus der blauen Flüssigkeit ab.

Bei der kleinen Menge der erhaltenen Methylnorhemipinsäure habe ich es nicht für räthlich gefunden, dieselbe ohne Weiteres zu analysiren, da einerseits eine mit Protocatechusäure oder Hemipinsäure verunreinigte Substanz den richtigen Schmelzpunkt zeigen kann, anderseits ich beobachtet hatte, dass gerade Fractionen, welche ihrer Eisenreaction nach rein zu sein schienen, besonders solche, welche aus ganz concentrirter, heisser, wässeriger Lösung beim Erkalten sich abgeschieden hatten, bisweilen einen höheren, über 160° steigenden, aber sehr wenig scharfen Schmelzpunkt zeigten. Es lag nahe, zu vermuthen, dass in solchen Fällen ein Gemenge der von Beckett und Wright beschriebenen krystallwasserhältigen Säure mit wasserfreier vorliege. Man konnte aber ein solches Gemenge nicht zu entwässern versuchen, da nach den Angaben der genannten Forscher die Säure ihr Krystallwasser bei 100° unter theilweiser Zersetzung verliert. Man erhält aber die Säure leicht wasserfrei, wenn man die krystallwasserhältige Substanz vom Schmelzpunkt 152—155° in annähernd wasserfreiem Äther auflöst und nach dem theilweisen Abdestilliren erkalten lässt. Es fällt dann ein weisses oder

gelbliches Pulver aus, welches nach mehrmaliger Wiederholung der Operation bei 223—225° unter Gasentwicklung schmilzt, krystallwasserfrei ist und im Übrigen alle Eigenschaften der Methylnorhemipinsäure zeigt. Die Analyse gab folgendes Resultat:

0·1696 Grm. lufttrockene Substanz lieferten 0·3165 Grm. CO_2 und 0·0600 Grm. H_2O.

In Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_9H_8O_6$
C.....	50·90	50·94
H.....	3·93	3·77.

Die Methylnorhemipinsäure geht selbst bei wiederholtem Ausschütteln nur sehr unvollständig in den Äther. Man versetzt daher die mit Äther ausgeschüttelte Reactionsflüssigkeit mit Kaliumcarbonat, bis sie nur mehr schwach sauer reagirt. Nunmehr scheidet sich ein Kalisalz in weissen, feinen Nadeln ab, welche bei 230° schwefelgelb werden und sich zersetzen. Die wässerige Lösung derselben reagirt sauer und gibt mit Bleizucker einen Niederschlag, mit Eisenchlorid eine blaue, durch Soda in Roth überführbare Farbe. Eine Probe des Salzes wurde in Salzsäure gelöst und ausgeschüttelt, dann der Äther stark abdestillirt und erkalten gelassen. Es schied sich Methylnorhemipinsäure als weisses, bei 223—225° schmelzendes Pulver ab, welches mit Eisenchlorid und Bleizucker die entsprechenden Reactionen gab. Hiernach liegt saures, methylnorhemipinsaures Kali vor, was auch durch die Analyse bestätigt wurde.

0·5051 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 100° 0·0322 Grm. Wasser.

	Gefunden	Berechnet für $C_9H_7KO_6+aq.$
Wasserverlust in %	6·37	6·72.

0·4729 Grm. wasserfreie Substanz gaben 0·1688 Grm. K_2SO_4.

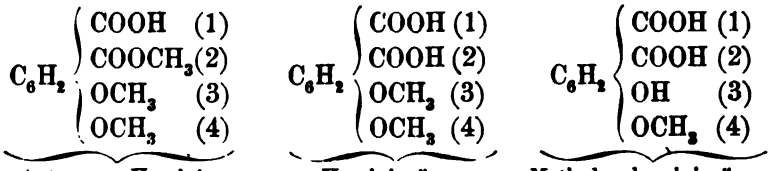
	Gefunden	Berechnet für $C_9H_7KO_6$
K.....	16·00%	15·60%.

Die vom sauren, methylnorhemipinsauren Kali abfiltrirte Flüssigkeit wurde mit Kaliumcarbonat völlig neutralisirt, zur

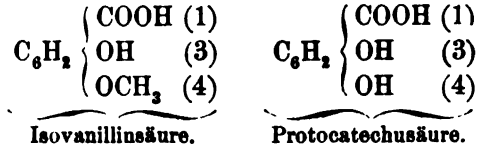
Trockne gebracht und der Rückstand mit Alkohol ausgezogen. Man erhielt so sehr dünne, glänzende Blätter in kleiner Menge, welche mit Eisenchlorid eine weinrothe Färbung geben, die bei Zusatz von mehr $FeCl_3$ (offenbar under dem Einflusse der freien Säure der Eisenchloridlösung) in Violett und Blau übergeht. Wahrscheinlich liegt das neutrale Kalisalz der Methylnorhemipinsäure vor. Zur Reinigung und Analyse reichte das Erhaltene nicht aus.

Uberblickt man die bei der Einwirkung der rauchenden Salzsäure auf (α-)sauren Hemipinsäuremethyläther entstehenden Producte, so sieht man, dass zuerst der Äther verseift wird und dann die bekannten Einwirkungsproducte des Chlor- oder Jodwasserstoffs auf freie Hemipinsäure entstehen. Methylnorhemipinsäure wurde von Beckett und Wright[1] aus Hemipinsäure mit Jodwasserstoff erhalten und durch Destillation mit Bimssteinpulver in Isovanillinsäure (Methylprotocatechusäure), mittelst der Kalischmelze in Protocatechusäure übergeführt. Isovanillinsäure wurde bereits von Matthiessen und Foster[2] direct aus Hemipinsäure mit rauchender Salzsäure erhalten und als Methylhypogallussäure beschrieben.

Die Reaction zwischen Salzsäure und saurem Hemipinsäuremethyläther verläuft also in folgenden Phasen:



(α-)saurer Hemipinsäuremethyläther. Hemipinsäure. Methylnorhemipinsäure.



Isovanillinsäure. Protocatechusäure.

[1] Jahresb. f. 1876, S. 809.

[2] Ann. Chem. Pharm. Suppl II. 378, Suppl. V. 334.

Die benachbarte Stellung des freien Hydroxyls zum Carboxyl in der Methylnorhemipinsäure ist anzunehmen wegen der Reaction mit Eisenchlorid und wegen des von Beckett und Wright gefundenen Zusammenhanges dieser Säure mit der Isovanillinsäure, deren oben aufgeschriebene Formel durch die Untersuchungen von Tiemann und dessen Mitarbeitern über die andere Monomethylprotocatechusäure (Vanillinsäure) wahrscheinlich gemacht ist.

VI. Zersetzung der Hemipinsäure mit Jodwasserstoff.

Ich habe diese, bereits von mehreren Forschern studirte Reaction wiederholt, um, wenn möglich, Derivate der (1, 2, 3) Dioxybenzoësäure aufzufinden. Ich habe auf 5 Grm. Hemipinsäure 40 CC. concentrirte wässerige Jodwasserstoffsäure (ohne Phosphor) angewendet und genau nach der Vorschrift von Liechti[1] operirt,[2] aber nur Methylnorhemipinsäure, Protocatechusäure und ein in Wasser schwer lösliches braunes Pulver enthalten, welches vielleicht unreine Isovanillinsäure ist; dieses Ergebniss steht in völligem Einklange mit den Resultaten von Beckett und Wright.[3]

---

[1] Ann. Chem. Pharm. Suppl. VII, 151.

[2] Das freie Jod wurde, um Oxydationserscheinungen zu vermeiden, nicht mit HgO, sondern mit H_2S entfernt.

[3] Jahresber. f. 1876. S. 809.

Synthetische Versuche in der Chinolinreihe.

3. Mittheilung.

Von **Zd. H. Skraup.**

(Aus dem Laboratorium der Wiener Handelsakademie.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1882.)

Vor etwa einem Jahre[1] beschrieb ich unter obigem Titel ein Verfahren zur Darstellung des Chinolins aus Nitrobenzol, Anilin und Glycerin, welches mit gleich günstigem Erfolge zur Gewinnung substituirter Chinoline dienen kann, wenn substituirtes Anilin und Nitrobenzol dem gleichen Processe unterzogen werden.

So sind schon in der citirten ersten Mittheilung zwei Methylderivate des Chinolins, das —*o*— und —*p*— Toluchinolin beschrieben, die aus —*o*— und —*p*— Amido- und Nitrotoluol entstehen, ferner das α Naphtachinolin, das aus α Amido- und Nitronaphtalin erhalten wird, und in einer zweiten Mittheilung habe ich mit A. Schlosser[2] gezeigt, dass in ganz analoger Weise die drei isomeren Amido- und Nitrobenzoësäuren in drei verschiedene Carbonsäuren des Chinolins überführbar sind, die wir Chinolinbenzcarbonsäuren nannten.

Das Toluchinolin aus —*m*—Toluidin, das in Folgendem beschrieben werden soll, habe ich hauptsächlich desshalb dargestellt, um seinen Siedepunkt mit dem der anderen zwei Toluchinoline zu vergleichen.

Nachdem das —*p*—Toluchinolin höher siedet als die —*o*— Verbindung, nachdem weiter eine gleiche Beziehung zwischen den Schmelzpunkten der —*p*— und —*o*— Chinolinbenzcarbonsäuren stattfindet, beide aber niederer schmelzen als die —*m*— Säure, welche die am höchsten schmelzende ist, schien es mir noth-

---

[1] Wiener Monatsh. II, 139.

[2] Ebend. II, 518.

wendig festzustellen, ob nicht etwa auch das —*m*—Toluchinolin dem entsprechend höher siede, als die anderen zwei im Benzolkerne methylirten Chinoline.

Das Ausgangsmateriale, das Metanitroparatoluidin wurde nach der Methode von Beilstein zunächst auf Metanitrotoluol verarbeitet. Eine Ausbeute von 67 Percent der theoretischen Menge erzielt man leicht, wenn jenes in der $2^1/_2$fachen Menge Alkohol gelöst mit salpetriger Säure (aus Arsentrioxyd und Salpetersäure vom specifischen Gewichte 1·35 nach Lunge Ber. f. 1878, 1642) gesättigt, sodann durch Kochen am Rückflusskühler zersetzt, und nach dem Abdestilliren des Alkohols mit Wasserdampf übergetrieben wird. Durch letztere Operation befreit man das Nitrotoluol von einem mitgebildeten Harze, das überaus schwierig und nur theilweise zum Krystallisiren zu bringen ist. Wiederholte Destillation liefert das Nitrotoluol vollständig rein und vom Siedepunkte 226·5 uncorr., 232·2° corr. bei 746 Mm. Barometerstand.

Das Metatoluidin aus dem Nitrotoluol durch Reduction vermittelst Zinn und Salzsäure erhalten, zeigte bei 747·8 Mm. Druck den Sied.epunkt von 1985° uncorr., corr. 202·8°.

Zur Darstellung des —*m*—Toluchinolins wurden 42 Grm. Toluidin, 27 Grm. Nitrotoluol, 100 Grm. Glycerin und 90 Grm. Schwefelsäure in der früher für das Chinolin beschriebenen Weise behandelt, die entstandene Base nach Entfernung des unveränderten Nitrotoluols, durch Alkalischmachen und Einleiten von Wasserdampf isolirt, in Äther aufgenommen, mit Chlorcalcium getrocknet und durch wiederholte Destillation gereinigt.

Die Ausbeute beträgt etwa 70 Proc. des angewendeten Toluidin's.

Das —*m*—Toluchinolin ist eine stark lichtbrechende Flüssigkeit von schwach gelber Farbe, deren Geruch dem des —*o*—Toluchinolins sehr ähnlich ist, und das letzterem auch in allen anderen Eigenschaften überaus nahe steht. Es erstarrt nicht bei —20°, in verdünnt schwefelsaurer Lösung zeigt es deutliche blaue Fluorescenz.

Es siedet unter 747 Mm. Druck bei 259·7 corr.

Das specifische Gewicht, bezogen auf Wasser derselben Temperatur ist:

bei 0° = 1·0839
„ 20° = 1·0722
„ 50° = 1·0576.

0·2525 Grm. lieferten 0·7742 Grm. CO_2 und 0·1435 Grm. H_2O.[1]

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_9N$
C	83·51	83·91
H	6·31	6·29.

Platindoppelsalz. Die heisse Lösung des —*m*—Toluchinolins in verdünnter Salzsäure mit Platinchlorid vermischt, scheidet je nach Concentration augenblicklich, oder erst beim Erkalten lange orangegelbe glänzende Prismen ab, die in kaltem Wasser sehr schwer, leichter in kochendem, am besten in siedender verdünnter Salzsäure löslich sind.

0·2491 Grm. verloren beim Trocknen auf 100 bis 110° 0·0120 Grm. H_2O und hinterliessen 0·0656 Grm. Pt.

	Gefunden	Berechnet für $(C_{10}H_9N)_2H_2Cl_6Pt+2H_2O$
H_2O	4·82	4·90
Pt	26·34	26·63.

Salzsaures —*m*—Toluchinolin. Beim raschen Verdunsten kleiner Mengen der überschüssige Salzsäure enthaltenden alkoholischen Lösung der Base krystallisirt das Salz mitunter sehr leicht in dünnen weissen Nadeln, grössere Quantitäten krystallisiren beim Stehen über Schwefelsäure erst nach Monaten. Die grossen wasserhellen Prismen sind von der dicken Mutterlauge äusserst schwer zu trennen, wesshalb auf die Analyse verzichtet wurde. An die Luft gebracht, werden die hygroskopischen Krystalle bald matt, am Lichte färben sie sich schön carminroth. Diese Färbung sieht man besonders rasch und schön an mit der Salzlösung getränktem Papier.

Schwefelsaures —*m*—Toluchinolin. 2·7 CC. Toluchinolin mit 5 CC. Alkohol vermischt und hierauf mit 1 CC. con-

[1] Die Elementaranalyse ist nach der Kopfer'schen Methode ausgeführt worden.

centrirter Schwefelsäure versetzt, setzen erst nach längerem Stehen kleine Krystalle ab, die dann aber rasch an Zahl und Grösse zunehmen, beim Umschütteln als Krystallbrei ausfallen. Die mit Alkohol gewaschenen und rasch zwischen Filtrirpapier getrockneten Krystalle sind trotz des homogenen Aussehens saures Sulfat, das mit geringen Mengen des neutralen Salzes verunreinigt ist. (Gefunden 3·89 und 3·86 Procent H_2O, und in der Trockensubstanz 38·49, 38·73 und 38·86 Percent H_2SO_4; für $C_{10}H_9N$, H_2SO_4 berechnet sich dagegen 41·17 Percent H_2SO_4).

Aus verdünntem Alkohol umkrystallisirt liefern sie hübsche weisse Prismen, die in absolutem Alkohol auch in der Hitze nicht, von etwa 60 Percent. Weingeist beim Kochen leicht, in der Kälte jedoch schwer gelöst werden, und die gleichfalls mit Neutralsalz verunreinigt sind, aber einen grösseren Wassergehalt besitzen, als die ersterwähnten. Gefunden: H_2O 7·46, in der Trockensubstanz H_2SO_4 38·06.

Wird bei der Darstellung des Sulfates Schwefelsäure im Überschusse genommen (2·3 CC. Toluchinolin und 1·1 CC. concentrirte H_2SO_4), so resultirt ein Salz, das schon in sehr schwach wässerigem Alkohol beträchtlich löslich ist, dünne Nädelchen bildet, die wasserhältig sind und sehr leicht verwittern. Nach zweimaligem Umkrystallisiren und Trocknen bei 100° bis zum constanten Gewichte lieferten

0·3672 Grm. 0·4461 Grm. $BaSO_4$.

	Gefunden	Berechnet für $(C_{10}H_9N)_2(H_2SO_4)_3$
H_2SO_4	....51·11	51·04.

—*m*—Toluchinolinpikrat. Das durch Vermischen der alkoholischen Lösungen von Base und Pikrinsäure leicht darstellbare Salz bildet mikroskopische Prismen von sehr intensiv gelber Farbe, ist in Benzol und Alkohol auch in der Kochhitze äusserst schwer löslich und schmilzt bei 206—207° uncorr.

Jodmethylverbindung. Dieselbe wird in der Art wie es beim —*p*—Toluchinolin[1] beschrieben ist, leicht erhalten, ist in Äther fast nicht, schwer in absolutem, leichter in wässerigem

[1] Wiener Monatshefte, II, 161.

Alkohol, am reichlichsten in Wasser löslich. Aus verdünntem Alkohol krystallisirt sie in langen spröden lichtgelben Nadeln, deren Lösung in Alkohol gelb, in Wasser jedoch nicht gefärbt ist. Die wässerige Lösung trübt sich auf Zusatz von Ätzkali ölig, beim Kochen ist derselbe anfangs chinolinartige, später nachhaltig stechende Geruch bemerkbar, wie bei den Jodmethylverbindungen des Chinolins und der anderen Toluchinoline.

0·2464 bei 100° getrocknet verloren 0·079 Grm. und lieferten 0·1938 Grm. AgJ und 0·0013 Grm. Ag.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_9N.CO_3J+{}^1/_2H_2O$
H_2O	3·21	3·06
J.....	43·13	43·19.

Von den vier Toluchinolinen, die nach der gegenwärtigen Anschauung über Constitution des Chinolins erwartet werden können, sind nun drei bekannt, doch nur von zweien derselben, vom —*o*— und —*p*—Derivate ist die Stellung der Methylgruppe sichergestellt. Ob das —*m*—Toluchinolin wirklich ein Metachinolinderivat oder etwa eines von der Stellung 1·4 ist (N = 1), müssen erst spätere Untersuchungen lehren.

In folgender Tabelle sind die Siedepunkte und specifischen Gewichte der drei Toluchinoline zusammengestellt.

	Toluchinolin aus Amidotoluol		
	—*o*—	—*m*—	—*p*—
Corr. Siedepunkt	247·3—248·3	259·7	257·4—258·6
bei Mm. Barometerstand	751·3	747·0	745·0
Specifisches Gewicht, bezogen auf Wasser derselben Temperatur			
bei 0°	1·0852	1·0839	1·0815
„ 20°	1·0734	1·0722	1·0681
„ 50°	1·0586	1·0576	1·0560.

Über den Nachweis von Jodforom, Naphtol und Chloroform in thierischen Flüssigkeiten und Organen.

Von Dr. **Sigmund Lustgarten,**

Assistent am Laboratorium für angewandte medicinische Chemie in Wien.

(Aus dem Laboratorium des Professors E. Ludwig.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1882)

Da das Chloroform seit langer Zeit, das Jodoform und Naphtol seit kurzem dem Arzneischatze angehören und häufig dem menschlichen Körper einverleibt werden, so habe ich mich, in Anbetracht dessen, dass nicht selten die Aufgabe ihres Nachweises in thierischen Flüssigkeiten und Organen gestellt wird, mit der Methode desselben, unter Zuhilfenahme neuer Reactionen beschäftigt und bin zu folgenden Resultaten gekommen.

I. Jodoform.

Zur Erkennung des Jodoforms dienten bis jetzt zwei ihm charakteristische Eigenschaften: erstens sein Geruch, und zweitens die ihm eigenthümlichen sechsstrahligen, Sternen ähnlichen Krystalle.

Was ersteren betrifft, so ist derselbe in der That so charakteristisch und penetrant, dass man auf diese Weise, die Abwesenheit anderer Riechstoffe vorausgesetzt, so minimale Spuren, wie es kaum auf andere Art möglich ist, erkennen kann. Die hiezu nöthige Bedingung, das vollständige Fehlen seinen Geruch störender oder deckender Substanzen, ist aber nicht immer zu erfüllen, speciell nicht, wenn es sich, wie ich es zu thun beabsichtigte, um den Nachweis von Jodoform in thierischen Flüssigkeiten und Organen, wie Harn, Blut, Gehirn etc., handelt. Man bekommt in diesen Fällen immer sehr unangenehm durchdringend riechende Destillate, die die Erkennung selbst beträchtlicherer Mengen Jodoform durch den Geruch vollständig unmöglich machen.

Verlässlicher, aber auch nicht sicher, ist der mikroskopische Nachweis von Jodoformkrystallen, denn unter nicht näher gekannten Umständen, unter Anderem häufig beim Verdampfen der ätherischen Ausschüttelungen der jodoformhältigen Destillate, wird die typische Krystallisation des Jodoforms gehindert, und man findet in diesen Fällen statt der hübschen Sterne theils amorphe, theils undeutlich krystallinische Massen, die nicht mit Sicherheit als Jodoform angesprochen werden können.

In Folgendem soll nun über eine neue Jodoformreaction berichtet werden.

Trägt man nämlich zu einer auf dem Wasserbade oder im Paraffinbade bei 120° C. erhitzten Lösung von 20 Grm. Phenol und 40 Grm. Ätznatron in 70 CC. Wasser Jodoform in kleinen Mengen ein, so tritt sehr bald Rothfärbung der Flüssigkeit ein und das eingebrachte Jodoform verschwindet. Man setzt das Erhitzen so lange fort, bis circa 60 Grm. Jodoform verbraucht sind, was einige Tage dauert, etwas kürzere Zeit, wenn im Paraffinbade erhitzt wird, säuert dann den Kolbeninhalt mit Salzsäure stark an und destillirt mit Wasserdämpfen. Es gehen überschüssiges Phenol und wahrscheinlich salicylige Säure und Paroxybenzaldehyd über. Im Kolben bleibt ein in der Wärme weiches, schwarzbraunes, nach dem Erkalten sprödes, rothbraunes Harz zurück, das sich nicht in kaltem, sehr wenig in heissem Wasser, leicht in Alkohol mit gelblicher und in Alkalien mit schön carminrother Farbe löst, welche letztere durch einen geringen Überschuss von Säure sogleich verschwindet, um beim Abstumpfen derselben mit einem Alkali wieder zum Vorschein zu kommen. Die alkalische Lösung wird durch Ferridcyankalium tief dunkelroth gefärbt. Ich habe dieses Reactionsproduct, da es sich mir nur um die Anwendung dieser Reaction zum Nachweise von Jodoform handelte, nicht näher untersucht; es dürfte aber, da der Vorgang analog der Einwirkung von Phenolalkali auf Chloroform ist, keinem Zweifel unterliegen, dass dasselbe aus Rosolsäure und ihr nahestehenden Körpern besteht.

Die Einwirkung von Chloroform auf Phenolalkali hat zuerst Guareschi[1] beobachtet und dasselbe zum Nachweise von

[1] Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 1872. 1055. Corresp.

Phenol angegeben, nicht ganz mit Recht, denn Resorcin gibt unter denselben Bedingungen wie Phenol dieselbe Reaction. Später haben bekanntlich Reimer und Thiemann[1] diesen Vorgang zur Methode für die Darstellung von Rosolsäure und aromatischen Aldehyden erhoben. Von ihnen rühren auch die oben angegebenen Mengenverhältnisse von Phenol, Ätznatron und Wasser her.

Um die Reaction im Kleinen auszuführen, bringt man auf den Boden einer kurzen Reagenzröhre etwas Phenolalkali, nur sehr wenig, weil Phenolalkali beim Erwärmen sich bräunt und dadurch eine später auftretende geringe Rothfärbung nicht deutlich erkannt werden könnte, fügt 1—3 Tropfen einer alkoholischen Jodoformlösung zu und erwärmt vorsichtig über einer kleinen Flamme. Nach wenigen Secunden tritt am Boden der Eprouvette ein rother Beschlag auf, der sich in wenigen Tropfen verdünnten Alkohols mit carminrother Farbe löst.

Es ist für die Empfindlichkeit der Reaction von Wichtigkeit, obige Vorschriften genau einzuhalten. Der Grund für die geringe Menge des anzuwendenden Phenolalkali ist bereits angegeben. Wendet man andererseits eine beträchtliche Menge alkoholischer Jodoformlösung an, so dauert das Vertreiben des Alkohols, das nöthig ist, damit die erforderliche Temperatur eintrete, so lange, dass ein verhältnissmässig grosser Theil des Jodoformes sich zu verflüchtigen Gelegenheit hat. Aus letzterem Grunde erweist sich auch das Erwärmen im Wasserbade für unzweckmässig, da dabei die Erwärmung zu langsam fortschreitet. Wird dagegen die Reaction in der oben angegebenen Weise vorgenommen, so lässt sie an Empfindlichkeit kaum etwas zu wünschen übrig, so zwar, dass die Menge Jodoform, die in einem Tropfen einer einprocentigen alkoholischen Lösung enthalten ist, circa 0·2—0·3 Milligramme, noch eine intensive Rothfärbung hervorbringt. Wird Äther zur Lösung des Jodoforms angewendet, so büsst die Reaction an Empfindlichkeit ein.

Da es von vornherein nicht unmöglich erschien, dass Jodoform, das in der letzten Zeit in der medicinischen und chirurgischen Praxis häufig angewendet wird, analog dem Chloroform im Blute und Harne erscheine, so habe ich die Bedingungen des

[1] Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 1876. 824 u. 1768.

Nachweises desselben in diesen Flüssigkeiten einer Untersuchung unterzogen.

Was den Harn betrifft, so wurde derselbe, nachdem er mit einer bestimmten Menge Jodoform in ätherischer Lösung versetzt worden war, ohne weiteren Zusatz mit Wasserdämpfen überdestillirt, bis circa 50 CC. übergegangen waren, was bei den angewendeten geringen Jodoformmengen vollkommen genügt. Nachdem noch das Kühlrohr nachgewaschen worden war, wurde das neutral reagirende Destillat mit etwas Kalilauge versetzt und in einem Scheidetrichter mit Äther ausgeschüttelt. Die abgehobene ätherische Lösung wurde in einer Glasschale bei gewöhnlicher Temperatur zur Trockene gebracht, der Rückstand mit wenigen Tropfen absoluten Alkohols gelöst und mit dieser Lösung die Reaction vorgenommen. Es gelingt auf diese Weise leicht 2 bis 3 Milligramme Jodoform in einer beliebig grossen Harnmenge nachzuweisen. Das Versetzen des Destillats mit Kalilauge ist unerlässlich, denn es scheint dadurch einer oder mehreren die Reaction störenden Substanzen der Übergang in den Äther unmöglich gemacht zu werden. Habe ich es unterlassen oder das Destillat angesäuert, so gelang es mir nie eine deutliche Reaction zu erhalten.

Um Jodoform im Blute nachzuweisen, wurde dasselbe, nachdem es mit dem zweifachen Volumen Wassers verdünnt worden war, mit Kalilauge alkalisch gemacht und mit Wasserdämpfen überdestillirt. Der Zusatz von Kalilauge wurde vorgenommen, um die Gerinnung des Blutes hintanzuhalten, denn es hatte sich herausgestellt, dass aus vollständig oder unvollständig coagulirendem Blute, letzteres nach dem Versetzen desselben mit kohlensaurem Natron, die übergegangene Jodoformmenge beträchtlich geringer als die zugesetzte war, offenbar dadurch, dass dasselbe theilweise durch die Eiweisscoagula eingeschlossen und am Sublimiren gehindert wurde. Das Destillat wurde wie oben behandelt, nur mit dem Unterschiede, dass die ätherische Ausschüttelung, nach dem Ablassen der alkalischen wässerigen Lösung, noch mit etwas verdünnter Schwefelsäure versetzt wurde, um mitübergegangene Aminbasen in derselben zu fixiren. Die untere Grenze der auf diese Weise im Blute nachweisbaren Jodoformmenge beträgt 4—5 Milligramme.

Bei dieser Gelegenheit will ich erwähnen, dass ich sowohl im Harne von mit Jodoform behandelten Menschen, von denen einzelne die Erscheinungen hochgradiger Jodoformintoxication darboten, als auch im Blute von durch Einbringung von Jodoform in die Bauchhöhle vergifteter, aber noch lebender Hunde, letzteres gelegentlich einer von Herrn Docenten Dr. Mikulicz und mir gemeinschaftlich begonnenen Arbeit über Jodoformintoxication, nach Jodoform gesucht habe, aber immer mit negativem Erfolg.

Bei Anstellung der Reaction kann das Phenol, und zwar ohne ihrer Empfindlichkeit Eintrag zu thun, durch Resorcin ersetzt werden, dagegen nicht durch die Isomeren desselben, Hydrochinon und Brenzcatechin. Letzteres Factum ist, wenn man ferner bedenkt, dass Barth und Schreder[1] das Entstehen von Resorcin beim Schmelzen von Phenol mit Natron nachgewiesen haben, sehr merkwürdig, und dürfte die nähere Untersuchung desselben weitere Aufschlüsse über die Constitution der als Phenolalkali und Chloroform dargestellten Rosolsäuren ergeben. Was die aus Rosanilinen dargestellten betrifft, so ist in ihnen, da für Rosaniline nach E. und O. Fischer die Parastellung einer NH_2-Gruppe in Bezug auf CH_3 statthat, auch das Vorhandensein einer Parastellung anzunehmen.

Das Verhalten von Resorcin zu Chloro- und Jodoform bei Gegenwart von Alkali ist auch für den Fall, als man sich zum Nachweise von Phenol der Guareschi'schen[2] Reaction bedienen wollte, zur Kenntniss zu nehmen.

Weitere Versuche, statt des Phenols andere Körper aus der aromatischen Reihe, wie Pyrrogallussäure, Salicyl-Benzoë-Paraoxybenzoësäure in die Reaction einzuführen, haben, wie grösstentheils vorherzusehen war, zu keinem Resultate geführt.

Ob Bromo- und Nitroform im vorliegenden Falle Chloro- und Jodoform vertreten können, habe ich nicht untersucht, obwohl es durch Analogie sehr wahrscheinlich ist.

II. Naphtol.

Löst man α- oder β-Naphtol in starker Kalilauge, setzt zur Lösung Chloroform und erwärmt auf circa 50° C., so erhält man

[1] Ber. d. deutsch. chem. Ges. 12. 420.

[2] L. c.

eine prächtig berlinerblaue Flüssigkeit, deren Farbe aber leider nicht beständig ist, indem sie schon beim Stehen an der Luft in blaugrün, grün, grünbraun und endlich in braun übergeht. Die Zeit, die dies braucht, schwankt bei gewöhnlicher Temperatur, je nach der Menge des angewandten Naphtols und Chloroforms von wenigen Minuten bis zu mehreren Stunden, in der Wärme vollzieht es sich immer in sehr kurzer Zeit, ebenso bei der Anwendung selbst sehr gelinder Oxydations- und Reductionsmittel. Mit Säuren gibt die blaue Lösung einen ziegelrothen Niederschlag. Bereits nachdem ich im Besitze obiger Reaction war, berichteten Rousseau[1] und Kauffmann[2] über durch eben dieselbe erhaltene Producte, einen zweisäuerigen Alkohol und β-Naphtolaldehyd, was mich veranlasste, meine Versuche, die hiebei entstehenden Körper zu isoliren, aufzugeben. Sowohl Rousseau als auch Kauffmann haben das Auftreten der blauen Farbe beobachtet, aber demselben keine weitere Beachtung geschenkt, während gerade dieses als sehr empfindliche Reaction auf Naphtol und Chloroform zu benützen ist. Schon ein Paar Zehntel Milligramme Naphtol geben auf einem Uhrglas in etwas concentrirter Kalilauge gelöst, gelinde erwärmt und mit einem Tropfen Chloroform versetzt eine deutliche berlinerblaue Färbung. Das Chloroform kann in diesem Falle zweckmässig durch einige Chlorohydratkrystalle ersetzt werden, indem das sich aus denselben bildende Chloroform sich in Form sehr kleiner Tröpfchen ausscheidet und in Folge dessen eine verhältnissmässig grosse Oberfläche der Einwirkung darbietet.

Zum Nachweise von Naphtol im Harne dürfte diese Reaction schon insoferne willkommen sein, als man ohne sie dasselbe aus dem Harne darstellen, durch Umkrystallisiren reinigen und eine Schmelzpunktbestimmung machen muss, was die Anwesenheit beträchtlicherer Mengen Naphtols voraussetzt und ausserdem viel zeitraubender ist.

Zum Zwecke des Nachweises wurde der Harn nach Zusatz einer bestimmten Menge β-Naphtol mit Salzsäure stark angesäuert und ungefähr die Hälfte derselben mit Wasserdämpfen über-

---

[1] Compt. rend. XCIV. 133.

[2] Ber. d. deutsch. chem. Ges, 1882. 804.

destillirt. Das Destillat wurde mit Äther ausgeschüttelt, der Äther verjagt, der Rückstand in Kalilauge gelöst und die Reaction in obiger Weise angestellt. Da die alkalische Lösung immer bräunlich gefärbt ist, so ist mitunter die auftretende Farbe mehr grün. Ganz ähnlich verfährt man beim Nachweise des Naphtols im Retortenrückstand, nur mit dem Unterschied, dass man, da in den Äther viel Farbstoff übergeht, der Rückstand der ätherischen Ausschüttelung früher entfärbt werden muss. Dies geschieht am besten, indem man denselben in Alkohol löst, mit wenig Thierkohle versetzt, gelinde erwärmt und filtrirt, das Filtrat zur Trockene bringt und dann wie oben verfährt. Obwohl Thierkohle die alkoholische Lösung besser in der Kälte entfärbt, so ist doch das Erwärmen zu empfehlen, weil sonst, wie ich beobachtet habe, bei Anwesenheit nur geringer Mengen Naphtol, einem dasselbe, dadurch, dass es von der Thierkohle vollständig zurückgehalten wird, vollständig entgehen könnte.

Nach der auf diese Weise vorgenommenen Entfärbung gelingt die Reaction in der Regel sehr schön, und ich würde erstere desshalb auch bei der Untersuchung des Destillates empfehlen. Es scheint, dass durch die Thierkohle ausser Farbstoffen noch gewisse, die Reaction störende Körper, wie Phenol und Kresol, die normaler Weise immer in geringer Menge im Harne erscheinen, zurückgehalten werden.

Der Zusatz von Naphtol zum Harne geschah in Form von naphtolschwefelsaurem Kali. Die in demselben noch nachgewiesene Menge Naphtol beträgt 0·016 Grm., entsprechend 0·032 Grm. naphtolschwefelsaurem Kali, was vollständig genügt, da Naphtol, wie J. Mauthner[1] gezeigt hat, sehr schnell resorbirt wird und schon nach wenigen Stunden die Menge der Ätherschwefelsäuren im Harne beträchtlich steigert.

Auch mit Harnen von Leuten, denen auf der Klinik des Herrn Professor Kaposi Naphtol auf die Haut applicirt worden war, wurden Versuche mit befriedigendem Erfolg angestellt.

III. Chloroform.

Es ist klar, dass die auftretende Blaufärbung beim Aufeinanderwirken von Naphtol, Alkali und Chloroform auch zum

[1] Medic. Jahrb. 1881. pag. 203.

Nachweise des letzteren dienen kann. Als ich wenige Cubikcentimeter des Destillates eines Gehirnes, das von einem in der Chloroformnarcose verstorbenen Menschen herrührte, mit einer gelinde erwärmten Lösung von Naphtol in Kalilauge zusammenbrachte, so trat eine sehr gut wahrnehmbare Blaufärbung der Flüssigkeit ein, die bald verschwand, um auf neuerlichen Zusatz von Destillat wieder vorübergehend zu erscheinen. Die Anwesenheit von Chloroform war in diesem Falle durch andere Reactionen ganz sichergestellt worden.

XII. SITZUNG VOM 11. MAI 1882.

Herr Dr. L. J. Fitzinger führt als Alterspräsident den Vorsitz.

Se. Excellenz der Präsident der Akademie, geheimer Rath Ritter v. Arneth, übermittelt folgende von Sr. Eminenz dem Cardinal Erzbischof von Kalocsa, Herrn Dr. Ludwig Haynald, verfasste und für die Bibliothek der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften eingesendete Abhandlungen:

1. „Denkrede auf den Florentiner Botaniker Philipp Parlatore, in ungar. Sprache und in deutscher Übersetzung.
2. Über die Pflanzen, von welchen die in der hl. Schrift erwähnten Harze und Gummi herrühren, in ungar. Text, unter dem Titel: „A szentirási Mézgák és Gyanták termönövényei.“
3. „*Ceratophyllum pentacantum* Haynald„.
4. Zwei Abhandlungen über *Castanea vulgaris* Lam. I. „*Solum in quo in Hungaria crescit.*“ II. „*Incolatus ejus in Hungaria.*“

Das c. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. Hermann Hammerl, Privatdocent an der Universität in Innsbruck, betitelt: „Beiträge zur Kenntniss der Hydratbildung von Salzen.“

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über einige Nitroproducte aus der Reihe des Brenzkatechins“, Arbeit aus dem Laboratorium für analytische Chemie an der technischen Hochschule in Wien von Prof. Dr. P. Weselsky und Dr. R. Benedikt.
2. „Untersuchungen gewisser Reihen, nebst einer arithmetischen Auflösungsmethode der numerischen Gleichungen“, von Fr. Jak. Schneider, Assistent an der technischen Hochschule in Lemberg.

3. „Bericht über die Resultate der Untersuchungen, betreffend die Einwirkung der Elektricität auf das Pflanzenwachsthum", von Herrn Alfred Tschinkel, Ingenieur in Wien.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Dr. Aristides Brezina in Wien vor.

Herr Professor Dr. Franz Exner in Wien übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Bestimmung des Verhältnisses zwischen elektrostatischer und elektromagnetischer absoluter Einheit."

Der Obmann der prähistorischen Commission, Herr Hofrath Dr. F. v. Hochstetter überreicht als Fortsetzung des V. Berichtes der Arbeiten dieser Commission im Jahre 1881 zwei Berichte des Herrn Franz Heger über Ausgrabungen auf prähistorischen Fundplätzen.

Das w. M. Herr Hofrath Ritter v. Hauer überreicht eine Mittheilung aus dem geologischen Institute der deutschen Universität zu Prag: „Neue Beiträge zur Kenntniss der Juraablagerungen im nördlichen Böhmen", von Herrn G. Bruder.

Der Secretär Herr Prof. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia, Real de Ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 211 & 212. Tomo XVIII. Febrero y Marzo. Habana, 1882; 8°. — Consideraciones acerca de la Topografia Medica en general y en particular sobre las de la Villa de Guanabacoa e Isla de Pinos; por el Dr. D. José de la Luz Hernández. Habana; 8°.

— Romana: Analele. Seria II. Tomulu III. Bucuresci, 1882; 4°.

Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux Arts de Belgique: Bulletin. 51e année, 3e série. Tome 3. Nr. 3. Bruxelles, 1882; 8°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXIX 1881—82 Serie terza. Transunti. Vol. VI. Fascicoli 9° & 10°. Roma, 1882; 4°.

— Reale delle Scienze di Torino: Atti. Vol. XVII. Disp. 2ª (Gennaio 1882.) Torino; 8°.

Akademie der Wissenschaften k. b. zu München: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe 1882. Heft 2. München, 1882; 8°.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 6ᵉ série, 2ᵉ année, 3ᵉ cahier. 1882, Mars. Paris; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3ᵉ période. Tome VII. No. 3. — 15 Mars 1882. Genève, Lausanne, Paris, 1882; 8°.

British Museum: Catalogue of the Batrachia salientia. 2ᵈ édition. London, 1882; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VI., Nr. 21. Cöthen, 1882; 4°.

Comité international des poids et mesures: Procès-verbaux des séances de 1881. Paris, 1882; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCIV. Nr. 17. Paris, 1882; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. III. Jahrgang, Heft 4: April. Berlin, 1882; 4°.

Geological and natural History Survey of Canada: Report of Progress for 1879—80. Montreal, 1881; 8°. — Maps to accompany Report of Progress for 1879—80. Montreal, 1881.

Gesellschaft, Astronomische: Vierteljahrsschrift. XVII. Jahrgang. 2. Heft. Leipzig, 1882; 8°.

— Deutsche, für Natur- und Völkerkunde Ostasiens: Mittheilungen. 26. Heft. Februar, 1882. Yokohama; gr. 4°.

— österreichische für Meteorologie. XVII. Band. Mai-Heft 1882. Wien, 1882; 8°.

— physikalisch-chemische: Journal. Tome XIV. Heft 4. Saint Pétersbourg, 1882; 8°.

Jena, Universität: Akademische Druckschriften pro 1881—82; 43 Stücke, 8° u. 4°.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band XXV. 4. Heft. Leipzig, 1882; 8°.

— the American of Otology. Vol. IV. Nr. 2. April, 1882. Boston; 8°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 26ᵉ année de publication. 3ᵉ série. Tome XII. 485ᵉ livraison. Mai 1882. Paris; 8°.

Nature. Vol. XXVI. Nr. 653. London. 1882; 8°.

Osservatorio centrale del real collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bollettino mensuale. Ser. II. Vol. I. Nr. XII. Torino, 1881; 4°

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. 1882. Nr. 7. Wien; 8°.

— — Jahrbuch. Jahrgang 1882. XXXII. Band. Nr. 1. Jänner bis März. Wien, 1882; 8°.

— — Die Gasteropoden der Meeresablagerungen der ersten und zweiten miocänen Mediterran-Stufe in der österr.-ungar. Monarchie von R. Hörnes und M. Auinger. 3. Lieferung. Abhandlungen. Band XII. Heft 3. Wien, 1882; 4°.

Repertorium für Experimental-Physik etc., herausgegeben von Dr. Ph. Carl. XVIII. Band. 5. Heft. München und Leipzig, 1882; 8°.

Société botanique de France: Bulletin. Tome XXVIII. 1881. Comptes rendus des séances. 6. Paris; 8°.

— des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux. 4° série, 35° année, 1er cahier. Janvier 1882. Paris; 8°.

— mathématique de France: Bulletin. Tome X. Nr. 2. Paris, 1882; 8°.

— philomatique de Paris: Bulletin. 7 série. Tome VI. Nr. 2. 1881—82. Paris, 1882; 8°.

Society, the American geographical: Bulletin. 1881. Nr. 4. New-York; 8°.

— the royal astronomical. Vol. XLII. Nr. 5. March 1882. London; 8°.

— the royal microscopical: Journal. Ser. II. Vol. II. Part 2. London & Edinburgh,1882; 8°.

Verein, naturforschender in Brünn: Verhandlungen. XIX. Band 1880. Brünn, 1881; 8°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. II. Jahrgang, 1882. 4. Heft, April. Berlin; 4°.

— für die gesammten Naturwissenschaften: Originalabhandlungen u. Berichte. 3. Folge 1881. Band VI. Berlin, 1881; 8°.

Über die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes.

Von dem w. M. **J. Stefan.**

Das Potential V eines Feldes, welches eine Symmetrieaxe besitzt, ist eine Function zweier Variablen. Als solche können die auf der Axe der Symmetrie gemessene Abscisse x eines Punktes und dessen Abstand von dieser Axe ρ gewählt werden. Für alle Punkte des Feldes, in welchen sich keine zum Potentiale beitragenden Massen oder Quellen befinden, genügt V der Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dV}{d\rho}=0 \tag{1}$$

Die Gleichung $V=\alpha$, unter α eine arbiträre Constante verstanden, gibt das System der Niveauflächen des Feldes, oder das System der Niveaulinien in einer die Axe enthaltenden Ebene.

Eine Gleichung $U=\beta$, in welcher U eine Function von x und ρ und β eine arbiträre Constante bedeutet, gibt ein zweites System von Rotationsflächen oder ein zweites System von Linien in einer axialen Ebene. Diese Linien sind Stromlinien oder Kraftlinien, sobald sie die Niveaulinien rechtwinklig schneiden. Sie thun das, wenn die Function U die Gleichung

$$\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{d\rho}\frac{dV}{d\rho}=0 \tag{2}$$

zu einer identischen macht.

Die Gleichung (2) kann man durch die Annahme

$$\frac{dU}{dx}=-R\frac{dV}{d\rho},\quad \frac{dU}{d\rho}=R\frac{dV}{dx} \tag{3}$$

befriedigen. R bedeutet eine noch zu bestimmende Function von x und ρ. R muss der Bedingung

$$-\frac{d}{d\rho}\left(R\frac{dV}{d\rho}\right)=\frac{d}{dx}\left(R\frac{dV}{dx}\right)$$

genügen. Führt man die Differentiationen aus, so reducirt sich diese Bedingung mit Hilfe der Gleichung (1) auf

$$\left(\frac{dR}{d\rho}-\frac{R}{\rho}\right)\frac{dV}{d\rho}+\frac{dR}{dx}\frac{dV}{dx}=0$$

Diese Gleichung wird unabhängig von der speciellen Beschaffenheit der Function V durch die Annahme

$$R=a\rho$$

erfüllt, worin a eine beliebige Constante bedeutet. Zur Bestimmung von U hat man nunmehr die Gleichungen

$$\frac{dU}{dx}=-a\rho\frac{dV}{d\rho},\quad \frac{dU}{d\rho}=a\rho\frac{dV}{dx} \tag{4}$$

Durch schickliche Wahl der Constanten a kann man der Function U eine bestimmte physikalische Bedeutung geben. Ist z. B. das Feld ein elektrisches Stromfeld und nimmt man $a=-2\pi\lambda$, unter λ das Leitungsvermögen des Mediums verstanden, so wird

$$U=-2\pi\lambda\int\frac{dV}{dx}\rho d\rho.$$

Denkt man sich die Integration von 0 bis ρ ausgeführt, so bedeutet U die Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt $\pi\rho^2$ fliesst.

Für ein elektrisches oder magnetisches Kraftfeld kann man U als die Anzahl der durch den Querschnitt $\pi\rho^2$ gehenden Kraftlinien definiren. λ bedeutet dann die dielektrische Constante oder die magnetische Leitungsfähigkeit des Mediums und ist $=1+4\pi k$,

wenn k die Elektrisirungszahl, respective Magnetisirungszahl des Mediums ist.

Handelt es sich nur um die Befriedigung der analytischen Bedingungen, so kann man $a=1$ setzen. Die Gleichungen (4) verwandeln sich dann in die gewöhnlich gebrauchten

$$\frac{dU}{dx}=-\rho\frac{dV}{d\rho},\quad \frac{dU}{d\rho}=\rho\frac{dV}{dx} \tag{5}$$

Die additive Constante, welche jedem Werthe von U, der diesen Gleichungen genügt, hinzugefügt werden kann, kann man auch $=0$ setzen.

Die Kraftlinien kann man ebensowohl durch die Gleichung $U=\beta$, als auch durch eine andere ausdrücken, indem man irgend eine Function von U einer arbiträren Constanten gleich setzt. In besonderen Fällen kann es auch einfacher sein, eine Function von U zur Bestimmung der Kraftlinien zu wählen. Es bietet jedoch ihre Darstellung durch $U=\beta$ besondere Vortheile, welche aus der physikalischen Bedeutung von U ableitbar, in analytischer Beziehung aber in dem folgenden Satze begründet sind:

Gehören zu den Potentialfunctionen V_1, V_2, V_3.... der Reihe nach die Stromfunctionen U_1, U_2, U_3...., so entspricht dem Potentiale

$$V=C_1V_1+C_2V_2+C_3V_3+- \tag{6}$$

die Stromfunction

$$U=C_1U_1+C_2U_2+C_3U_3+.... \tag{7}$$

C_1, C_2, C_3.... bedeuten beliebige Constante. Die Richtigkeit dieses Satzes ist ohne weiters klar. Werden nämlich die Gleichungen (4) oder (5) durch jedes der Paare (U_1, V_1), (U_2, V_2).... für sich erfüllt, so werden sie es auch durch U und V.

Eine im Anfangspunkte der Coordinaten befindliche Masse m gibt ein Potential

$$V=\frac{m}{r}$$

wenn r die Distanz eines Punktes vom Ursprung der Coordinaten bezeichnet. Die zweite der Gleichungen (5) liefert

$$\frac{dU}{d\varrho} = -\frac{mx\varrho}{r^3}, \quad U = \frac{mx}{r}$$

Führt man den Winkel ϑ ein, welchen r mit x bildet, so wird

$$U = m\cos\vartheta.$$

Die durch den Anfangspunkt gehenden geraden Kraftlinien sind also durch die Gleichung $m\cos\vartheta = \beta$ auszudrücken.

Befinden sich auf der Axe der x in verschiedenen Punkten die Massen $m_1, m_2, m_3 \ldots$, so ist das Potential in einem Punkte dessen Abstände von diesen Massen $r_1, r_2, r_3 \ldots$ sind, gegeben, durch

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \ldots.$$

Die zugehörige Stromfunction ist

$$U = m_1\cos\vartheta_1 + m_2\cos\vartheta_2 + m_3\cos\vartheta_3 + \ldots,$$

wenn $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots$ die Winkel bedeuten, welche $r_1, r_2, r_3, \ldots$ mit der Axe der x bilden.

Für zwei gleich grosse, aber entgegengesetzt bezeichnete Massen $m_1 = m, m_2 = -m$ ist

$$U = m(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2),$$

welche Gleichung bekannt ist als die Gleichung der magnetischen Curven eines aus zwei einfachen Polen bestehenden Magnetes.

Will man diese Gleichung durch eine directe Betrachtung ableiten, so hat man zunächst die Anzahl der von einer punktförmigen Masse m nach allen Seiten des Raumes ausgehenden Kraftlinien festzustellen. Sei diese Anzahl $4\pi m$. In einen geraden Kegel, dessen Spitze in m und dessen Erzeugende mit der Axe den Winkel ϑ bildet, fallen dann $2\pi m(1-\cos\vartheta)$ Kraftlinien. Befindet sich auf der Axe eine zweite Masse m_1, und construirt man von m_1 als Spitze einen zweiten Kegel mit dem Winkel ϑ_1,

so liegen in diesem $2\pi m_1 (1-\cos\theta_1)$ von der Masse m_1 ausgehende Kraftlinien. Schneiden sich die beiden Kegel, so gehen durch die von dem Schnittkreise begrenzte Fläche $2\pi m(1-\cos\theta) + 2\pi m_1 (1-\cos\theta_1)$ Kraftlinien. Die continuirliche Folge der Kreise, für welche diese Summe denselben Werth hat, bildet eine Fläche, durch welche keine Kraftlinie hindurchgeht. Jeder Meridianschnitt dieser Fläche ist also eine resultirende Kraftlinie.

Aus dem obigen Satze kann man noch den folgenden ableiten: Enthalten ein Potential V und die zugehörige Stromfunction U eine oder mehrere Constanten, so entsprechen sich auch die nach diesen Constanten genommenen Differentiale und Integrale von V und U als Potentiale und Stromfunctionen.

Ein einfaches Beispiel zu diesem Satze bildet der Fall einer gleichförmig mit Masse belegten Strecke. Ist da ein Element dieser Strecke, ε die Masse der Längeneinheit, so ist $\frac{\varepsilon da}{r}$ das Potential, $\varepsilon\cos\theta\, da$ die Stromfunction dieses Elementes. Es ist aber

$$\cos\theta = -\frac{dr}{da}.$$

Die Stromfunction der ganzen Strecke ist somit das über ihre Länge ausgedehnte Integral

$$-\int \varepsilon \frac{dr}{da} da = \varepsilon(r_1 - r_2)$$

r_1 und r_2 bedeuten die Abstände eines Punktes von den Enden der Strecke. Die Kraftlinien sind Hyperbeln, welche die Endpunkte der Strecke zu Brennpunkten haben.

Wenn man die Gleichungen (4) oder (5) nach x differenzirt, so ändern sie sich nur insofern, dass an Stelle der Functionen U und V ihre Differentialquotienten treten. Daraus ergibt sich nun der Satz: Gehört zu einem Potential V die Stromfunction U, so gehört zum Potentiale $\frac{dV}{dx}$ die Stromfunction $\frac{dU}{dx}$.

Dieser Satz führt zu einer sehr einfachen Bestimmung der Stromfunction in den Coordinaten x und ρ für den Fall, dass das

Die Bedingungen der Orthogonalität der durch V und U repräsentirten Flächen oder Linien sind dann

$$\frac{dU}{dr} = -\sin\vartheta \frac{dV}{d\vartheta}, \quad \frac{dU}{d\vartheta} = r^2 \sin\vartheta \frac{dV}{dr} \tag{10}$$

Setzt man

$$V = \frac{A_n P_n}{r^{n+1}}$$

so erhält man aus der ersten der Gleichungen (10)

$$U = \frac{A_n}{nr^n} \sin\vartheta \frac{dP_n}{d\vartheta}$$

Aus der zweiten der Gleichungen (10) folgt

$$U = -\frac{(n+1)A_n}{r^n} \int P_n \sin\vartheta d\vartheta$$

und dieser Ausdruck ist mit dem vorhergehenden identisch, wenn man die angezeigte Integration von 0 bis ϑ ausführt.

Mit Hilfe der durch die Gleichung

$$P_{n+1} - P_{n-1} = \frac{2n+1}{n(n+1)} \sin\vartheta \frac{dP_n}{d\vartheta}$$

ausgedrückten Eigenschaft der Functionen P erhält man U noch in einer dritten Form

$$U = \frac{A_n}{r^n} \cdot \frac{n+1}{2n+1} (P_{n+1} - P_{n-1}).$$

Alle diese Formen von U sind identisch mit dem entsprechenden Gliede der Reihe (9).

Die soeben abgeleiteten Werthe von U kommen auch zur Anwendung, wenn das Potential V durch eine nach steigenden Potenzen von r geordnete Reihe gegeben ist. Diese Reihe ist

$$V = B_0 + B_1 P_1 r + B_2 P_2 r^2 + B_3 P_3 r^3 + \ldots .$$

B_0, B_1, B_2, ... sind willkürliche Constante. Die einzelnen Glieder dieser Reihe sind ganze Functionen von x und r oder x und ρ. Auch die Formeln (5) lassen sich leicht auf diese Functionen

anwenden. Die Bestimmung von U als Function von x und ρ gestaltet sich aber einfacher, wenn man V als eine nach steigenden Potenzen von ρ geordnete Reihe formirt. Aus der Gleichung (1) ergibt sich diese Reihe in folgender Gestalt:

$$V = Q - \frac{\rho^2}{2^2}\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{\rho^4}{2^2.4^2}\frac{d^4Q}{dx^4} - \ldots.$$

Q ist nur von x abhängig und bedeutet das Potential für die in der Axe liegenden Punkte. Die zweite der Gleichungen (5) gibt sofort den Werth von U und man hat nun noch folgenden Satz:

Ist das Potential durch die Reihe

$$V = Q - \frac{\rho^2}{2^2}\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{\rho^4}{2^2.4^2}\frac{d^4Q}{dx^4} - \ldots. \qquad (11)$$

gegeben, so ist die zugehörige Stromfunction durch

$$U = \frac{\rho^2}{2}\frac{dQ}{dx} - \frac{\rho^4}{2^2.4}\frac{d^3Q}{dx^3} + \frac{\rho^6}{2^2.4^2.6}\frac{d^5Q}{dx^5} - \ldots. \qquad (12)$$

bestimmt.

Ist z. B. das Feld ein homogenes, also

$$V = Ax$$

so sind die der Axe der x parallel laufenden Kraftlinien durch die Gleichung

$$U = \frac{A\rho^2}{2}$$

auszudrücken.

Enthält der Ausdruck des Potentials beide Formen (8) und (11), so ist auch die Stromfunction aus den entsprechenden Formen (9) und (12) zusammengesetzt. Wird z. B. in ein homogenes magnetisches Feld ein sehr kurzer Magnet gelegt, so ist das Potential

$$U = Ax + \frac{mx}{r^3},$$

die Stromfunction

$$U = \frac{A\rho^2}{2} - \frac{m\rho^2}{r^3}.$$

Wie ein solcher Magnet verhält sich auch eine in das homogene Feld gelegte und durch dasselbe magnetisirte Eisenkugel. Ist a der Radius der Kugel und k die Magnetisirungszahl des Eisens, so ist das magnetische Moment der Kugel

$$m = -\frac{4\pi k a^3 A}{3+4\pi k}$$

Die Stromfunction ausserhalb der Eisenkugel ist demnach

$$U = \frac{A\rho^2}{2}\left(1+\frac{8\pi k}{3+4\pi k}\cdot\frac{a^3}{r^3}\right)$$

Bezeichnet man mit ρ_0 die Ordinate einer Kraftlinie im Unendlichen, so ist

$$U = \frac{A\rho_0^2}{2}.$$

Die Gleichung dieser Kraftlinie kann also in der Form

$$\rho_0^2 = \rho^2\left(1+\frac{8\pi k}{3+4\pi k}\frac{a^3}{r^3}\right)$$

geschrieben werden. Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass mit abnehmendem r auch ρ kleiner wird. Für $r=a$ gibt ρ die Ordinate des Punktes, in welchem die Kraftlinie in die Kugel eintritt. Diese Ordinate ρ_1 ist also bestimmt durch die Gleichung

$$\rho_0^2 = \rho_1^2\left(1+\frac{8\pi k}{3+4\pi k}\right)$$

welche Gleichung unter der Beschränkung auf solche Werthe von ρ_0, für welche ρ_1 nicht grösser wird als a, gilt.

Da für Eisen $4\pi k$ eine grosse Zahl ist, so hat man näherungsweise

$$\rho_0^2 = 3\rho_1^2,$$

d. h. es treten nahezu dreimal so viel Kraftlinien in die Eisenkugel ein, als durch einen gleichen Querschnitt im Unendlichen gehen.

Über die specifische Wärme des stark magnetisirten Eisens und das mechanische Äquivalent einer Verminderung des Magnetismus durch die Wärme.

Von Anton **Wassmuth** in Czernowitz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1882.)

Bekanntlich hat zuerst Stefan [1] nachgewiesen, dass die specifische Wärme des magnetisirten Eisens grösser sein müsse, wie die des unmagnetischen.

Denkt man sich nämlich weiches Eisen in die Nähe eines permanenten Magneten gebracht und durch Zufuhr der Wärmemenge W_1 entmagnetisirt, so lässt sich das so erhitzte Eisen ohne Aufwand von Arbeit in unendliche Entfernung vom Magneten bringen. Entzieht man ihm dort die Wärme W_2 von der Grösse, dass es wieder die ursprüngliche Temperatur (z. B. 0^0) erhält, so wird es vom Magneten wieder angezogen und magnetisirt.

Wäre nun $W_1 = W_2$, so könnte eben durch den beschriebenen Process Arbeit aus Nichts erzeugt werden; es muss daher $W_1 > W_2$ sein.

Ich will nun bei der folgenden Untersuchung der Einfachheit wegen annehmen, dass das bei 0^0 magnetisirte Eisen das Maximum m seines Momentes erhalten habe. Werden die magnetischen Momente μ als Abscissen, die Magnetisirungsfunctionen $k = \frac{\mu}{x}$ — wo x die magnetisirende Kraft vorstellt — als Ordinaten aufgetragen, so bildet bekanntlich die so erhaltene Curve für höhere Werthe von μ eine Gerade, die verlängert die Abscissenaxe in einem Punkte mit der Abscisse m trifft.

Es soll ferner τ die Anzahl Grade bedeuten, um welche das bis zum Maximum m magnetisirte Eisen von 0^0 aus erwärmt

---

[1] Stefan [illegible] ...tze der elektrodynamischen Induction. Sitzb. d. k. Akad., [illegible]

werden muss, damit sein Magnetismus vollständig verschwinde. Ist dann $C_{o\tau}$ die mittlere specifische Wärme zwischen 0^0 und τ^0 des magnetisirten Eisens, $c_{o\tau}$ die mittlere specifische Wärme des unmagnetisirten Eisens, so gelten die Gleichungen:

$$W_1 = C_{o\tau}\tau \qquad W_2 = c_{o\tau}\cdot\tau,$$

wenn der Einfachheit wegen 1 Milligramm Eisen betrachtet wird. Überblickt man nun den obigen Kreisprocess, so erkennt man, dass als Äquivalent der Wärme $W_1 - W_2$ jene lebendige Kraft L auftritt, die das vom Magneten angezogene Eisen bei seiner Bewegung aus dem Unendlichen her erhält. Diese lebendige Kraft ist der Arbeit gleich, die von dem permanenten Magneten bei der Magnetisirung des Eisens geleistet wird. Sieht man ab von der dabei auftretenden, äusserst geringen Temperaturerhöhung und den allenfalsigen Volumsänderungen des Eisens, so ist die Magnetisirungsarbeit A_0 gegeben durch:

$$A_0 = \int_0^m x\, d\,\mu \qquad 1)$$

wenn, wie etwa bei der Magnetisirung eines Ringes, keine freien Magnetismen auftreten. Sonst stellt x die Resultante aus der äusseren Kraft und der aus dem magnetischen Potential sich ergebenden dar.

Ist I das mechanische Äquivalent der Wärme, d. i. unter entsprechender Rücksichtnahme auf die gewählten Masseinheiten: $I = 4155 \times 10^6$, so folgt aus dem Obigen:

$$A_0 = I\,(C_{o\tau} - c_{o\tau})\,.\,\tau. \qquad (2)$$

Diese Gleichung 2) würde sofort $C_{o\tau}$ bestimmen lassen, sobald τ bekannt wäre. Es ist nun allerdings bekannt, dass für ziemlich starke magnetisirende Kräfte das untersuchte Eisen die helle Rothgluth (etwa 1000°) aufwies, als sich an ihm die ersten Spuren einer Magnetisirbarkeit bemerklich machten, so dass also bei noch höherer Temperatur das Eisen für diese Kräfte sich unmagnetisirbar erwies. Daraus folgt aber gewiss nicht, dass nicht noch bedeutendere magnetisirende Kräfte eine Magnetisirung zu Wege bringen könnten. Jedenfalls kann $\tau > 1000°$ gesetzt werden.

Aus meinen Untersuchungen über die Magnetisirbarkeit des Eisens bei höheren Temperaturen [1] erhellt, dass das Maximum m für eine Temperaturerhöhung von etwa 500° nur um nahe 10·5% abnahm.

Es ist aber auch nicht wahrscheinlich, dass für eine nochmalige Erwärmung um weitere 500° die Abnahme wieder 10·5% betragen werde. In der That lässt uns schon der Anblick der Gleichung 2 vermuthen, dass die Temperaturzunahme nicht einfach proportional dem m zu setzen ist, sondern in anderer Weise davon abhängt.

Denken wir uns das Eisen nicht bei 0^0 sondern bei $t_1{}^0$ bis zum Maximum magnetisirt und dazu die Arbeit A_1 aufgewendet, so leuchtet ein, dass:

$$t_1 + \tau_1 = \tau$$

sein müsse, falls τ_1 die Temperaturerhöhung des Eisens von der Temperatur t_1 vorstellt, die jetzt zur Vernichtung des Magnetismus nothwendig ist.

Es ist daher:

$$A_1 = I\,(C_{t_1\tau} - c_{t_1\tau}) \cdot \tau_1 \qquad 3)$$

zu setzen. Dabei bedeuten $C_{t_1\tau}$ und $c_{t_1\tau}$ die mittleren specifischen Wärmen des magnetischen respective unmagnetischen Eisens in dem Intervalle von t_1 auf τ Grade. Für eine Temperatur t_2 gilt analog:

$$A_2 = I\,(C_{t_2\tau} - c_{t_2\tau}) \cdot \tau_2, \qquad 4)$$

wenn $\tau_2 = \tau - t_2$ gesetzt wird.

Es soll nun für diese vorläufige Rechnung angenommen werden, dass die mittleren specifischen Wärmen des magnetisirten wie des unmagnetischen Eisens in den Intervallen 0 bis τ, t_1 bis τ, t_2 bis τ als gleich angesehen werden können und sollen dieselben mit C und c bezeichnet werden. Die drei obigen Gleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} A_0 &= I\,(C-c)\,\tau \\ A_1 &= I\,(C-c)\,\tau_1 \\ A_2 &= I\,(C-c)\,\tau_2, \end{aligned} \qquad 5)$$

[1] Wassmuth, Über die Magnetisirbarkeit des Eisens bei höheren Temperaturen. Sitzb. d. k. Akad., 82. Bd. II., und 83. Bd. II.

woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} A_0 - A_1 &= I\,(C-c)\,t_1 \\ A_0 - A_2 &= I\,(C-c)\,t_2 \end{aligned} \qquad 6)$$

und

$$\frac{A_0 - A_1}{A_0 - A_2} = \frac{t_1}{t_2}. \qquad 7)$$

Zur Prüfung dieser Formeln ist es vor Allem nöthig, die Werthe von A_0, A_1 und A_2 zu ermitteln. Das die Arbeit darstellende Integral liesse sich nun bestimmen, sobald für verschiedene Temperaturen der Zusammenhang zwischen x und μ bekannt wäre. Sieht man aus bekannten Gründen ab von der Poisson'schen Theorie, so gibt z. B. die Anwendung der von Stefan aus vielfachen Beobachtungen gezogenen, empirischen Gleichung zwischen x und μ sofort die Proportionalität des A_0 mit m^2.

Gegen diesen Vorgang lässt sich indess einwenden, dass, wie ich wiederholt erwähnt habe, diese empirischen Formeln die Magnetisirungscurve zwar für die gewöhnlichen, aber nicht für die höheren Temperaturen darstellen.

Es empfiehlt sich daher, den Werth des die Arbeit darstellenden Integrals als den einer gewissen, leicht bestimmbaren Fläche unmittelbar aus einer genauen Zeichnung zu entnehmen.

Um die Maximalarbeiten zu ermitteln, wurden die den einzelnen magnetischen Momenten entsprechenden Arbeiten als Abscissen und die Magnetisirungsfunctionen k als Ordinaten dargestellt. Die so erhaltene Curve geht schliesslich in eine Gerade über, welche, verlängert, die Abscissenaxe schneidet und so das Maximum an Arbeit anzeigt.

Auf diese Weise vorgehend, erhielt ich für den in meiner zweiten Abhandlung erwähnten, ersten Stab: $A_0 = 162.500$ und für den zweiten Stab: $B_0 = 140.000$ als Arbeitsmaxima für die Zimmertemperatur.

Benützt man den von Maxwell gegebenen Ausdruck:

$$A_0 = \frac{1}{8\pi} m^2,$$

so erhält man, wenn

$$m = 1800 \text{ ist, } A_0 = 129.600.$$

Dieser niedere Werth erklärt sich schon daraus, dass bei der Ableitung dieser Gleichung die allgemein nicht zulässige Annahme der Proportionalität des Momentes mit der magnetisirenden Kraft vorausgesetzt wird.

Der erste Stab wurde um $529° = t_1°$ erwärmt und findet sich für die dieser Temperatur entsprechende Maximalarbeit:

$$A_1 = 108{\cdot}000.$$

Es gilt daher die Gleichung 6):

$$A_0 - A_1 = 54500 = I\,(C-c)\,t_1 = (C-c)\,.\,4155{\cdot}10^6\,.\,529,$$

woraus sich:

$$C - c = \frac{2{\cdot}48}{10^8}$$

ergibt.

Für den zweiten Eisenstab, der um $287 = t_1{}^1$ Grade erwärmt wurde, erhielt ich:

$$B_1 = 105000$$

und somit:

$$B_0 - B_1 = 35000 = (C-c)\,4155{\cdot}10^6\,.\,287,$$

falls die specifischen Wärmen beider Stäbe als gleich angenommen werden. Die Rechnung liefert jetzt:

$$C - c = \frac{2{\cdot}93}{10^8},$$

so dass als Mittelwerth

$$C - c = \frac{2{\cdot}7}{10^8}$$

resultirt; die Abweichungen vom Mittel betragen $8\,\%$.

Bedenkt man, dass die verwendeten Eisenstäbe gerade und nicht ringförmig gebogen waren und dass die erreichte Magnetisirung wenig über 70 % des Maximums hinausging, so wird man einsehen, warum die Bestimmung der Grössen A_0 und B_0 und somit auch von $(C-c)$ noch immer etwas unsicher bleibt. Versuche mit Ringen von kleinem Durchmesser, von denen jeder mehreren verschiedenen Temperaturen (Gl. 7) und starken

Magnetisirungen auszusetzen wäre, werden gewiss genauere Zahlenverhältnisse liefern.

Nach dem Gegebenen ist zu erwarten, dass auch die Gleichung

$$\frac{A_0 - A_1}{B_0 - B_1} = \frac{t_1}{t_1^1}$$

durch die Versuche bestätiget werde. In der That findet man für den linksstehenden Quotienten die Zahl 1·56, während $\frac{t_1}{t_1^1} = 1{\cdot}84$ erhalten wird. Es drückt sich in dieser Gleichung der bekannte Satz aus, dass die Arbeit, die die Wärme thun kann, der Temperatur proportional ist.

Es ist jetzt auch möglich, mit Hilfe der ersten Gleichung 5), jene Temperatur τ zu berechnen, bei der das Eisen sich auch den stärkeren Kräften gegenüber als unmagnetisch erweisen würde. Man findet mit Zugrundelegung des Mittelwerthes für $C - c$

für τ bei dem ersten Stabe:	1444°
und „ „ zweiten „	1248,

woraus sich als Mittelwerth

$$\tau = 1346^0$$

ergibt.

Die Temperatur τ, bei der das Maximum des Magnetismus verschwindet, liegt also etwas höher als der Schmelzpunkt des Eisens. Würde man mit den erhaltenen Daten rückwärts I, das mechanische Wärmeäquivalent berechnen, so erhielte man selbstverständlich wenig verschiedene Werthe.

Gegen die hier gegebene Ableitung des mechanischen Äquivalents der Abnahme des Maximums lässt sich eine Einwendung erheben. Diese Abnahme des Maximums mit der Temperatur könnte nämlich auch darin ihren Grund haben, dass neben der ursprünglichen, axialen Magnetisirung in Folge der Erwärmung noch eine transversale Magnetisirung dazu käme; letztere könnte von *a)* bleibender oder *b)* wechselnder Richtung sein, wenn auch bei *a)* nicht gut einzusehen wäre, welche Richtung den Vorzug geniessen sollte. So hat z. B. Siemens nachgewiesen, dass der erregte Magnetismus kleiner wird, wenn gleichzeitig durch andere

Kräfte eine Magnetisirung in einer dagegen senkrecht stehenden Richtung stattfindet. Ebenso ist durch Theorie und Versuch nachgewiesen, dass ein um eine Axe sich drehender Eisenkörper, z. B. eine Kugel, nebst der directen Magnetisirung in Folge der Drehung noch eine seitliche Magnetisirung aufweist; letztere rührt theils von Inductionsströmen her, theils von dem Acte des Magnetisirens selbst, indem dazu immer eine endliche Zeit nöthig ist.

Die Abnahme der höheren Momente mit steigender Temperatur kann man sich, wie ich schon früher [1] erwähnte, leicht so erklären, dass man sich die Molecüle in lebhaftere Schwingungen versetzt denkt; ihr mittleres, axiales Moment erscheint dann entsprechend verringert. Das transversale Moment müsse dagegen nach dieser Erklärung auch bei höherer Temperatur verschwinden, da sich die rasch folgenden Lagen des Molecüls in ihrer Wirkung aufheben.

Die von mir angestellten Versuche sprechen für die letztere Auffassung.

Eine longitudinal bewickelte Röhre wurde in einem Trockenkasten mit ihrer Axe senkrecht zum magnetischen Meridiane einem aperiodischen Spiegelgalvanometer gegenüber gestellt und bei 18° und 179° stark magnetisirt. Da dieses Eisen bei 18° als Ringmagnet keine Ablenkung hervorbrachte, so konnte eine eventuell auftretende Drehung des Spiegels ihren Grund nur in einer von Ost nach West gehenden Magnetisirung der Eisenröhre finden; es zeigte sich indess auch bei 179° keine sicher nachweisbare Veränderung. Eine zweite Röhre bestätigte dasselbe.

Ein Telephon, dessen Zuleitungen zu den Enden der Röhre führten, gab bei einer ähnlichen Temperaturerhöhung des Eisens keinen Ton. Schliesslich wurde durch das Innere einer eisernen Röhre, die durch zwei Berzelius' Lampen stark erhitzt werden konnte, ein starker Strom geleitet; ein wie früher eingeschaltetes Telephon liess auch jetzt keinen Ton erkennen. Hiemit scheint nachgewiesen, dass auch bei höheren Temperaturen keine seitliche Magnetisirung — von gleicher oder wechselnder Richtung — auftritt; der vorgebrachte Einwand wird dadurch hinfällig.

[1] Zweite Abhandlung, pag. 335.

Beiträge zur Kenntniss der Hydratbildung von Salzen.

Von Dr. **Hermann Hammerl,**
Privatdocent.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Mai 1882.)

Unsere Kenntnisse über die Hydrate der Salze sind noch recht lückenhafte. Wir kennen zwar von vielen Salzen eine ganze Reihe von Hydraten, auch sind die Umstände und Bedingungen, unter welchen diese erhalten wurden, in vielen Fällen genau angegeben. Wir sind aber nicht in der Lage auch nur von einem Salze zu behaupten, dass wir alle seine möglichen Hydrate kennen, da uns eine Methode fehlt, dieselben sicher zu erhalten. Die Darstellung derselben war nämlich bisher mehr oder weniger dem Zufall unterworfen, es wurde eben herumprobirt und dann bald bei dieser, bald bei jener Concentration oder Temperatur ein neues Hydrat erhalten. Die von J. Thomsen[1] angewendete Methode, die Salze im höchst wasserhältigen krystallisirten Zustande zu pulverisiren und bis zum berechneten Wassergehalte eines gewünschten Hydrates zu trocknen, kann uns nicht befriedigen, denn sie gibt uns nicht die genügende Garantie, ob wir wohl wirklich das beabsichtigte Hydrat und nicht ein dem zugehörigen Procentgehalt entsprechendes Gemisch von Hydraten auf diese Weise erhalten. Es ist vielmehr sehr wahrscheinlich, dass bei dieser Methode die Kristallsegmente von der Oberfläche aus nach Innen wasserärmer werden, ohne immer eine homogene Zusammensetzung anzunehmen. Es ist desshalb auch zu bezweifeln, ob J. Thomsen bei seinen Messungen der Wärmetönungen für die Bildung der verschiedenen Hydrate wirklich das gemessen hat was er beabsichtigte, da durchaus nicht anzunehmen ist, dass die Wärmetönung bei Bildung eines Hydrates gleich gross sei, wie

---

[1] Journ. f. prakt. Chemie. Bd. XVIII, p. 1.

die Wärmetönung bei Bildung eines Gemisches mehrerer Hydrate von gleicher procentischer Zusammensetzung.

Diese Erwägung findet auch ihre Anwendung auf die Untersuchungen über den Zusammenhang der Dampfspannungen (Dissociationstensionen) zweier Hydrate und ihrer Überführungswärmen, worüber von Debray[1], Wiedemann[2], Alex. Naumann[3], Precht und Kraut[4], Parreau[5], A. Horstmann[6] und L. Pfaundler[7] werthvolle Untersuchungen vorliegen.

Dieselben haben, wie bekannt, zu keinem befriedigenden Resultate geführt, indem die berechneten Wärmetönungen mit den beobachteten nicht übereinstimmen und die Messung der Tensionen grosse Divergenzen und überhaupt Schwierigkeiten ergeben hat. Ich selbst habe die etwas mühsame Berechnung der Wärmetönung für die Hydratbildung der Salze $Mg\,SO_4 + 7H_2O$, $Sr\,Cl_2 + 6H_2O$ und $Cu\,SO_4 + 5H_2O$ durchgeführt, da über das erste neue Dampfspannungen von Wiedemann, über die beiden letzteren von Parreau bekannt gegeben worden sind. In allen drei Fällen ergibt sich aber auch nicht ein annähernder richtiger Werth für die Wärmetönung, welche bei der Bildung dieser Hydrate aus dem wasserfreien Salz entsteht.

Es lässt sich nicht läugnen, dass die Dampfspannungsbestimmungen von Salzhydraten äusserst schwierig auszuführen sind, aber grösstentheils hat man vergessen auf den eigentlichen physikalischen Zustand des Salzhydrates Rücksicht zu nehmen. Man hat einem Hydrat eine gewisse Dampfspannung zugeschrieben, obwohl dasselbe als solches gar nicht vorhanden war, es war vielmehr ein mehr oder weniger verwittertes höheres Hydrat.

Einer Einladung des Herrn Prof. L. Pfaundler folgend, habe ich nun zu allererst als das Nächstliegende untersucht, ob nicht die Bildung der aufeinanderfolgenden Hydrate ausschliess-

---

[1] Compt. Rend. Bd. 66, p. 194.

[2] Pogg. Jubelb. 1874, p. 474.

[3] Berl. Ber. 1874. p. 1573.

[4] Liebig. Ann. Bd. 178, p. 129.

[5] Wiedem. Ann. Bd. I, p. 39.

[6] Liebig. Ann. Supplem. Bd. VIII, p. 112. — Berl. Ber. 1871, p. 760.

[7] Berl. Ber. 1876, p. 1153.

lich eine Function der Temperatur ist, bei welcher die Krystallisation erfolgt, so zwar, dass man alle zwischen zwei Grenzen überhaupt möglichen Hydrate erhalten müsste, indem man die Krystallisation nach und nach bei allen zwischen den entsprechenden Grenzen liegenden Temperaturen vor sich gehen lässt. Die bisherigen Erfahrungen geben hierüber keinen genügenden Aufschluss. In der grossen Mehrzahl der Fälle blieb die Temperatur der Lösung während der Krystallisation nicht constant, es war nicht dafür gesorgt, dass für jede Temperatur eine gesättigte Lösung der Krystallisation ausgesetzt wurde. Soll die Untersuchung methodisch durchgeführt werden, so muss man die noch nicht gesättigte Lösung eines Salzes der Reihe nach auf constant bleibende Temperaturen bringen und die Krystallisation statt durch Abkühlung durch allmälige Entführung des Lösungsmittels erzwingen, wobei insbesondere darauf zu sehen ist, dass durch diese Entführung die Lösung keine locale Abkühlung erleide, was der Fall sein könnte, wenn die Wegführung des Lösungsmittels nur durch Verdampfen an der Oberfläche der ruhig stehenden Lösung erfolgte. Man erreicht nämlich die Bildung von Salzhydraten hie und da auch auf die Weise, dass man eine gesättigte Lösung über Schwefelsäure unter dem Recipienten einer Luftpumpe stellt und dadurch die langsame Wegführung von Wassermolecülen bewirkt. Dabei entwässert sich nun die an der Oberfläche liegende Schicht zuerst, es bilden sich Krystalle eines Hydrates, das vielleicht gar nicht entstehen würde, wenn die ganze Salzlösung einem gleichförmigen Entwässerungsprocess unterworfen wäre. Letzterer wird nun durch folgende zwei Methoden erzielt:

1. Man nimmt die Lösung eines Salzes, welche für eine bestimmte Temperatur noch nicht ganz gesättigt ist und lässt durch dieselbe einen trockenen Luftstrom gehen, der einerseits die Lösung gleichsam umrührt, anderseits durch eine allmälige Fortnahme von Wassermolecülen zur Herauskrystallisirung eines Hydrates Anlass gibt. Damit keine Übersättigung eintrete, wird man von Zeit zu Zeit in die Lösung solche Krystalle hineingeben, deren Kommen man vermuthet.

2. Die allmälige Krystallisation kann aber auch dadurch erreicht werden, dass man eine Lösung bei einer bestimmten

Sättigungstemperatur und dem dieser entsprechenden Druck zum Sieden bringt und die sich bildenden Wasserdämpfe durch Condensation wegführt.

Ich führte zunächst einige Versuche mit kohlensaurem Natron Na_2CO_3 nach der ersten Methode aus. Von diesem Salze kennt man bereits schon das 1., 3., 5., 6., 7., 10. und 15. Hydrat, so dass also die Bildung einer ganzen Reihe von bereits bekannten oder noch nicht bekannten Hydraten zu erwarten war, falls die Entstehung derselben überhaupt ausschliesslich eine Function der Temperatur ist.

Eine Eprouvette wurde mit einer für die Versuchstemperatur beinahe gesättigten Lösung von kohlensaurem Natron gefüllt und mit einem Stopfen mit drei Durchbohrungen verschlossen. Durch eine derselben ging die Zuleitungsröhre der getrockneten Luft, die desshalb unter der Flüssigkeit mündete, durch die andere die Abführungsröhre der feuchten Luft; endlich steckte noch ein Thermometer in dem Stopfen, um die Temperatur der Lösung genau bestimmen zu können. Die Eprouvette befand sich in einem Wasserbade, dessen Temperatur vermittelst eines Thermostaten innerhalb eines sehr kleinen Intervalles constant erhalten wurde. Die Luft ging vor Eintritt in die Lösung durch concentrirte Kalilauge, um die Kohlensäure derselben zu absorbiren, dann durch mit Schwefelsäure getränkte Bimssteine und Chlorcalciumröhren, so dass sie vollkommen trocken wurde. Der Luftstrom wurde so lange durchgeleitet, bis sich genug Krystalle gebildet hatten, um 3—4 Analysen nach der Trockenmethode ausführen zu können.

Die Trennung der gebildeten Krystalle von der Mutterlauge ist bekanntlich sehr schwierig auszuführen, trotzdem ist es mir in den meisten Fällen durch folgende Manipulation gelungen, dieselbe frei von der Mutterlauge zu erhalten. Ich erwärmte eine dicke Lage von Filtrirpapier genau auf die Temperatur, bei welcher der Versuch ausgeführt wurde, bei der die Krystalle entstanden. Zwischen solchem präparirten Papier wurden die Krystalle, nachdem die Mutterlauge davon abgegossen worden war, durch möglichst starkes Pressen in der hydraulischen Presse von der noch anhängenden Mutterlauge befreit. Genau abgewogene Mengen der auf diese Weise erhaltenen Krystalle wurden nach der Trockenbestimmungsmethode analysirt.

Nach diesem Verfahren wurden bei den Temperaturen 5°, 12°, 14°, 21°, 36°, 45°, 50°, 60°, 65°, 71°, 92° und 104° je 3—4 Versuche ausgeführt. Dieselben dauerten bei den niederen Temperaturen 10—12 Stunden, bei den höheren jedoch nur 3—4 Stunden.

Für die Temperaturen 5°, 12°, 14° und 21° C. erhielt ich jedesmal die Krystalle des 10. Hydrates, die durch die Analyse erhaltenen Procentgehalte differirten von dem berechneten höchstens um 0·5%.

Bei den übrigen Temperaturen, bei 36° und oberhalb derselben erhielt ich jedoch vollständig widersprechende Resultate, die bei einer und derselben Temperatur wiederholten Versuche ergaben keine übereinstimmende Werthe. Der Grund davon lag in der gleichzeitigen Bildung zweier verschiedener Hydrate. Die Zuleitungsröhre der trockenen Luft war natürlich an den Wandungen benetzt, es bildete sich daher beim Eintritt der trockenen Luft zunächst hier ein Hydrat von sehr geringem Wassergehalte, das sich auch auf dem Wege, den die Luftblasen nahmen, röhrenförmig fortsetzte und erst auf diesen Röhren setzten sich die eigentlichen Krystalle an. Da es nun nicht möglich war, diese beiden Hydrate von einander zu trennen, so hing der Procentgehalt rein nur von dem Mengenverhältniss der beiden gebildeten Hydrate ab. Diese Röhrenbildung gab auch Anlass zur häufigen Verstopfung der Röhre, so dass ich statt der einfachen Zuleitungsröhre eine ⊤ förmige Röhre anzuwenden gezwungen war, durch deren einen Schenkel ein Glasstab luftdicht hindurch ging, mit welchem ich die untere Öffnung derselben wieder frei machen und die Röhrenbildung, wenn nicht vollständig verhindern, so doch vermindern konnte. Trotz alldem war es mir nicht möglich aus dem erhaltenen Procentgehalte irgend welche Schlüsse ziehen zu können.

Bei näherer Überlegung findet man, dass das Fehlerhafte dieser Methode in dem Umstande liegt, dass die Dissociationstension der entstandenen Krystalle grösser ist als die Dampftension in der eintretenden Luft. Die Letztere muss daher trocknend auf die erst gebildeten Krystalle wirken. Man sollte also die Luft zuvor mit soviel Wasserdampf sättigen, dass die Dampftension derselben gleich ist jener der erwarteten Krystalle. Allein

dann würde die Operation sich allzusehr verlangsamt haben, da sie ohnehin schon sehr langwierig war.

Ich versuchte also die zweite Methode, bei bestimmten Temperaturen gesättigte Lösungen durch Änderung des Druckes und Constanthaltung der Temperaturen zum Sieden zu bringen.

Ein Kolben mit starken Wandungen und seitlicher Ansatzröhre war mit der für die Versuchstemperatur gesättigten Lösung gefällt und mit einem Stopfen mit drei Durchbohrungen verschlossen; eine für das Thermometer, die zwei anderen für zwei kurze, dicke Kupferdrähte, an welche zwei Platindrähte angelöthet waren, um nämlich einen schwachen elektrischen Strom zur Verhütung der Siedeverzüge durch die Flüssigkeit gehen zu lassen. Die Ansatzröhre des Kolbens führte zum Liebig'schen Kühler, letzterer stand mit der Luftpumpe in Verbindung. Zur besseren Constanthaltung des Druckes und Messung desselben war ein grosses Reservoir und ein Manometer eingeschalten. Die Verbindungen der einzelnen Theile des Apparates waren so gut dicht gemacht, dass selbst beim niedrigsten Druck von 10 Mm. der Stand des Manometers während einer halben Stunde sich nicht änderte, obwohl das Sieden der Lösung stattfand. Der Druck stieg nach dieser Zeit ein wenig in Folge der unvollständigen Condensation des Wasserdampfes, der den Druck im Innern erhöhte.

Der Kolben befand sich in einem Wasserbade, dessen Temperatur um 2—3° C. höher war, als die im Innern des Kolbens, damit die zur Unterhaltung des Siedens nöthige Wärmemenge gleichmässig zugeführt wurde. Bei jedem Versuche wurde eine für die Versuchstemperatur sehr nahe gesättigte Lösung in den Siedekolben hineingegeben und dann so lange die Luft aus Reservoir, Vorlage, Condensationsröhre und Kolben ausgepumpt, bis die Lösung langsam zu sieden anfing, das nach einiger Zeit zur Bildung schön ausgebildeter Krystalle Anlass gab.

In der folgenden Tabelle ist t die Versuchstemperatur, D der dabei stattfindende Druck in Millimeter, p der gefundene Procentgehalt der gebildeten analysirten Krystalle, π der berechnete Procentgehalt des dem gefundenen am nächsten kommenden Hydrates und M die Molecularformel des Hydrates.

Resultate:

t	D^{mm}	$p\%$	$\pi\%$	M
15° C.	10mm	63·79	62·937	$Na_2CO_3+10H_2O$
22	16	63·50	„	„
28	21	63·14	„	„
30	23	63·68	„	„
32	25	63·21	„	„
35	30	15·58	14·516	$Na_2CO_3+H_2O$
38	36	16·92	„	„
40	41	14·83	„	„
45	53	17·12	„	„
50	70	15·64	„	„
60	121	16·47	„	„
70	191	14·98	„	„
95° C.	491	15·12	„	„

Der Druck im Innern des Kolbens wurde nur beiläufig bestimmt, da es ja auf denselben hier nicht ankommt, dagegen wurden die Analysen der entstandenen Krystalle mit aller Sorgfalt ausgeführt. Zur Trennung derselben von der Mutterlauge wurde entweder nach der oben angegebenen Methode verfahren, oder in folgender Weise. Hatten sich an den Wandungen des Kolbens genügend viele Krystalle zu drei Analysen angesetzt, so wurde die Mutterlauge rasch abgegossen und mit Wasser von derselben Temperatur, bei welcher der Versuch ausgeführt wurde, die Krystalle abgespült, auf Filtrirpapier geworfen und schnell getrocknet. Ich erhielt auf diese Weise schön ausgebildete Krystalle, die bei der Analyse übereinstimmende Procentgehalte zu geben versprachen. Dem war jedoch nicht so, die drei ausgeführten Analysen derselben so erhaltenen Krystalle differirten oft um $2—4^0{}_0$.

Nun bemerkte ich bei einem der ersten Versuche, dass ausser an den Wandungen des Kolbens auch schöne klare und ziemlich grosse Krystalle an den Fäden sich angesetzt hatten, mit welchen die Platindrähte an dem Thermometer festgebunden waren. Dies brachte mich auf den Gedanken, mehrere Fäden vom Thermometer aus in die Lösung hineinragen zu lassen, damit sich die Krystalle an demselben ansetzen konnten. Es wurde dann immer der Stopfen mit den daranhängenden Krystallen rasch herausgenommen, auf einige Augenblicke in Wasser gegeben, um die Mutterlauge wegzuwaschen, schnell getrocknet und in gut schliessende Gefässe gegeben, worin sie abgewogen wurden. Auf diese Weise erhielt ich jedesmal für drei bei demselben Versuch ausgeführte Analysen übereinstimmende Procentgehalte, die in der Tabelle angeführt sind.

Aus den mitgetheilten Versuchen geht also folgendes Resultat hervor. Zwischen den Temperaturen 15° und 95° C. sind nur zwei Hydrate, das mit 1 und das mit 10 Molecülen Wasser, durch Entziehung des Wassers mittelst Verdampfens desselben sicher zu erhalten, und zwar bildet die Temperatur 34°, bei welcher das 10. Hydrat in seinem Krystallwasser schmilzt, die Grenze zwischen den beiden. Oberhalb 34 entsteht das 1., unterhalb das 10. Hydrat. Von den ausserdem bekannten Hydraten sind diejenigen mit 3, 5, 6 und 7 Molecülen Wasser (letzteres in zwei Modificationen) auf dem beschriebenen Wege nicht sicher darzustellen, sondern ihre Bildung ist ausser von der Temperatur noch von gewissen Zufälligkeiten, wie es scheint, insbesondere von der Bedingung abhängig, dass das 10. Hydrat in Folge von Übersättigung nicht entsteht. Es scheint daher die Existenz der übrigen Hydrate auf einem labilen Gleichgewichte zu beruhen, da dieselben neben der stabilen Verbindung mit 10 Molecülen nicht zu erhalten sind.

Man hätte sich also den Sachverhalt im Allgemeinen so vorzustellen. Wird eine Lösung eines Salzes allmälig concentrirt, oder die Temperatur derselben erniedrigt, so wird von einem bestimmten Punkte an zunächst für ein gewisses Hydrat der Sättigungspunkt überschritten, d. h. die Lösung wird für dieses Salz eine übersättigte. Ob die Krystallisation aber auch wirklich erfolgt, ist noch Sache des Zufalls. Concentrirt man weiter, so

wird nach und nach noch für ein weiteres, endlich für mehrere Hydrate ebenfalls die Lösung eine übersättigte. Alle die Hydrate, für welche diese Übersättigung besteht, sind dann möglich, d. h. sie können unter Umständen herauskrystallisiren. Aber unter denselben ist eine Rangordnung für die Wahrscheinlichkeit ihrer Bildung, und nur Eines dieser Hydrate, das stabilste, ist endlich sicher zu erhalten. Die Ausmittelung der Sättigungspunkte der einzelnen möglichen Hydrate ist jedenfalls schwierig und setzt den Besitz bereits fertiger Krystalle voraus. Vielleicht gelingt es mir bei einem anderen Salze in dieser Richtung vollständigere Resultate zu erlangen.

Über einige Nitroproducte aus der Reihe des Brenzcatechins.

Von **P. Weselsky** und **R. Benedikt.**

Aus dem Laboratorium für analytische Chemie an der technischen Hochschule in Wien.)

(Mit 3 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Mai 1882.)

Nitrobrenzcatechin.

Vor einigen Jahren hat Benedikt[1] beobachtet, dass bei der Einwirkung von salpetriger Säure auf eine ätherische Brenzcatechinlösung ein flüchtiges Nitrobrenzcatechin entsteht. Wir haben diesen Gegenstand weiter verfolgt und sind zu folgenden Resultaten gelangt.

Brenzcatechin wurde in Partien von je 10 Grm. in 500 CC. Äther gelöst und mit 4 CC. rother rauchender Salpetersäure versetzt. Nach 24 Stunden wurde die braune Flüssigkeit wiederholt mit Wasser ausgeschüttelt und der Äther, nach dem Abheben mit dem Scheidetrichter, vorsichtig abdestillirt. Der Rückstand wurde nach dem Verdünnen mit Wasser mit Wasserdampf destillirt.

Das gelbe Destillat wurde mit Äther ausgeschüttelt, und die nach dem Vertreiben des Äthers zurückbleibende Masse aus verdünntem Alkohol umkrystallisirt.

Das flüchtige Mononitrobrenzcatechin bildet lange, weiche, reingelbe Nadeln, welche bei 86° schmelzen und in Wasser ziemlich leicht löslich sind. Die Lösungen färben sich mit Ätzkali intensiv purpurroth, beim Stehen an der Luft geht die Farbe in Braun über. Ätzbaryt erzeugt einen rothen Niederschlag, welcher mit einem Überschusse des Fällungsmittels blauviolett wird.

[1] Wien. Akad. Ber. II, Dec.-Heft 1877.

Concentrirte Salpetersäure wirkt heftig auf das Nitrobrenzcatechin ein, es entstehen Kohlensäure und Oxalsäure, aber kein höher nitrirtes Brenzcatechin.

Eine Stickstoffbestimmung ergab:

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_3.NO_2(OH)_2$
N.....	9·03	9·40.

Ein nichtflüchtiges Mononitrobrenzcatechin findet sich in beträchtlicher Menge in der Flüssigkeit, aus welcher das flüchtige abdestillirt wurde. Es wird am zweckmässigsten durch Ausschütteln mit Äther, Umkrystallisiren aus Xylol, welches die harzigen Verunreinigungen nicht aufnimmt, und endlich aus verdünntem Alkohol gereinigt.

Es erwies sich als identisch mit dem von Benedikt l. c ausführlich beschriebenen Nitrobrenzcatechin. Wir erhielten es diesmal in langen, gelblichen, nicht biegsamen Nadeln. Der Schmelzpunkt wurde um 11° höher, nämlich bei 168° gefunden, was seinen Grund wohl in der grösseren Reinheit der Substanz hat.

Nach dem, was über die Schmelzpunkte und über die Flüchtigkeit der Mononitroderivate von Phenolen bekannt ist, erscheint es uns sehr wahrscheinlich, dass der Nitrogruppe im flüchtigen Nitrobrenzcatechin die Stellung $C_6H_3.\overset{1}{O}H.\overset{2}{O}H.\overset{3}{N}O^2$, im nichtflüchtigen die Stellung $C_6H_3.\overset{1}{O}H.\overset{2}{O}H.\overset{4}{N}O_2$ zukomme.

Carboxytartronsäure [1] haben wir als Nebenproduct der Einwirkung von rauchender Salpetersäure auf die ätherische Brenzcatechinlösung nicht auffinden können. Vielleicht entsteht dieselbe bei fortgesetzter Einwirkung der Dämpfe der salpetrigen Säure auf eines der beiden Nitrobrenzcatechine.

Nitroeugenol.

Das Eugenol, welches zu den folgenden Versuchen diente, wurde nach der Methode von Wassermann[2] aus Nelkenöl bereitet.

---

[1] Gruber. Wien. Akad. Ber. 79. II. Jänner-Heft 1879. — v. Barth. Monatshefte f. Chem. I. 1869.

[2] Liebigs Ann. 179.369.

Je 10 Grm. Eugenol wurden in circa 500 CC. Äther gelöst und mit 4 CC. rauchender Salpetersäure versetzt. Aus der rothbraunen Flüssigkeit wurde nach 24 Stunden die Hauptmasse der nicht in Reaction getretenen Salpetersäure durch tropfenweisen Zusatz von alkoholischer Kalilauge ausgefällt. Dann wurde die Flüssigkeit vom salpetersaurem Kali abgegossen und neuerdings so lange mit alkoholischer Kalilauge versetzt, als noch ein rother Niederschlag von Nitroeugenolkalium entstand.

Der Niederschlag wurde in Wasser gelöst und das freie Nitroeugenol mit verdünnter Schwefelsäure ausgefällt. Das Product lässt sich nach dem Abfiltriren und Trocknen durch Extraction mit siedendem Petroleumäther sofort vollständig rein erhalten. Beim Erkalten scheidet sich ein Theil des Nitroeugenols erst in Form gelber Öltropfen ab, dieselben gehen aber nach einigem Stehen in grosse orangerothe Krystalle über.

Die Ausbeute ist nahezu quantitativ. Dass sich, wie sonst bei der Nitrirung von Phenolen, nicht gleichzeitig ein isomeres Nitroeugenol bildet, erklärt sich aus der Stellung der Seitenketten im Eugenol. Das Eugenol $C_6H_3 . \overset{1}{C_3H_5} . \overset{3}{OCH_3} . \overset{4}{OH}$ lässt nämlich nach der Regel, dass die Nitrogruppe in die Ortho- oder Parastellung zur Hydroxylgruppe eintritt, nur Ein Mononitroproduct zu, welchem die Formel $C_6H_2 . \overset{1}{C_3H_5} . \overset{3}{OCH_3} . \overset{4}{OH} . \overset{5}{NO_2}$ zugeschrieben werden muss.

Das Nitroeugenol ist somit ein Orthonitrophenol. Damit ist auch in Übereinstimmung, dass es mit Wasserdämpfen flüchtig ist.

Das Mononitroeugenol besteht aus grossen, glänzenden Krystallen, welche dem Kaliumbichromat täuschend ähnlich sehen. Es schmilzt bei 43—44° und ist unzersetzt destillirbar.

Die Elementaranalyse ergab folgende Zahlen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_{11}NO_4$
C	57·50	57·41
H	5·49	5·26
N	7·01	6·70
O	—	30·62.

Wir verdanken Herrn Professor Ditscheiner die folgenden Angaben über die Krystallform:

Zweifach schiefprismatisch (triclin).

$$a : b : c = 1 : 0{\cdot}5471 : 0{\cdot}6572.$$

Fig. 1.

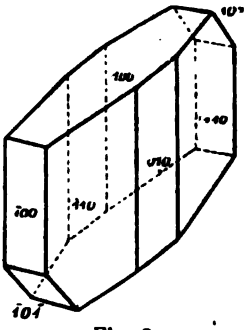
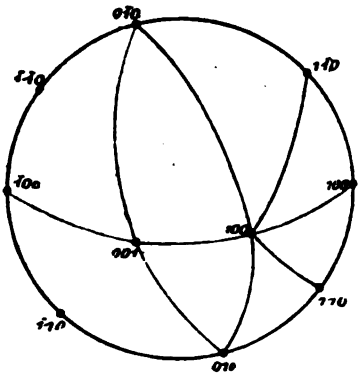


Fig. 2.



$YZ = 97°5'$; $XZ = 82°11'$
$XY = 91°44'$.

Beobachtete Flächen: 100. 010.001.110.$\bar{1}$10.101:

	Beobachtet	Berechnet
110.100 =	61°24'*	—
1$\bar{1}$0.100 =	62 55*	—
010.100 =	89 13	89°27'
110.010 =	28 7	28 3
0$\bar{1}$0.100 =	—	90 33
0$\bar{1}$0.1$\bar{1}$0 =	27 25	27 38
101.100 =	62 5*	—
001.100 =	97 40*	—
101.001 =	35 25	35 35
101.1$\bar{1}$0 =	83 21*	—
101.110 =	71 38	71 21
001.110 =	87 36	87 31
$\bar{1}\bar{1}$0.001 =	92 30	92 29
$\bar{1}$10.001 =	80 14	80 14
1$\bar{1}$0.001 —	99 42	99 46
001.010 =	—	83 5

In Wasser löst sich Nitroeugenol sehr schwer auf, in Äther und Alkohol ist es leicht löslich, aus siedendem Petroleum scheidet es sich beim Erkalten nahezu vollständig aus.

Mit Ätzkali gibt es ein schön krystallisirendes, metallisch glänzendes Salz, welches sich mit orangerother Farbe in Wasser löst. Ätzbaryt fällt es aus der verdünnten weingeistigen Lösung in Form eines flockigen Niederschlages aus.

Beim Erhitzen mit concentrirter Salpetersäure wird das Nitroeugenol vollständig zerstört.

Amidochlorhydroeugenol. Erwärmt man Nitroeugenol mit Zinn und gleichen Volumtheilen rauchender Salzsäure und Wasser, so tritt eine stürmische Reaction ein. Nach einiger Zeit ist alles Nitroeugenol verschwunden und die Flüssigkeit nahezu

entfärbt. Man verdünnt mit Wasser, fällt das Zinn mit Schwefelwasserstoff, filtrirt ab und dampft ein. Beim Erkalten scheidet sich bei genügender Concentration eine reichliche Krystallisation aus, welche nach dem Umkrystallisiren aus Wasser aus weissen Nadeln oder Blättchen besteht.

Diese Verbindung ist salzsaures Amidochlorhydroeugenol von der Formel:

$$C_6H_2\begin{cases}C_3H_6Cl\\OCH_3\\OH\\NH_2.HCl+H_2O.\end{cases}$$

Die Substanz gibt bei mehrtägigem Trocknen unter der Pumpe ihr Krystallwasser ab.

	Gefunden	Berechnet
H_2O	6·90	6·67.

Bei der Analyse der getrockneten Substanz wurden folgende Zahlen gefunden:

	Gefunden		Berechnet für $C_{10}H_{15}NO_2Cl_2$
C	48·09		47·62
H	6·25		5·95
N	—		5·56
Cl	28·32	28·73	28·17
O	—		12·70

Die eine Chlorbestimmung wurde durch Glühen mit Ätzkalk, die zweite in der Weise ausgeführt, dass die wässerige Lösung der Substanz mit Salpetersäure und salpetersaurem Silberoxyd gekocht wurde.

Setzt man zu der wässerigen verdünnten Lösung des Chlorhydrates Ammoniak bis zur schwach alkalischen Reaction hinzu, so erhält man einen rein weissen flockigen Niederschlag. Bei Zusatz einer grösseren Menge Ammoniak färbt sich die Flüssigkeit schmutzig-violett.

Der Niederschlag ist in siedendem Wasser unter theilweiser Zersetzung löslich, aus Alkohol lässt er sich in Form aneinandergereihter, perlmutterglänzender Blättchen erhalten.

Das Amidochlorhydroeugenol $C_6H_2 . C_3H_6Cl . OCH_3 . OH . NH_2$ schmilzt bei 97°, es ist destillirbar. Die wässerige Lösung nimmt mit Ammoniak eine vorübergehende Gelbfärbung an. Die Lösung in verdünnter Salpetersäure trübt sich nicht bei Zusatz von salpetersaurem Silberoxyd, beim Erwärmen fällt aber Chlorsilber aus.

Die Elementaranalyse ergab folgende Resultate:

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_{14}NO_2Cl$
C	55·70	55·69
H	6·80	6·49.

Nitroacetyleugenol.

Nitroeugenol lässt sich durch Erhitzen mit Essigsäureanhydrid (2 Theile) und entwässertem essigsaurem Natron ($^1/_2$ Theil) sehr leicht in Nitroacetyleugenol

$$C_6H_2 \begin{cases} C_2H_5 \\ OCH_3 \\ OC_2H_3O \\ NO_2 \end{cases}$$

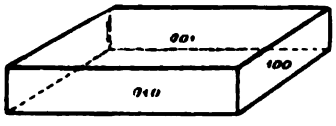
überführen. Die ölige Ausscheidung, welche beim Eingiessen in Wasser entsteht, erstarrt nach einiger Zeit zu zollgrossen Krystallen, welche aus Alkohol umkrystallisirt werden können.

Glänzende, klare Tafeln, welche bei 61° schmelzen.

	Gefunden	Berechnet
C	57·77	57·37
H	5·24	5·18
N	—	5·58
O	—	31·87

Krystallgestalt nach Herrn Professor Ditscheiner:

Fig. 3.



Zweifach schiefprismatisch (triclin).

Beob. Flächen: 100.010.001.

001.010 = 103°52′
001.100 = 83 6
010.100 = 89 21.

Nitrovanillinsäure.

Wenn man Acetylnitroeugenol nach der von Tiemann[1] für Acetylkreosol und Acetyleugenol angegebenen Methode mit Permanganat bei circa 70° oxydirt, dann vom ausgeschiedenen Manganhyperoxyd abfiltrirt und die Flüssigkeit mit Natronlauge eindampft, so erhält man eine Nitrovanillinsäure von der Formel:

$$C_6H_2\begin{cases} COOH & (1) \\ OCH_3 & (3) \\ OH & (4) \\ NO_2 & (5) \end{cases}$$

Man gewinnt sie aus der angesäuerten Lösung durch Ausschütteln mit Äther und reinigt sie durch Umkrystallisiren aus Wasser oder verdünntem Alkohol.

Sie bildet gelbe Nadeln und schmilzt bei circa 202°, ohne sich zu zersetzen. Bei weiterem Erhitzen gibt sie ein krystallinisches Sublimat, welches den Geruch der Vanille besitzt. In siedendem Wasser löst sie sich mit gelber Farbe auf und krystallisirt beim Erkalten sofort wieder aus. Die Lösung in Ammoniak ist intensiv orangegelb.

Die Analyse ergab folgende Zahlen:

	Gefunden	Berechnet für $C_8H_7NO_6$
C	45·57	45·07
H	3·62	3·29
N	6·71	6·57
O	—	45·07

Von Tiemann[2] ist bereits eine Nitrovanillinsäure durch Nitriren der Acetvanillinsäure und Erwärmen des Productes mit verdünnter Natronlauge dargestellt worden. Diese Verbindung ist isomer und nicht identisch mit der von uns erhaltenen Säure, wie zur Evidenz aus der Beschreibung hervorgeht, welche Tieman gengeben hat:

---

[1] Berl. Ber. IX. 418.

[2] Berl. Ber. IX. 948.

„Sie bildet im völlig reinen Zustande weisse glänzende, specifisch schwere Nadeln und fängt bei 210° an sich zu zersetzen, ohne jedoch bei dieser Temperatur schon zu schmelzen. Die Säure ist schwer löslich selbst in heissem Wasser, aber einmal gelöst, scheidet sie sich erst nach längerer Zeit und zunächst stets als Öl aus, welches nach einigen Stunden krystallinisch erstarrt. In wässerigem Ammon löst sie sich mit gelber Farbe auf."

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass wir bei der Nitrirung von Pyrogallol in ätherischer Lösung nur das von Barth[1] beschriebene Mononitropyrogallol erhielten.

---

[1] Monatshefte I. 1882.

Beiträge zur Theorie des Doppelverhältnisses und zur Raumcollineation.

Von Dr. **Moriz Allé**,

Professor an der k. k. technischen Hochschule in Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1882.)

Die Versuche, welche in den letzten Jahren gemacht wurden, um die Theorie der binären Formen geometrisch zu interpretiren, haben dazu aufgefordert, dem von Mobius eingeführten Begriffe des Doppelverhältnisses von vier beliebigen Punkten der Ebene eine vermehrte Aufmerksamkeit zu widmen.

Was die erwähnte Interpretation betrifft, so ist auf eine Arbeit von Eug. Beltrami: „Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche" (Accademia di Bologna 1870) hinzuweisen, insbesondere aber auf die diesbezüglichen Arbeiten von Fel. Klein und zwar:

1. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872.
2. Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Math. Annalen, B. IX.
3. Einen mir unzugänglichen Aufsatz in den Sitzungsberichten der phys. med. Societät zu Erlangen.

Diesen Arbeiten schliesst sich die Inauguraldissertation von L. Wedekind (Erlangen 1875) an, in welcher die Klein'sche Interpretation weiter ausgeführt und verwerthet wird.

Die geometrische Interpretation der binären Formen in der durchgebildeten Gestalt, welche ihr von Klein gegeben wurde, stützt sich auf die Möglichkeit, die Punkte einer Kugel projectivisch einander zuzuordnen.

Diese Zuordnung wird durch eine Raumcollineation vermittelt, bei welcher die Kugel sich selbst entspricht.

Zur Theorie des Doppelverhältnisses und zur analytischen Darstellung dieser besonderen Raumcollineation einige Beiträge zu liefern, ist der Zweck vorliegender Abhandlung.

I.

Wenn $z = x+iy$ einen Punkt der Ebene darstellt, so sei das Doppelverhältniss der vier Punkte $z_1\ z_2\ z_3\ z$

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} : \frac{z-z_1}{z-z_2} = ke^{i\varphi}. \qquad 1)$$

Daraus folgt;

$$l \cdot \frac{z-z_1}{z-z_2} = l \cdot \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} - l.k-i\varphi,$$

welche Gleichung, wenn die Abstände der Punkte z und z_3 von $z_1\ z_2$ beziehungsweise mit $r_1\ r_2$ und $r_{13}\ r_{23}$ bezeichnet werden, $\vartheta_1\ \vartheta_2$ und $\theta_1\ \theta_2$ ihre Winkel mit der Richtung von z_1 nach z_2 bedeuten, und zur Abkürzung

$$\theta_1-\theta_2-\varphi = \alpha \qquad \frac{1}{k} \cdot \frac{r_{13}}{r_{23}} = e^{\beta} \qquad 2)$$

gesetzt wird in die beiden

$$l \cdot \frac{r_1}{r_2} = \beta \qquad \vartheta_1-\vartheta_2 = \alpha \qquad 3)$$

zerfällt, die zwei conjugirte Kreisschaaren darstellen.

Betrachtet man $z_1\ z_2\ z_3$ als constant und nur z als veränderlich, so erkennt man, dass die erste Gleichung 3) den Ort der Punkte z gibt, für welche k constant ist, während die zweite den Ort der Punkte z darstellt, für welche φ unverändert bleibt.

Bei gegebenem Werthe des Doppelverhältnisses ist somit der vierte Punkt z zu drei gegebenen, welche mit ihm dieses Doppelverhältniss liefern sollen, einer der beiden Punkte, in welchen sich die beiden Kreise 3) treffen; der andere ist jener, für welchen das Doppelverhältniss den Werth $-ke^{i\varphi}$ annimmt.

Werden in 1) z und z_2 als veränderlich, dagegen z_1 und z_3 sowie k und φ als constant angesehen, so stellt 1) eine lineare Substitution dar, durch welche zwischen den Punkten z und z_2

zweier Systeme in der xy-Ebene eine Kreisverwandtschaft vermittelt wird.

Verändert der Punkt z_2 seine Lage so, dass er eine Gerade beschreibt, welche durch z_3 geht, so bewegt sich der entsprechende z auf einem Kreise, welcher der Ort solcher Punkte ist, die mit $z_1 z_2 z_3$ ein constantes Doppelverhältniss $ke^{i\varphi}$ bestimmen.

Betrachtet man hingegen z und z_1 als veränderlich und lässt z_1 eine z_3 enthaltende Gerade beschreiben, so entspricht ihr vermöge der Substitution 1), in welcher jetzt z_2 und z_3 als Constante auftreten, ein Kreis als Ort solcher Punkte z, welche mit den drei übrigen dasselbe constante Doppelverhältniss liefern.

Die Aufgabe, zu drei gegebenen Punkten $z_1 z_2 z_3$ den vierten zu finden, welcher mit ersteren ein gegebenes Doppelverhältniss hat, kommt somit auf die eben angedeutete Abbildungsaufgabe zurück.

Der gesuchte Punkt z muss einer der beiden Punkte sein, in denen die früher erwähnten Kreise sich schneiden, welche den beiden durch z_3 gehenden Geraden entsprechen.

Aber die beiden Kreise gehen durch den Punkt z_3, weil beim Zusammenfallen von z_2 mit z_3, und z_1 mit z_3, jedesmal z mit z_3 zusammenfällt, wie unmittelbar aus 1) folgt.

Durch diesen Umstand wird die Bestimmung von z eine eindeutige.

Es seien $z_1 z_2 z_3 z$ vier Punkte von gegebenem Doppelverhältnisse und z_1 der Ursprung eines schiefwinkligen Axensystemes.

Die Verbindungslinie von z_1 und z_3 mit demselben Sinne wie $z_3 - z_1$ sei die x-Axe, als Axe der reellen Zahlen, dagegen eine durch z_1 zu $z_3 z_2$ parallel gezogene Gerade von gleichem Sinne wie $z_2 - z_3$ die y-Axe und ε der Axenwinkel.

Dann ist

$$z_1 = 0 \quad z_2 = x_2 + y_2 e^{i\varepsilon} \quad z_3 = x_3 \quad z = x + y e^{i\varepsilon}$$

und die Gleichung 1) geht über in

$$x_3[x - x_3 + (y - y_2)e^{i\varepsilon}] + k y_2 (x + y e^{i\varepsilon}) e^{i(\varphi+\varepsilon)} = 0. \qquad 4)$$

Bezeichnet man

$$\varphi + \varepsilon = \varphi_1 \quad \varphi + 2\varepsilon = \varphi_1 + \varepsilon = \varphi_2, \qquad 5)$$

so löst sich die Gleichung 4) in die beiden auf:

$$x_2(x-x_3)+x_3(y-y_2)\cos\varepsilon+ky_2x\cos\varphi_1+ky_2\cdot y\cos\varphi_2=0 \quad 6)$$

$$x_3(y-y_2)\sin\varepsilon+ky_2x\sin\varphi_1+ky_2\cdot y\sin\varphi_2=0. \quad 7)$$

Betrachtet man in diesen Gleichungen y_2xy als veränderlich, so beschreibt z_2 eine durch z_3 gehende Gerade, und wenn man y_2 eliminirt, so folgt für den entsprechenden Ort von z

$$k\sin\varphi_1(x^2+2kxy\cos\varepsilon+y^2)-x_3(\sin\varepsilon+k\sin\varphi_1)\cdot x-kx_3\sin\varphi_2\cdot y+x_3^2\sin\varepsilon=0,$$

welcher offenbar z_3 enthält.

Führt man in der letzten Gleichung zur Bestimmung von z die rechtwinkligen Coordinaten $\xi\eta$ ein, bezogen auf denselben Ursprung und dieselbe x-Axe, so ist

$$\xi=x+y\cos\varepsilon \qquad \eta=y\sin\varepsilon, \quad 8)$$

und findet man, wenn

$$\left.\begin{aligned}\sin\varepsilon+k\sin\varphi_1&=a\\ \cos\varepsilon-k\cos\varphi_1&=b\end{aligned}\right\} \quad 9)$$

gesetzt wird

$$(\xi-p)^2+(\eta-q)^2=R^2 \quad 10)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}p&=x_3\cdot\frac{a}{2k\sin\varphi_1}\\ q&=-x_3\cdot\frac{b}{2k\sin\varphi_1}\\ R^2&=x_3^2\cdot\frac{1-2k\cos\varphi+k^2}{4k^2\sin_1^2}\end{aligned}\right\} \quad 11)$$

Die Grössen a und b sind sehr leicht als Projectionen auf den rechtwinkligen Axen y und x zu construiren, und ergibt sich dabei $2k\sin\varphi_1$ als Projection auf der y-Axe. Die erste Gleichung 11) gestattet dann sofort p zu construiren.

Weil aus den beiden ersten Gleichungen 11) folgt

$$\frac{q}{p}=-\frac{b}{a},$$

so steht die Gerade, welche z_1 mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindet, senkrecht zu einer Geraden mit dem Richtungscoëfficienten $\frac{a}{b}$. Auf diese Art wird, weil p schon construirt ist, sehr bequem der Mittelpunkt gefunden.

Damit ist aber der Kreis vollständig bestimmt, weil er durch z_3 gehen muss.

Wenn z_1 eine durch z_3 gehende Gerade beschreibt, so gelten zur Bestimmung des von z durchlaufenen entsprechenden Kreises dieselben Gleichungen 11), wenn man nur darin x_3 durch y_2 ersetzt, als Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten z_2 wählt und die Richtung der x-Axe mit der Richtung von z_3 nach z_2 zusammenfallen lässt.

Indem man also mit den angedeuteten Abänderungen die frühere Construction wiederholt, wobei a, b und $2k\sin\varphi_1$ unverändert bleiben, erhält man den zweiten Kreis, der, wie der frühere, durch z_3 geht und als zweiten Schnittpunkt mit diesem den Punkt z hat, der mit $z_1\, z_2\, z_3$ das gegebene Doppelverhältniss liefert.

Für das harmonische Doppelverhältniss wird die Construction des gesuchten vierten Punktes z der durch z_1 und z_2 von z_3 getrennt ist, besonders einfach.

In diesem Falle ist nämlich

$$k = 1 \qquad \varphi = \pi$$

also

$$a = 0 \qquad b = 2\cos\varepsilon,$$

folglich

$$p = 0 \qquad q = x_3 \operatorname{cotg}\varepsilon \qquad R = \frac{x_3}{\sin\varepsilon}.$$

Man erhält darnach die Mittelpunkte der beiden Kreise als Durchschnittspunkte zweier Paare von Senkrechten, die man zu den Linien $z_1\, z_3$ und $z_2\, z_3$ einmal aus den Punkten z_1 und z_3, dann aus z_3 und z_2 zieht.

Diese Construction ist eben so einfach wie die von Beltrami angegebene.

Betrachtet man jetzt z_1 und z_3 als fest, sowie den Werth des Doppelverhältnisses $ke^{i\varphi}$ als gegeben, so wird für constantes y_2

der Punkt z_2 einen Kreis mit Mittelpunkt in z_3 beschreiben, dem vermöge 1) wieder ein Kreis entspricht, der von z durchlanfen wird.

Dieser Kreis, und der Kreis 10), welcher der von z_2 beschriebenen Verbindungslinie von z_3 und z_2 entspricht, sind zu einander orthogonal, weil die beiden Orte von z_2, denen diese Kreise vermöge 1) entsprechen, es sind.

Um den entsprechenden Ort eines von z_2 beschriebenen Kreises mit z_3 als Mittelpunkt zu finden, bemerke man, dass die Gleichungen 6) und 7) durch Einführung von ξ und η mittelst 8) die Form annehmen:

$$\begin{aligned}(x_3+ky_2\cos\varphi_1)\xi-ky_2\sin\varphi_1\cdot\eta &= x_3^2+x_3y_2\cos\varepsilon\\ ky_2\sin\varphi_1\cdot\xi+(x_3+ky_2\cos\varphi_1)\eta &= x_3y_2\sin\varepsilon\end{aligned} \qquad 12)$$

oder

$$[ky_2(\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi)-x_3y_2]\cos\varepsilon-ky_2(\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi)\sin\varepsilon = x_3(x_3-\xi)$$

$$ky_2(\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi)\cdot\cos\varepsilon+[ky_3(\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi)-x_3y_2]\sin\varepsilon = -x_3\eta$$

Eliminirt man hieraus ε und setzt

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= x_3\cdot\frac{ky_2^2\cos\varphi-x_3^2}{k^2y_2^2-x_3^2}\\ \mu &= -x\cdot\frac{k^2y_2^2\sin\varphi}{k^2y_2^2-x_3^2}\\ \rho^2 &= x_3^4\cdot\frac{y_2^2(1-2k\cos\varphi+k^2)}{(k^2y_2^2-x_3^2)^2}\end{aligned}\right\} \qquad 13)$$

so findet man für den entsprechenden Ort des von z_2 beschriebenen Kreises die Gleichung

$$(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2=\rho^2 \qquad 14)$$

Wenn die Gerade, welche z_2 beschreibt, beliebig durch z_3 geht, und der Punkt, welcher einen Kreis um z_3 beschreibt, beliebig auf einer durch z_3 gehenden Geraden liegt, so sind beziehungsweise ε und y_2 variabel. Die Kreise 10) bei veränderlichem ε und die Kreise 14) bei veränderlichem y_2 bilden dann zwei conjugirte Kreisschaaren, weil sie Abbildungen aller durch

z_3 gehenden Geraden und aller um z_3 beschriebenen Kreise sind. Aus 9) und 11) folgt

$$k(2p-x_3)\sin\varphi\cos\varepsilon+[k(2p-x_3)\cos\varphi-x_3]\sin\varepsilon=0$$

$$[k(2q\sin\varphi-x_3\cos\varphi)+x_3]\cos\varepsilon+k(2q\cos\varphi+x_3\sin\varphi)\sin\varepsilon=0$$

und somit für den Ort der Mittelpunkte der Kreise 10) bei veränderlichem ε

$$(k-\cos\varphi)p+\sin\varphi\,.\,q=x_3\,.\,\frac{k^2-1}{2k} \qquad 15)$$

hingegen für den Ort der Mittelpunkte der Kreise 14) bei veränderlichem y_2 aus 13)

$$\sin\varphi\,.\,\lambda+(\cos\varphi-k)\mu=x_3\sin\varphi \qquad 16)$$

Aus 15) und 16) findet man die Coordinaten x_0y_0 des Schnittpunktes dieser beiden zu einander senkrechten Geraden

$$\begin{aligned} x_0&=x_3\,.\,\frac{k+\cos\varphi}{2k} \\ y_0&=-x_3\,.\,\frac{\sin\varphi}{2k} \end{aligned} \qquad 17)$$

Wird dieser Punkt als neuer Ursprung gewählt, die Gerade 16) zur x-Axe, die Gerade 15) zur y-Axe angenommen, und

$$\sqrt{1+k^2-2k\cos\varphi}=\Delta \qquad \frac{1}{k}\frac{x_3}{y_2}=e^3 \qquad 18)$$

gesetzt, so werden die von den Kreisen 10) und 14) gebildeten conjugirten Kreisschaaren dargestellt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x^2+(y-x_3\frac{\Delta}{2k}\operatorname{cotg}\varphi_1)^2&=\left(\frac{x_3\Delta}{2k\sin\varphi_1}\right)^2 \\ \left[x-x_3\,.\,\frac{\Delta}{2k}\frac{C(\beta)}{S(\beta)}\right]^2+y^2&=\left[\frac{x_3\Delta}{2kS(\beta)}\right]^2 \end{aligned} \qquad 19)$$

wo C und S die Functionszeichen der hyperbolischen Functionen bedeuten.

II.

Die lineare Substitution

$$z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \qquad \alpha\delta-\beta\gamma = \Delta \tag{1}$$

kann bekanntlich aus einfacheren Substitutionen zusammengesetzt werden, und zwar, wenn

$$\frac{\alpha}{\gamma} = a \qquad -\frac{\Delta}{\gamma} = b \tag{2}$$

gesetzt wird, aus den folgenden:

$$z_0 = \gamma z+\delta \tag{3}$$

und

$$z' = a+\frac{b}{z_0} \tag{4}$$

Für die sich selbst entsprechenden Punkte der durch 1) zwischen den Punkten z und z' festgestellten Kreisverwandtschaft erhält man

$$\gamma z^2-(\alpha-\delta)z-\beta = 0 \tag{5}$$

also

$$z = \frac{\alpha-\delta \pm \sqrt{(\alpha+\delta)^2-4\Delta}}{2\gamma}$$

Sie sind reell so lange

$$4\Delta < (\alpha+\delta)^2 \tag{6}$$

und diese Annahme soll im Folgenden festgehalten werden.

Bezeichnet man die Wurzeln von 5) mit z_1 und z_2, so sind dann in den Gleichungen

$$z_1+z_2 = \frac{\alpha-\delta}{\gamma} = S \qquad z_1-z_2 = \frac{\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4\Delta}}{2\gamma} = T \tag{7}$$

S und T beide reell, soferne man nur reelle Coëfficienten der Substitution 1) betrachtet, und für die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte z_1 und z_2 folgt.

$$x_1+x_2 = S \qquad y_1+y_2 = 0$$
$$x_1-x_2 = T \qquad y_1-y_2 = 0$$

Die beiden sich selbst entsprechenden Punkte liegen auf der x-Axe und ihre Abstände vom Ursprunge sind bestimmt durch

$$x_1 = \frac{S+T}{2} \qquad x_2 = \frac{S-T}{2} \tag{8}$$

Wendet man auf eine Gerade

$$ux+vy+1 = 0$$

nach einander die Substitutionen 3) und 4) an, so entspricht dieser Geraden vermöge 1) der Kreis

$$(x'-a-A)^2+(y'-B)^2 = A^2+B^2$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{bu}{\gamma-\delta u} = A \qquad \frac{bv}{\gamma-\delta u} = B$$

gesetzt ist. Wenn u und v veränderlich sind, so gehen die allen Geraden der Ebene entsprechenden Kreise durch den Punkt

$$z' = a = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Einem Kreise

$$(x-p)_1^2+(y-q)^2 = R^2 \tag{9}$$

entspricht zufolge 1) wieder ein Kreis, dessen Gleichung

$$(x'-a-P)^2+(y'-Q)^2 = R'^2 \tag{10}$$

ist, mit den Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} L &= (\delta+\gamma p)^2+\gamma^2(q^2-R^2) \\ P &= \frac{b(\delta+\gamma p)}{L} \\ Q &= -\frac{b\gamma q}{L} \\ N &= \frac{b^2}{L} \\ R'^2 &= P^2+Q^2-N \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wenn man die beiden Punktsysteme z und z' stereographisch auf eine Kugel projicirt, so erhält man auf ihr eine Zuordnung zweier Punktsysteme, deren selbstentsprechende Punkte die Projectionen der durch 5) bestimmten Punkte der Ebene xy sind. Diese Zuordnung ist identisch mit jener, welche eine Raumcollineation hervorruft, bei welcher die Kugel in sich selbst transformirt wird.

Eine beliebige Ebene nämlich schneidet die Kugel in einem Kreise. Wird er stereographisch auf die Ebene projicirt, so entspricht dieser Projection vermöge 1) ein Kreis derselben Ebene Projicirt man letzteren nach der Kugel, so erhält man einen Kreis auf der Kugel, der in einer eindeutig bestimmten Ebene liegt.

Auf diese Art wird einer beliebigen Ebene die letztere collinear zugeordnet, und dabei geht ein Kugelkreis wieder in einer solchen über, wird also die Kugel in sich selbst übergeführt.

Um diese Collineation analytisch darzustellen, werde eine Kugel vom Durchmesser c construirt, welche die xy-Ebene im Ursprunge O so berührt, dass der andere Endpunkt des Durchmessers, O' in die positive Z-Axe fällt.

Die Gleichung dieser Kugel

$$x^2+y^2+(z-{}^1/_2c)^2=\frac{c^2}{4} \qquad 12)$$

und einer beliebigen Ebene

$$ux+vy+wx+1=0 \qquad 13)$$

liefern für die Projection ihres Schnittkreises von O' aus auf die xy-Ebene

$$(x-p)^2+(y-q)^2=R^2, \qquad 14)$$

wo

$$2p=-\frac{c^2u}{1+cw} \quad 2q=-\frac{c^2v}{1+cw} \quad R^2=p^2+q^2-\frac{c^2}{1+cw} \qquad 15)$$

Ist dagegen ein Kreis 14) in der Projectionsebene durch pqR gegeben, so ist der Schnitt seines Projectionskegels mit der Kugel ein Kreis, dessen Ebene die Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{2p}{p^2+q^2-R^2} \\ v &= -\frac{2q}{p^2+q^2-R^2} \\ w &= -\frac{p^2+q^2-R^2-c^2}{c(p^2+q^2-R^2)} \end{aligned}\right\} \qquad 16)$$

besitzt.

Sucht man zu 14) den vermöge 1) entsprechenden Kreis, so hat seine Gleichung die Form:

$$(x-p')^2+(y-q')^2 = R'^2, \qquad 17)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} p' &= a+P = a+\frac{b(\delta+\gamma p)}{L} \\ q' &= Q = -\frac{b\gamma q}{L} \\ R'^2 &= P^2+Q^2-N \end{aligned}\right\} \qquad 18)$$

und

$$L = \delta^2+2\gamma\delta p+\gamma^2(p^2+q^2-R^2)$$

auch in die Form

$$L = 2\delta(\delta+\gamma p)-\delta^2+\frac{c^2\gamma^2}{1+cw} \qquad 19)$$

gebracht werden kann, wenn man 15) berücksichtigt.

Projicirt man den Kreis 17) auf die Kugel, so ergibt sich für die Ebene, in welcher der Kugelkreis liegt, unter Benützung von homogenen Coordinaten $u'\ v'\ w'\ s'$

$$\left.\begin{aligned} u' &= -2p' \\ v' &= -2q' \\ w' &= -\frac{1}{c}[p'^2+q'^2-R'^2-c^2] = \frac{1}{c}[a^2+2aP+N-c^2] \\ s' &= p'^2+q'^2-R'^2 = a^2+2aP+N = c^2-cw'. \end{aligned}\right\} \qquad 20)$$

Werden hier die rechten Seiten durch $u\ v\ w$ ausgedrückt, so folgt

$$L(1+cw).u' = c^2\gamma(b+2a\delta)u-2c\delta(b+a\delta).\omega-2[ac^2\gamma^2+\delta(b+a\delta)]$$

$$L(1+cw).v' = -b\gamma c^2.v$$

$$c\,L(1+cw).w' = c^2\gamma[(a^2-c^2)\delta+ab]u+c[c^2\delta^2-(b+a\delta)^2]w- \\ -[(a^2-c^2)(c^2\gamma^2+\delta^2)+2ab\delta+b^2]$$

$$L(1+cw).s' = -ac^2\gamma(b+a\delta)u+c(b+a\delta)^2w+ \\ [(b+a\delta)^2+a^2c^2\gamma^2]$$

führt man auch rechts homogene Coordinaten $u\ v\ w\ s$ ein und drückt alles durch die Substitutionscoëfficienten $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ aus, so erhält man die fragliche Collineation, dargestellt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma.u' &= c^2(\beta\gamma+\alpha\delta).u-2c\beta\delta.w-2(c^2\alpha\gamma+\beta\delta).s \\ \sigma.v' &= c^2\Delta.v \\ c.\sigma.w' &= c^2(\alpha\beta-c^2\gamma\delta).u+c(c^2\delta^2-\beta^2).w- \\ &\quad -[\beta^2-c^2\delta^2+c^2(\alpha^2-c^2\gamma^2)].s \\ \sigma.s' &= -c^2\alpha\beta.u+c\beta^2.w+(\beta^2+c\alpha^2).s \end{aligned}\right\} \text{I)}$$

Macht man den Durchmesser der Kugel $c=1$, so vereinfachen sich vorstehende Gleichungen und werden:

$$\left.\begin{aligned} \sigma.u' &= (\beta\gamma+\alpha\delta).u + o - 2\beta\delta.w - 2(\alpha\gamma+\beta\delta).s \\ \sigma.v' &= o + \Delta.v + o + o \\ \sigma.w' &= (\alpha\beta-\gamma\delta).u + o + (\delta^2-\beta^2).w- \\ &\quad -(\beta^2-\delta^2+\alpha^2-\gamma^2).s \\ \sigma.s' &= -\alpha\beta.u + o + \beta^2.w+(\alpha^2+\beta^2).s \end{aligned}\right\} \text{II)}$$

Die Determinante der Gleichungen II) ist

$$\Omega = \Delta\begin{vmatrix} \beta\gamma+\alpha\delta & -2\beta\delta & -2(\alpha\gamma+\beta\delta) \\ \alpha\beta-\gamma\delta & \delta^2-\beta^2 & \delta^2-\beta^2+\gamma^2-\alpha^2 \\ -\alpha\beta & \beta^2 & \alpha^2+\beta^2 \end{vmatrix} \qquad 21)$$

Indem man die dritte Zeile zur zweiten addirt, wird

$$\Omega = \Delta\begin{vmatrix} \beta\gamma+\alpha\delta & -2\beta\delta & -2(\alpha\gamma+\beta\delta) \\ -\gamma\delta & \delta^2 & \delta^2+\gamma^2 \\ -\alpha\beta & \beta^2 & \alpha^2+\beta^2 \end{vmatrix}$$

und durch Abziehen der zweiten Colonne von der dritten

$$\Omega = \Delta\begin{vmatrix} \beta\gamma+\alpha\delta & -2\beta\delta & -2\alpha\gamma \\ -\gamma\delta & \delta^2 & \gamma^2 \\ -\alpha\beta & \beta^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

Mit Hilfe von noch einigen ähnlichen Umformungen bringt man Ω auf die Form

$$\Omega = \Delta^2 \begin{vmatrix} o & -\beta^2 & \alpha^2\delta - 2\alpha\beta\gamma \\ o & \delta & \gamma^2 \\ -1 & \beta^2 & \alpha^2\delta \end{vmatrix}$$

d. h.

$$\Omega = \Delta^4 \qquad 22)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} a_{11} &= \beta\gamma + \alpha\delta & a_{12} &= o & a_{13} &= -2\beta\delta & a_{14} &= -2(\alpha\gamma + \beta\delta) \\ a_{21} &= o & a_{33} &= \Delta & a_{23} &= o & a_{24} &= o \\ a_{31} &= \alpha\beta - \gamma\delta & a_{32} &= o & a_{33} &= \delta^2 - \beta^2 & a_{34} &= \gamma^2 + \delta^2 - \alpha^2 - \beta^2 \\ a_{41} &= -\alpha\beta & a_{42} &= o & a_{43} &= \beta^2 & a_{44} &= \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned} \qquad 23)$$

so werden die sich selbst entsprechenden Ebenen der Collineation) bestimmt durch die Wurzeln der biquadratischen Gleichung:

$$\psi(\sigma) = \begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \sigma & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \sigma & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \sigma \end{vmatrix} = o \qquad 24)$$

Bezeichnet man die a_{ii}, $a_{ii} . a_{jj}$, $a_{ii} . a_{jj} . a_{kk}$ zugeordneten Unterdeterminanten von $\psi(o) = \Omega$ mit Ω_i, Ω_{ij}, Ω_{ijk}, so lässt sich 24) schreiben

$$\begin{aligned} \Omega - \sigma(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4) + \sigma^2(\Omega_{12} + \Omega_{13} + \Omega_{14} + \Omega_{23} + \Omega_{24} + \Omega_{34}) \\ - \sigma^3(\Omega_{123} + \Omega_{124} + \Omega_{134} + \Omega_{234}) + \sigma^4 = o \end{aligned} \qquad 25)$$

Es ist aber

$$\Omega_1 = \Delta^2(\alpha\delta + \beta\gamma) \quad \Omega_2 = \Delta^3 \quad \Omega_3 = \Delta^2(\alpha^2 - \beta^2) \quad \Omega_4 = \Delta^2(\delta^2 + \beta^2) \qquad 26)$$

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{12} &= \Delta(\alpha\delta + \beta\gamma) \\ \Omega_{13} &= \Delta(\alpha^2 + \beta^2) \\ \Omega_{14} &= \Delta(\delta^2 - \beta^2) \\ \Omega_{23} &= \Delta(\alpha^2 - \beta^2) \\ \Omega_{24} &= \Delta(\beta^2 + \delta^2) \\ \Omega_{34} &= \Delta(\alpha\delta + \beta\gamma) \end{aligned}\right\} \qquad 27)$$

und

$$\Omega_{123} = \alpha^2+\beta^2 \quad \Omega_{124} = \delta^2-\beta^2 \quad \Omega_{134} = \Delta \quad \Omega_{234} = \alpha\delta=\beta\gamma \quad 28)$$

daher mit Benützung dieser Ausdrücke 25) übergeht in

$$\psi(\sigma) = \Delta^2-\Delta^2(\alpha+\delta)^2.\sigma+2\Delta[(\alpha+\delta)^2-\Delta].\sigma^2-(\alpha+\delta)^2\sigma^3 +\sigma^4=0 \quad 29)$$

Diese Gleichung hat eine Doppelwurzel

$$\sigma = \Delta \quad 30)$$

Die noch übrigen 2 werden bestimmt durch die quadratische Gleichung

$$\sigma^2 + [2\Delta-(\alpha+\delta)^2].\sigma+\Delta^2 = 0 \quad 31)$$

also durch die beiden Werthe gegeben:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\alpha+\delta)^2-\Delta\pm\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta)\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4\Delta} \quad 32)$$

Für die Coordinaten der sich selbst entsprechenden Ebenen, welche durch 30) bestimmt werden, findet man aus 24) die Werthe $u = o$ $v=o$ $w=o$ $s=o$; diese Ebenen, welche als zwei zusammenfallende anzusehen sind, werden also unbestimmt. Die beiden sich selbst entsprechenden Punkte der projectivischen Zuordnung auf der Kugel sind gleichzeitig selbst entsprechende Punkte der dargestellten Collineation, und daher ihre Verbindungslinie g eine sich selbst entsprechende Linie derselben. Die Tangentenebenen an die Kugel in den Durchstosspunkten von g mit derselben sind offenbar sich selbst entsprechende Ebenen der Collineation und folglich die conjugirte Polare g' von g bezüglich der Kugel eine zweite, sich selbst entsprechende Gerade der Collineation. Die beiden Werthe von σ aus 32) bestimmen daher die zuletzt genannten selbst entsprechenden Ebenen und die Doppelwurzel 30) die durch g gehenden zusammenfallenden Ebenen.

Nach dem Früheren ist jede durch g gelegte Ebene anzusehen als eine sich selbst entsprechende Ebene der Collineation, die aus zwei zusammenfallenden besteht.

Wenn die beiden Punkte 5) imaginär sind — der Fall welcher von der Betrachtung ausgeschlossen wurde, — vertauschen blos die Geraden g und g' ihre Rollen.

XIII. SITZUNG VOM 19. MAI 1882.

Herr Dr. L. J. Fitzinger führt als Alterspräsident den Vorsitz.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter Ritter v. Schmerling setzt die Akademie in Kenntniss, dass Seine kaiserliche Hoheit der durchlauchtigste Herr Erzherzog-Curator in der feierlichen Sitzung am 25. Mai d. J. erscheinen und dieselbe mit einer Ansprache zu eröffnen geruhen werde.

Herr Hofrath Dr. Carl Ritter v. Scherzer, k. und k. Geschäftsträger und General-Consul in Leipzig, übersendet eine weitere Mittheilung über ein der Akademie seinerzeit zur Verfügung gestelltes Pflanzengift (Ticunagift).

Das c. M. Herr Prof. H. Leitgeb übersendet eine Abhandlung des Assistenten am botanischen Institute der Universität in Graz, Herrn Dr. E. Heinricher, betitelt: „Die Sporenbildung bei *Salvinia*, verglichen mit den übrigen Rhizocarpeen."

Herr Prof. Dr. Ernst v. Fleischl in Wien überreicht eine aus drei Theilen bestehende Abhandlung unter dem Titel: „Physiologisch-optische Notizen, zweite Mittheilung."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia, Real de Ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 213. Tomo XVIII. Abril 15. Habana, 1882; 8°.

Académie de Médecine: Bulletin. 2e série. 46e année, Tome XI. Nos. 13—19. Paris, 1882; 8°.

Academy, the American of Arts and Sciences: Memoirs. Centennial Volume, Vol. XI. — Part I. Cambridge, 1882; 4°.

Accademia, R. delle Scienze di Torino: Atti Vol. XVII, Disp. 3ª (Febbraio 1882). Torino; 8°.

Akademie, Kaiserliche Leopoldino-Carolinisch-Deutsche, der Naturforscher: Leopoldina. Heft XVIII Nr. 7—8. April 1882. Halle a. S.; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XX. Jahrgang. Nr. 14. Wien, 1882; 8°.

Archiv für Mathematik und Physik. LXVIII. Theil, 1. Heft. Leipzig, 1882; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Statistisches Jahrbuch für das Jahr 1879, 3., 4. & 6. Heft. Wien, 1882; 8°. Jahrgang 1880, IX. Heft. Wien, 1882; 8°.

Central Observatorium, physikalisches: Annalen. Jahrgang 1880. I. und II. Theil. St. Petersburg, 1881; gr. 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VI. Nr. 22 u. 23. Cöthen, 1882; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCIV, Nr. 18. Paris, 1882; 4°.

Gesellschaft, Deutsche chemische: Berichte. XV. Jahrgang Nr. 7. Berlin, 1882; 8°.

— Astronomische: Publication XVI: Syzygien-Tafeln für den Mond nebst ausfürlicher Anweisung zum Gebrauche derselben von Professor Theodor Oppolzer. Leipzig, 1881; 4°.

Gewerbe-Verein, niederösterr.: Wochenschrift. XLIII. Jahrgang Nr. 16—19. Wien, 1882; 4°.

Hortus Petropolitanus: Descriptiones plantarum novarum. Tome III. Pars. 3. St. Petersburg, 1882; 4°.

Hydrographisches Amt, k. k. Marine-Bibliothek: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Vol. X. Nr. 3 und 4 Jahrgang 1882. Pola, 1882; 8°.

Ingenieur- und Architekten-Verein: Wochenschrift. VII Jahrgang. Nr. 16—19. Wien, 1882; 4°.

— — Zeitschrift. XXXIV. Jahrgang. II. Heft. Wien, 1882; gr. 4°.

Johns Hopkins University: Studies from the Biological Laboratory. Vol. II. Nr. 2. Baltimore, 1882; 8°.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band XXV. Nr. 5 und 6. Leipzig, 1882; 8°.

Journal, the American of Science. 3. series. Vol. XXIII. (Whole Number CXXIII.) Nos. 136 et 137. New-Haven, 1882; 8°.

Königsberg, Universität: Akademische Schriften pro 1881—82. 8° & 4°.

Kriegsmarine, k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und hydrographische Nachrichten. Jahrgang 1882. Heft 2. Pola, 1882; 8°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1882. IV. Heft. Wien, 1882; 8°.

Moore. F. F. Z. S.: The Lepidoptera of Ceylon. Part. IV. London, 1881; 4°.

Nature. Vol. XXVI, Nr. 654. London, 1882; 8°.

Nuovo Cimento, il; 3ª Serie. Tomo XI. Gennaio e Febbraio. 1882. Pisa; 8°.

Observatory, The: A monthly review of Astronomy. Nr. 61. May, 1882. London; 8°.

Societas scientiarum fenica: Öfversigt af Förhandlingar; XXII. 1879—80. Helsingfors, 1880; 8°.

— Bidrag till Kännedom of Finlands Natur och Folk. 33. und 34. Heft. Helsingfors, 1880, 8°.

Société Impériale des Amis d'histoire naturelle, d'anthropologie et d'ethnographie, attachée à l'Université de Moscou. Tomes XXXIV, Livr. 2. et XXXV, partie 1, Livr. 4. Moscou, 1882; fol.

Society, the Linnean of London: The Transactions. 2nd ser. Zoology. Vol. II. part. 2. London, 1881; 4°.

— — The Journal. Zoology. Vol. XV. Nos. 84 und 85. London, 1880—81.; 8°.

— — The Journal. Botany. Vol. XVIII. Nos. 108—113. London, 1880—81; 8°.

— — List of the Linnean Society of London: January, 1881. London; 8°.

— the royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. IV. Nr. 5. May, 1882. London; 8°.

— the Zoological of London: Proceedings of the scientific meetings for the year 1881. Part. III. May und June. London, 1881; 8°.

Utrechtsche Hoogeschool: Onderzoekingen, gedaan in het Physiologisch Laboratorium. Derde reeks. VII. Aflevering I. Utrecht, 1882; 8°.

Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung zu Hamburg: Verhandlungen, 1877. IV. Band. Hamburg, 1879; 8°.

Vierteljahresschrift, österreichische für wissenschaftliche Veterinärkunde. LVII. Band, 1. Heft, (Jahrgang 1882. I.) Wien, 1882; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXII. Jahrgang. Nr. 18 und 19. Wien. 1882; 4°.

Über die Entwickelung einiger von dem Euler'schen Integrale zweiter Gattung abhängiger Ausdrücke in Reihen.

Von dem w. M. Dr. **A. Winckler.**

Die so vielfach behandelte Theorie des Euler'schen Integrals zweiter Gattung ist u. A. auch nach der in der Überschrift bezeichneten Richtung durch mehrere in neuerer Zeit veröffentlichte Abhandlungen nicht unbeträchtlich erweitert worden.

Diese Abhandlungen, deren später gehörigen Ortes nähere Erwähnung geschehen wird, gaben die Veranlassung zu der hier folgenden Arbeit, deren Ergebnisse, mit Ausnahme der als bekannt bezeichneten, wie ich glaube, neu sind.

1.

Im 90. Bande des Crelle'schen Journals hat Herr Hermite eine Reihe für die unvollständige Gammafunction veröffentlicht, welche, wenn ρ irgend eine positive Grösse bezeichnet und

$$f(n)=\rho^n\cdot\left[\frac{1}{n}-\frac{\rho}{n+1}+\frac{\rho^2}{2!\,(n+2)}+\ldots\right]$$

$$\psi(m)=\rho^m e^{-\rho}+(2\rho)^m e^{-2\rho}+(3\rho)^m e^{-3\rho}+\ldots$$

gesetzt wird, durch die Gleichung

$$\int_\rho^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = \qquad \ldots(1)$$

$$f(1)\psi(a-1)+\frac{a-1}{1}\cdot f(2)\psi(a-2)+\frac{(a-1)(a-2)}{1.2}f(3)\psi(a-3)+\ldots$$

gegeben ist.

Das Verfahren, wodurch diese merkwürdige Entwickelung erhalten wurde, beruht auf der Zerlegung des Integrals in eine Reihe von Theilintegralen, deren resp. Grenzen die arithmetische Reihe ρ, 2ρ, 3ρ,... bilden und welche sich insgesammt durch Integrale, zwischen den Grenzen 0 und ρ genommen, ausdrücken lassen. Indem ich dieses Verfahren reproducirte, bin ich zu einer etwas verschiedenen Form der Reihe gelangt. Da nämlich:

$$\int_{r\rho}^{(r+1)\rho} x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

$$= \int_0^{\rho} (r\rho + x)^{a-1} e^{-(r\rho+x)}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{1.2\ldots n} (r\rho)^{a-n-1} e^{-r\rho} \int_0^{\rho} x^n e^{-x}\, dx$$

und

$$\int_0^{\rho} x^n e^{-x}\, dx = n! \left[1 - \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right) . e^{-\rho}\right]$$

ist, so hat man, wenn

$$\varphi(n) = 1 - \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right) . e^{-\rho}$$

gesetzt wird, die folgende Gleichung:

$$\int_{r\rho}^{(r+1)\rho} x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} (a-1)(a-2)\ldots(a-n)\varphi(n)(r\rho)^{a-n-1} e^{-r\rho}$$

Das in Frage stehende Integral ergibt sich, wenn man hierin $r = 1, 2, 3, \ldots$ setzt und dann summirt. Wird daher wieder

$$\psi(a-n-1) = \rho^{a-n-1} e^{-\rho} + (2\rho)^{a-n-1} e^{-2\rho} + (3\rho)^{a-n-1} e^{-3\rho} + \ldots$$

gesetzt, so entsteht der Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (a-1)(a-2)\ldots(a-n)\varphi(n)\psi(a-n-1)$$

und erhält man die Gleichung:

$$\int_{\rho}^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx = \qquad \ldots(2)$$

$$\varphi(0)\psi(a-1)+(a-1)\varphi(1)\psi(a-2)+(a-1)(a-2)\varphi(2)\psi(a-3)+\ldots$$

Der Unterschied zwischen den beiden Entwickelungen (1) und (2) besteht, wie man sieht, darin, dass in (1) der Factor $f(n)$ eine unendliche Reihe, in (2) aber der entsprechende Factor $\varphi(n)$ ein endlicher, für einigermassen grosse Werthe von n sich rasch der Null nähernder Ausdruck ist. Zur Übereinstimmung beider Entwickelungen ist erforderlich, dass:

$$\frac{f(n)}{n!} = \varphi(n)$$

oder also für alle positiven Werthe von ρ und alle ganzzahligen Werthe von n die Gleichung:

$$\frac{1}{n!}\cdot\left[\frac{1}{n+1} - \frac{\rho}{n+2} + \frac{\rho^2}{2!(n+3)} - \ldots\right]\cdot\rho^{n+1}$$

$$= 1-\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\ldots\right]\cdot e^{-\rho}$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung:

$$\frac{1}{n} - \frac{\rho}{n+1} + \frac{\rho^2}{2!(n+2)} - \frac{\rho^3}{3!(n+3)} + \ldots$$

$$= e^{-\rho}\cdot\left[\frac{1}{n} + \frac{\rho}{n(n+1)} + \frac{\rho^2}{n(n+1)(n+2)} + \ldots\right]$$

stattfinde, die bekanntlich richtig ist.

Um die Formel (2) auf einen bestimmten Fall anzuwenden, sei die Frage nach der Berechnung des Integrals

$$\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx$$

wofür $a=0$ ist. Bezeichnet ρ eine über 1 liegende Zahl, und wird:

$$R = \log\rho - \frac{\rho-1}{1} + \frac{\rho^2-1}{2!\,2} - \frac{\rho^3-1}{3!\,3} + \ldots$$

gesetzt, so findet man:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \qquad \ldots(3)$$

$$R+\varphi(0)\psi(-1)-\varphi(1)\psi(-2)+\varphi(2)\psi(-3)-\ldots$$

wobei

$$\varphi(n)=1-\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}\right]\cdot e^{-\rho}$$

$$\psi(-m)=\rho^{-m}e^{-\rho}+(2\rho)^{-m}e^{-2\rho}+(3\rho)^{-m}e^{-3\rho}+\ldots$$

ist. Die Berechnung des Integrals mittelst der Formel (3) wird durch mehrere Umstände erleichtert und ist, wie ich glaube, leichter als nach dem von Herrn Gyldén in den Comptes rendus, T. XCII, p. 879 und p. 942 befolgten Verfahren. Denn setzt man für ρ, dessen Wahl frei steht, eine einigermassen grössere Zahl, so stellt R den beträchtlichsten Theil des Integrals dar und sind $\psi(-1), \psi(-2), \ldots$ sehr rasch convergirende Reihen. Zugleich ist auch die Berechnung von $\varphi(0), \varphi(1), \ldots$ sehr einfach, da der Werth von $\varphi(n+1)$ aus $\varphi(n)$ mittelst der Gleichung

$$\varphi(n+1)=\varphi(n)-\frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{-\rho}$$

gefunden werden kann und keine Kettenbruchentwickelung erfordert, um die Multiplication der kleinen Fehler zu vermeiden, welche bei dem Gebrauche der Gleichung

$$f(n+1)=nf(n)-\rho^n e^{-\rho}$$

allerdings unvermeidlich ist, wenn $f(n+1)$ aus $f(n)$ gefunden werden soll.

Obschon ich die numerische Berechnung, die ja kein actuelles Interesse mehr hätte, nicht ausgeführt habe, so wollte ich doch die Vortheile, welche sich durch das Hermite'sche Verfahren erreichen lassen, bei einem Integrale hervorheben, dessen Berechnung, wie Herr Gyldén bemerkt, einst so viele Arbeit verursacht hat.

2.

Die Entwickelung des vorhin betrachteten Integrals

$$\int_\rho^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

in eine nach positiven Potenzen von a fortschreitende Reihe, deren Convergenz zuerst Herr Prym (Crelle, Journal, Bd. 82) nachgewiesen hat, erfordert die Berechnung des Integrals

$$\frac{1}{n!}\int_\rho^\infty e^{-x} \log^n x \frac{dx}{x}$$

welches den Coëfficienten von a^n in jener Entwickelung ausdrückt.

Die explicite Darstellung des Werthes dieses Integrals ist, selbst wenn man $\rho = 1$ setzt, ihrer Complication wegen, kaum möglich, für die wirkliche Berechnung jedenfalls nicht geeignet.

Da indessen:

$$\int_\rho^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = \Gamma(a) - \int_0^\rho x^{a-1} e^{-x} dx \qquad \ldots(4)$$

so kann die bezeichnete Entwickelung wenigstens indirect aus jener der beiden rechter Hand stehenden Ausdrücke ermittelt werden. Was zunächst den zweiten dieser Ausdrücke betrifft, so findet man hierfür schon bei Euler (Instit. calc. integr. Vol. I, Cap. IV, Art. 224 et 225) die beiden folgenden allgemein giltigen Reihen:

$$\int_0^\rho x^{a-1} e^{-x} dx = \rho^a \cdot \left[\frac{1}{a} - \frac{\rho}{1!(a+1)} + \frac{\rho^2}{2!(a+2)} - \ldots\right]$$

$$= \rho^a e^{-\rho} \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{\rho}{a(a+1)} + \frac{\rho^2}{a(a+1)(a+2)} + \ldots\right]$$

die zwar nicht nach Potenzen von a fortschreiten, die sich aber, wenn $\rho = 1$ ist, leicht darnach entwickeln lassen.

Setzt man nämlich $a+p$ für a, wobei p irgend eine positive Zahl bezeichnet, so folgt:

$$\int_0^1 x^{a+p-1} e^{-x} dx =$$

$$\frac{1}{a+p} - \frac{1}{1!(a+p+1)} + \frac{1}{2!(a+p+2)} - \frac{1}{3!(a+p+3)} + \ldots$$

und, wenn:

$$k_n = \frac{1}{p^{n+1}} - \frac{1}{1!(p+1)^{n+1}} + \frac{1}{2!(p+2)^{n+1}} - \frac{1}{3!(p+3)^{n+1}} + \ldots$$

gesetzt wird, erhält man die Entwickelung:

$$\int_0^1 x^{a+p-1} e^{-x} dx = k_0 - k_1 a + k_2 a^2 - k_3 a^3 + \ldots$$

die gilt, wenn $0 < a < p$ ist.

Für $p = 0$ besteht diese Gleichung nicht mehr, da die k unendlich gross werden. Das Integral lässt sich dann nicht mehr nach insgesammt positiven Potenzen von a, sondern wie folgt:

$$\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx = \frac{1}{a} - l_0 + l_1 a - l_2 a^2 + l_3 a^3 - \ldots$$

entwickeln, wobei

$$l_n = \frac{1}{1!1^{n+1}} - \frac{1}{2!2^{n+1}} + \frac{1}{3!3^{n+1}} - \ldots$$

ist. Da l_n für wachsende Werthe von n sich der Einheit ohne Ende nähert, so gilt die oben angeführte Entwickelung nur, wenn $0 < a < 1$ ist.

Die Berechnung der Coëfficienten der nach Potenzen von a fortschreitenden Reihe für das erste Glied rechter Hand in (4), nämlich für $\Gamma(a)$, wurde mit grosser Sorgfalt zuerst von Herrn Bourguet[1] ausgeführt. Es wurden nämlich zuerst die Coëfficienten der nach Potenzen von a fortschreitenden Reihenentwickelung des Ausdruckes $\frac{1}{a(1+a)\Gamma(a)}$ oder $\frac{1}{\Gamma(a+2)}$,

[1] Thèses présentées à la faculté des sciences de Paris. Par M. L. Bourguet. Paris, Gauthier-Villars, 1880. Diese Abhandlung ist auch in den Annales scientifiques de l'école supérieure (1881, Mai) erschienen.

dann mittelst derselben die Coëfficienten der Reihe für $a(1+a)\,\Gamma(a)$ oder $\Gamma(a+2)$, und endlich mit Hilfe dieser die Entwickelungscoëfficienten des Integrals

$$\int_1^\infty x^{a+1} e^{-x}\,dx = \Gamma(a+2) - \int_0^1 x^{a+1} e^{-x}\,dx$$

abgeleitet und durchgehend auf 16 Decimalen berechnet. Es ist, wie ich glaube, von einigem Interesse, zu zeigen, dass wenigstens die Coëfficienten von $\Gamma(a+2)$ unabhängig von jenen des Bruches $\frac{1}{\Gamma(a+2)}$, und zwar auf ganz analoge Art wie die letzteren berechnet werden können. Die Aufgabe ist jedoch einer beträchtlichen Verallgemeinerung fähig, so dass nicht nur die Bestimmung der Coëfficienten der Reihen für $\Gamma(a+2)$ und $\frac{1}{\Gamma(a+2)}$, sondern überhaupt für $[\Gamma a+p+1)]^r$ aus derselben Gleichung erhalten werden können, wenn unter r eine constante Zahl verstanden wird, wofür die Entwickelung der letztern Potenz nach aufsteigenden Potenzen von a convergirt. Hierbei bezeichnet p irgend eine positive ganze Zahl und, wenn es die Convergenz erfordert, a einen positiven echten Bruch. Wird unter diesen Voraussetzungen:

$$[\Gamma(a+p+1)]^r = K_0 + K_1 a + K_2 a^2 + \ldots + K_n a^n + \ldots$$

gesetzt, so ist:

$$K_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n [\Gamma(a+p+1)]^r}{da^n} \text{ für } a = 0$$

oder in kürzerer Schreibweise:

$$K_n = \frac{1}{n!} \cdot [\Gamma(p+1)^r]^{(n)}$$

Für die Coëfficienten K_n lässt sich eine recurrirende Beziehung von der Art finden, dass K_n als lineare Function von K_{n-1}, $K_{n-2}, \ldots K_1$, K_0 dargestellt erscheint.

Setzt man der Kürze wegen:

$$f(x) = [\Gamma(x)]^r$$

und

$$\varphi(x) = \log \Gamma(x)$$

so ist:

$$f'(x) = rf(x)\varphi'(x)$$

Durch $n-1$ malige Differentiation dieser Gleichung findet man:

$$f^{(n)}(x) =$$

$$r\left[f^{(n-1)}(x)\varphi'(x) + (n-1)f^{(n-2)}(x)\varphi''(x) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f^{(n-3)}(x)\varphi'''(x) + \ldots\right.$$

$$\left. + (n-1)f'(x)\varphi^{(n-1)}(x) + f(x)\varphi^{(n)}(x)\right]$$

worin:

$$\varphi'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \ldots$$

$$\varphi'''(x) = -2\left[\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \ldots\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n(n-1)!\left[\frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n} \frac{1}{(x+2)^n} + \ldots\right]$$

ist. Für $x = p+1$ und wenn

$$-s_1 = \frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)} = \Gamma'(1) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}$$

$$s_m = \frac{1}{(p+1)^m} + \frac{1}{(p+2)^m} + \frac{1}{(p+3)^m} + \ldots$$

gesetzt wird, ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$\varphi^{(m)}(p+1) = (-1)^m(m-1)!\,s_m$$

$$f^{(m)}(p+1) = m!\,K_m$$

und

$$K_n = \frac{r}{n}\cdot\left[-s_1K_{n-1} + s_2K_{n-2} - s_3K_{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1}s_{n-1}K_1 + (-1)^n s_n K_0\right] \ldots (5)$$

Dies ist nun die Relation, von welcher oben die Rede war; der Exponent r geht in dieselbe, wie man sieht, nur als einfacher

Factor ein und complicirt daher die successive Berechnung der Coëfficienten in keiner Weise, trägt aber, wenn er ein echter Bruch ist, zur raschen Verkleinerung derselben bei. Aus dieser die allgemeine Lösung der Aufgabe enthaltenden Gleichung lässt sich ohne grosse Weitläufigkeit eine independente Darstellung von K_n nicht finden; aber selbst wenn diese gefunden wäre, liesse sich über die Grössenverhältnisse der K und daher über die Convergenz der angegebenen Reihe, die wesentlich von r abhängt, nicht wohl entscheiden. Übrigens ist die Convergenz für einige Werthe von r nicht zweifelhaft. Für $r=1$ convergirt die Reihe, wenn a zwischen 0 und $p+1$ liegt, und für $r=-1$ findet die Convergenz statt, welche Werthe a haben mag, weil dies selbst in dem Falle $p=0$, zufolge der hier als bekannt vorauszusetzenden Untersuchungen, noch der Fall ist.

Aus den obenstehenden Gleichungen ergeben sich für einige der ersten Werthe von K die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} K_0 &= (p!)^r \\ K_1 &= -r.s_1(p!)^r \\ K_2 &= +\frac{r}{2}(rs_1^2+s_2)(p!)^r \\ K_3 &= -\frac{r}{2.3}(r^2s_1^3+3rs_1s_2+2s_3)(p!)^r \end{aligned} \qquad \ldots(6)$$

u. s. w.

3.

In dem vorhin erwähnten Falle $r=1$ erhält man die Entwickelung von $\Gamma(a+p+1)$ nach Potenzen von a fortschreitend. Der leichtern Unterscheidung wegen will ich die Coëfficienten dieser Entwickelung mit H statt mit K bezeichnen, also:

$$\Gamma(a+p+1) = H_0+H_1a+H_2a^2+\ldots+H_na^n+\ldots \qquad \ldots(7)$$

setzen. Man hat dann:

$$H_n = \frac{1}{n}\left[-s_1H_{n-1}+s_2H_{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}s_{n-1}H_1+(-1)^ns_nH_0\right] \qquad \ldots(8)$$

und hieraus:

$$H_0 = p!$$

$$H_1 = -p!\,s_1 \quad , \quad H_3 = -\frac{p!}{3!}(s_1^3+3s_1s_2+2s_3)$$

$$H_2 = +\frac{p!}{2!}(s_1^2+s_2) \quad , \quad H_4 = +\frac{p!}{4!}(s_1^4+6s_1^2s_2+8s_1s_3+3s_2^2+6s_4)$$

u. s. w. Da s_1 mit einziger Ausnahme des Falles $p=0$ immer negativ ist, so kann aus den Vorzeichen dieser Ausdrücke nicht auf den regelmässigen Zeichenwechsel der H geschlossen werden.

Im vorliegenden Falle ist die Bedeutung der H durch die Gleichung:

$$H_n = \frac{\Gamma^{(n)}(p+1)}{n!}$$

gegeben, während $s_1, s_2, \ldots$ ihre bisherige Bedeutung behalten.

Setzt man wieder x für $p+1$, so ergibt sich die folgende zwischen den n ersten Differentialquotienten von $\Gamma(x)$ bestehende Gleichung:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \Gamma^{(n-1)}(x).\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + (n-1)\sigma_2.\Gamma^{(n-2)}(x) - (n-1)(n-2)\sigma_3.\Gamma^{(n-3)}(x) + \ldots$$
$$+(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)..2.\sigma_{n-1}\Gamma'(x) + (-1)^n(n-1)(n-2)..1.\sigma_n\Gamma(x) \quad \ldots(9)$$

worin:

$$\sigma_m = \frac{1}{x^m} + \frac{1}{(x+1)^m} + \frac{1}{(x+2)^m} + \ldots$$

ist.

Um die Entwickelung von $\Gamma(a+1)$ zu erhalten, genügt es, in den oben angeführten Formeln $p=0$, also

$$p! = 1 \; , \quad H_n = \frac{\Gamma^{(n)}(1)}{n!} \; , \quad H_0 = 1$$

$$s_1 = -\Gamma'(1) = 0{,}5772\ldots$$

$$s_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots$$

zu setzen. Man hat dann die Gleichung:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a} + H_1 + H_2 a + H_3 a^2 + \ldots \; , \; 0<a<1 \qquad \ldots(10)$$

wozu noch die Gleichung

$$\frac{\Gamma_{(1)}^{(n)}}{n!} = \frac{1}{n}\left[-s_1\frac{\Gamma_{(1)}^{(n-1)}}{(n-1)!} + s_2\frac{\Gamma_{(1)}^{(n-2)}}{(n-2)!} - \ldots + (-1)^{n-1}s_{n-1}\Gamma'(1) + (-1)^n s_n\right] \quad \ldots(11)$$

gehört.

Ausser der Gleichung (8) findet zwischen den Coëfficienten H, für $p=0$, noch eine Relation statt, zu welcher man durch $2n$malige Differentiation der Gleichung:

$$\Gamma(1-x)\Gamma(1+x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

gelangt. Da nämlich:

$$\frac{\pi x}{\sin \pi x} = 1 - \frac{x}{1+x} + \frac{x}{2+x} - \frac{x}{3+x} + \ldots + \frac{x}{1-x} - \frac{x}{2-x} + \frac{x}{3-x} - \ldots$$

und

$$D_x^{(2n)}\frac{x}{c+x} = -\frac{(2n)!\,c}{(c+x)^{2n+1}}$$

$$D^{(2n)}\frac{x}{c-x} = +\frac{(2n)!\,c}{(c-x)^{2n+1}}$$

so folgt:

$$D_x^{(2n)}\frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

$$= (2n)!\left[\frac{1}{(1+x)^{2n+1}} - \frac{2}{(2+x)^{2n+1}} + \frac{3}{(3+x)^{2n+1}} - \ldots\right]$$

$$+ (2n)!\left[\frac{1}{(1-x)^{2n+1}} - \frac{2}{(2-x)^{2n+1}} + \frac{3}{(3-x)^{2n+1}} - \ldots\right]$$

daher, wenn $x=0$ gesetzt wird:

$$\left[D^{(2n)}\frac{\pi x}{\sin \pi x}\right]_{x=0}$$

$$= 2(2n!)\left[1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \ldots\right]$$

$$= 2(2n!)\left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right)\cdot s_{2n}$$

wenn man wieder:

$$s_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \dots$$

setzt. Man hat daher die folgende Gleichung:

$$\Gamma(1)\Gamma_1^{2n} - 2n\Gamma'_1\Gamma_1^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2}\Gamma''_{(1)}\Gamma_{(1)}^{(2n-2)} - \dots$$
$$-2n\Gamma_{(1)}^{(2n-1)}\Gamma'_{(1)} + \Gamma_{(1)}^{(2n)}\Gamma_{(1)}$$
$$= 2.2n!\left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right).s_{2n}$$

Die erste Seite derselben besteht aus $2n+1$ Gliedern, und je zwei von dem Mittelgliede zu beiden Seiten gleich weit abstehende Glieder sind einander gleich; es ist also auch:

$$\Gamma_{(1)}^{(2n)} - 2n\Gamma'_{(1)}\Gamma_{(1)}^{(2n-1)} + \frac{2n(2n-1)}{1.2}\Gamma''_{(1)}\Gamma_{(1)}^{(2n-2)} - \dots$$
$$+(-1)^{n-1}.\frac{2n(2n-1)..(n+2)}{1.2..(n-1)}.\Gamma_{(1)}^{(n-1)}\Gamma_{(1)}^{(n+1)}$$
$$+\frac{(-1)^n}{2}.\frac{2n(2n-1)..(n+1)}{1.2..n}.\Gamma_{(1)}^{(n)}\Gamma_{(1)}^{(n)} \qquad \dots(12)$$
$$= (2n)!\left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right).s_{2n}$$

Hieraus erhält man die entsprechende Relation zwischen den H, wenn $\Gamma_{(1)}^{(m)} = m!\,H_m$ gesetzt wird. Sie ist:

$$H_{2n} - H_1H_{2n-1} + H_2H_{2n-2} - \dots + (-1)^{n-1}H_{n-1}H_{n+1} + (-1)^n.\frac{1}{2}H_nH_n$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right).s_{2n} \qquad \dots(13)$$

Diese Gleichung kann zur Berechnung von H_{2n} aus H_1, $H_2, \dots H_{2n-1}$ dienen. Aber eine analoge Gleichung für H_{2n+1} existirt nicht, denn das Resultat der $2n+1$ maligen Differentiation ist für $x = 0$ eine identische Gleichung.

Obgleich die successive Bestimmung der zur Reihenentwickelung von $\Gamma(a)$ erforderlichen Differentialquotienten $\Gamma''_{(1)}$,

$\Gamma'''_{(1)}, \ldots$ mittelst der angeführten Gleichungen geschehen kann, so will ich doch die Frage nach der unmittelbaren Bestimmung des Integrals

$$\Gamma^{(m)}_{(1)} = \int_0^\infty e^{-x} \log^m x \, dx$$

nicht unberührt lassen. In der mir bekannten Literatur suchte ich vergeblich irgend eine Form für den Werth dieses allerdings sehr einfachen, aber den gebräuchlichen Methoden der Reihenentwickelung nicht zugänglichen Integrals zu finden.

Wie es scheint, ist nur auf dem im Art. 1 bezeichneten Wege der Zerlegung desselben in unendlich viele Integrale, deren Grenzen eine arithmetische Reihe bilden, eine Lösung möglich, die hier folgen mag.

Bezeichnet ρ eine positive Zahl, so ist eines jener Theilintegrale

$$\int_{r\rho}^{(r+1)\rho} e^{-x} \log^m x \, dx = \int_0^\rho e^{-(r\rho+x)} \log^m (r\rho+x) \, dx$$

folglich:

$$\int_0^\infty e^{-x} \log^m x \, dx = \sum_{r=0}^{r=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\rho (r\rho+x)^n \log^m (r\rho+x) \, dx$$

Die zweite Seite dieser Gleichung lässt sich, da:

$$\int (r\rho+x)^n \log^m (r\rho+x) dx = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} (-1)^\lambda \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-\lambda+1)}{(n+1)^{\lambda+1}} \log^{m-\lambda} (r\rho+x$$

ist, und wenn:

$$\varphi(r,\lambda) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{(r\rho+\rho)^{n+1} \log^{m-\lambda}(r\rho+\rho) - (r\rho)^{n+1} \log^{m-\lambda} r\rho}{n!(n+1)^{\lambda+1}}$$

gesetzt wird, wie folgt:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} (-1)^\lambda m(m-1)\ldots(m-\lambda+1)\varphi(r,\lambda)$$

ausdrücken, wobei zugleich die Aufeinanderfolge der Summationen nach λ und n umgekehrt wurde. Bildet man nun den Ausdruck

$$f(r)=\varphi(r,0)-m\varphi(r,1)+m(m-1)\varphi(r,2)-\ldots+(-1)^m m(m-1)..2.1\varphi(r,m)$$

so ergibt sich:

$$\int_0^\infty e^{-x}\log^m x\,dx = f(0)+f(1)+f(2)+\ldots$$

womit die Entwickelung gegeben ist.

Man kann hierbei ρ als positive Grösse beliebig wählen; je kleiner indessen ρ angenommen wird, um so schneller convergirt die Reihe $\varphi(r,\lambda)$; wird $\rho=1$ gesetzt, so ist $\varphi(0,\lambda)=0$, folglich auch $f(0)=0$.

Zur numerischen Berechnung der Coëfficienten H in der Gleichung (10) ist dieser Entwickelung offenbar das durch die Gleichung (8) gegebene Verfahren vorzuziehen, wodurch man nach einander für $p=0$:

$$H_0=1,\ H_1=-s_1=\Gamma'(1)=-0{,}5772..,\ H_2=\frac{1}{2}(-s_1H_1+s_2)$$

$$H_3=\frac{1}{3}(-s_1H_2+s_2H_1-s_3),\ H_4=\frac{1}{4}(-s_1H_3+s_2H_2-s_3H_1+s_4)$$

u. s. f. erhält. Die Zahlenwerthe dieser Coëfficienten nähern sich schon vom ersten an rasch der Einheit, die H mit geradem Index sind insgesammt positiv, mit ungeradem negativ, wie dies aus den vorstehenden Formeln folgt.

4.

Wenn man in der Gleichung (5) des Art. 2 den Exponenten $r=-1$ setzt, so ergeben sich die Coëfficienten der Entwickelung

$$\frac{1}{\Gamma(a+p+1)}=K_0+K_1a+K_2a^2+\ldots+K_na^n+\ldots$$

aus der Gleichung:

$$K_n=-\frac{1}{n}[-s_1K_{n-1}+s_2K_{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}s_{n-1}K_1+(-1)^n s_nK_0]\ldots(14)$$

nach einander wie folgt:

$$K_0 = \frac{1}{p!}$$

$$K_1 = s_1 K_0$$

$$K_2 = \frac{1}{2}(s_1 K_1 - s_2 K_0)$$

$$K_3 = \frac{1}{3}(s_1 K_2 - s_2 K_1 + s_3 K_0)$$

u. s. w., wobei wie früher:

$$-s_1 = \Gamma'_{(1)} + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}$$

$$s_m = \frac{1}{(p+1)^m} + \frac{1}{(p+2)^m} + \frac{1}{(p+3)^m} + \ldots$$

ist.

In dem besondern Fall, wenn $p = 0$ gesetzt wird, erhält man die Entwickelung:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = K_0 a + K_1 a^2 + \ldots + K_n a^n + \ldots$$

Die Gleichung (14) bleibt dieselbe und in den übrigen ist blos $K_0 = 1$

$$s_1 = -\Gamma'_{(1)} = 0{,}5772\ldots \text{ und } s_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots$$

zu setzen. Für den vorliegenden Fall ist die Gleichung (14) bereits von Herrn Bourguet in der oben erwähnten Abhandlung aus dem unendlichen Product für $\Gamma(a)$ abgeleitet worden, und auf demselben Wege ist Herr Grünwald in einer 1881 veröffentlichten Abhandlung zu jener Gleichung und den Formeln $K_0 = 1$, $K_1 = s_1$ u. s. w. gelangt.

Ausser (14) besteht noch eine Relation zwischen den Producten der K, die (13) analog ist und sich auf folgende Art ergibt.

Da

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

so hat man, wenn der Kürze wegen:

$$f(1+x)=\frac{1}{\Gamma(1+x)}$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$f(1+x)f(1-x)=1-\frac{(\pi x)^2}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{(\pi x)^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots$$

aus welcher durch $2n$malige Differentiation die folgende:

$$f(1+x)f^{(2n)}(1-x)-2nf'(1+x)f^{(2n-1)}(1-x)+\frac{2n(2n-1)}{1.2}f''(1+x)f^{(2n-2)}(1-x)-\ldots$$

$$-2nf^{(2n-1)}(1+x)f'(1-x)+f^{(2n)}(1+x)f(1-x)$$

$$=(-1)^n\left[\frac{\pi^{2n}}{2n+1}-\frac{\pi^{2n+2}x^2}{2!(2n+3)}+\ldots\right]$$

hervorgeht. Setzt man hierin $x=0$ und berücksichtigt, dass

$$f^{(m)}(1)=m!K_m=\left[D_x^{(m)}\frac{1}{\Gamma(x)}\right]_{x=1}$$

so folgt, wie leicht zu sehen ist:

$$K_0K_{2n}-K_1K_{2n-1}+K_2K_{2n-2}-\ldots-K_{2n-1}K_1+K_{2n}K_0$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$$

Die erste Seite dieser Gleichung besteht aus $2n+1$ Gliedern und enthält ein Mittelglied, zu dessen beiden Seiten je zwei gleichweit abstehende Glieder einander gleich sind. Man kann daher die Anzahl der Glieder auf $n+1$ reduciren und erhält, da $K_0=1$ ist:

$$K_{2n}-K_1K_{2n-1}+K_2K_{2n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}K_{n-1}K_{n+1}+\frac{(-1)^n}{2}.K_nK_n$$

$$=\frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!} \qquad \ldots(15)$$

Man erhält hieraus:

$$K_2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{3!}+\frac{1}{2}K_1^2$$

$$K_4=+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^4}{5!}-\frac{1}{2}K_2^2+K_1K_3$$

$$K_6=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^6}{7!}+\frac{1}{2}K_3^2-K_2K_4+K_1K_5$$

u. s. w.

Es bedarf also, um K_{2n} zu berechnen, auch hier, wie es die Gleichung (14) fordert, der Kenntniss aller K mit niedrigeren Indices. Eine analoge Gleichung, mittelst welcher auch K_{2n+1} auf dieselbe Weise gefunden werden könnte, besteht hier ebensowenig wie für H_{2n+1} (im vorigen Art.), weil eine ungerade Anzahl von Differentiationen für $x=0$ auch hier auf eine identische Gleichung führt.

Übrigens liesse sich leicht zeigen, dass die Gleichung (13) aus (8) und die Gleichung (15) aus (14) unmittelbar erhalten werden kann.

Zwischen den Coëfficienten H und K der Entwickelungen von $\Gamma(a)$ und $\frac{1}{\Gamma(a)}$ finden einige Relationen statt. Hierher gehört zunächst die aus:

$$\Gamma(a+p+1) = H_0+H_1 a+H_2 a^2+\ldots+H_n a^n+\ldots$$

$$\frac{1}{\Gamma(a+p+1)} = K_0+K_1 a+K_2 a^2+\ldots+K_n a^n+\ldots$$

sich unmittelbar ergebende Gleichung:

$$H_0 K_n+H_1 K_{n-1}+\ldots+H_{n-1} K_1+H_n K_0=0$$

welche für jedes p gilt und, wie schon oben (Art. 2) erwähnt, von Herrn Bourguet für $p=1$, also $H_0=1$, $K_0=1$ zur Berechnung der H aus den K benützt wurde.

Ganz anderer Art aber sind die folgenden Beziehungen zwischen jenen Coëfficienten, wenn $p=0$ ist.

Setzt man wieder

$$f(1+x)=\frac{1}{\Gamma(1+x)}$$

so geht die Gleichung:

$$\frac{\pi x}{\Gamma(1-x)} = \sin\pi x\,.\,\Gamma(1+x)$$

über in die folgende:

$$\pi x f(1-x) = \sin\pi x\,.\,\Gamma(1+x)$$

aus welcher sich durch $n+1$ malige Differentiation ergibt:

$$(-1)^n\pi[(n+1)f^{(n)}_{(1-x)}-xf^{(n+1)}_{(1-x)}]$$
$$=\Gamma^{(n+1)}_{(1+x)}\cdot\sin\pi x+(n+1)\Gamma^{(n)}_{(1+x)}\frac{d\sin\pi x}{dx}+\frac{(n+1)n}{1.2}\Gamma^{(n-1)}_{(1+x)}\frac{d^2\sin\pi x}{dx^2}$$
$$+\ldots+(n+1)\Gamma'_{(1+x)}\cdot\frac{d^n\sin\pi x}{dx^n}+\Gamma_{(1+x)}\cdot\frac{d^{n+1}\sin\pi x}{dx^{n+1}}$$

Da nun

$$\frac{d^m\sin\pi x}{dx^m}=\pi^m\sin(\pi x+\frac{m}{2}\pi)$$

so folgt, wenn man $x=0$ und wie bisher

$$f^{(m)}_{(1)}=m!\,K_m\,,\qquad K_0=1$$

setzt, die Gleichung:

$$(-1)^n\pi(n+1)!\,K_n=(n+1)\Gamma^{(n)}_{(1)}\cdot\pi\sin\frac{\pi}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\Gamma^{(n-2)}_{(1)}\pi^3\sin\frac{3\pi}{2}$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5}\Gamma^{(n-4)}_{(1)}\pi^5\sin\frac{5\pi}{2}+\ldots$$
$$+(n+1)\Gamma'_{(1)}\pi^n\sin\frac{n\pi}{2}+\Gamma_{(1)}\pi^{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$$

die sich indessen, wenn man berücksichtigt, dass

$$\Gamma^{(m)}_{(1)}=m!\,H_m\,,\qquad H_0=1$$

ist, in die einfachere Form:

$$K_n=(-1)^n\Big[H_n\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{3!}H_{n-2}\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi^4}{5!}H_{n-4}\sin\frac{5\pi}{2}+\ldots$$
$$+\frac{\pi^{n-1}}{n!}H_1\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi^n}{(n+1)!}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}\Big]$$

bringen lässt. Man erhält hieraus:

$$K_1=-H_1$$
$$K_2=-\frac{\pi^2}{3!}+H_2$$
$$K_3=+\frac{\pi^2}{3!}H_1-H_3$$

$$K_4 = +\frac{\pi^4}{5!} - \frac{\pi^2}{3!}H_2 + H_4$$

$$K_5 = -\frac{\pi^4}{5!}H_1 + \frac{\pi^2}{3!}H_3 - H_5$$

u. s. w. Zu diesen Gleichungen wird man übrigens auch sehr leicht durch die Bemerkung geführt, dass für jeden zwischen 0 und 1 liegenden Werth von x die Gleichung

$$x + K_1 x^2 + K_2 x^3 + \ldots$$
$$= \left[x - \frac{\pi^2 x^3}{3!} + \frac{\pi^4 x^5}{5!} - \ldots\right]\left[1 - H_1 x + H_2 x^2 - \ldots\right]$$

stattfinden muss.

Umgekehrt lässt sich auch H_n durch K_1, K_2, $\ldots K_n$ ausdrücken.

Man findet nämlich, wie nicht näher gezeigt zu werden braucht, die Gleichung:

$$H_n = (-1)^n\left[K_n + 2S_2K_{n-2} + 2S_4K_{n-4} + \ldots + (-1)^{n-1}[1+(-1)^{n-1}]S_{n-1}K_1 + (-1)^n[1+(-1)^n]S_n \cdot K_0\right]$$

worin

$$S_m = 1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \ldots$$

Die Formel schliesst mit K_0 oder mit K_1, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Man erhält hiernach:

$$H_1 = -K_1$$
$$H_2 = +2S_2 + K_2$$
$$H_3 = -2S_2K_1 - K_3$$
$$H_4 = +2S_4 + 2S_2K_2 + K_4$$
$$H_5 = -2S_4K_1 - 2S_2K_3 - K_5$$

u. s. w.

Um die letzteren Gleichungen mit den früheren für $K_1, \ldots K_5$, in Übereinstimmung zu bringen, ist zu beachten, dass die Gleichung

$$S_m = \left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right).s_m$$

stattfindet, von der schon oben Gebrauch gemacht wurde.

5.

Die im Vorhergehenden aufgestellten Relationen sind an sich und der Art ihrer Herleitung wegen, sowie in Hinsicht der numerischen Berechnung von einigem Interesse, obgleich, wie schon bemerkt wurde, diese Berechnung von Herrn Bourguet bereits ausgeführt ist. Ob sie vielleicht zur Auffindung des in der Entwickelung

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = e^{-(1-s_1)a} \cdot a(a+1)[1+A_2a^2+A_3a^3+\ldots], \quad s_1 = 0{,}5772\ldots \text{(I)}$$

bestehenden Gesetzes der anscheinend ganz unregelmässigen Vorzeichen von $A_2, A_3, \ldots$ dienen können, muss ich dahingestellt sein lassen, füge aber in dieser Hinsicht die folgende Bemerkung bei. Wenn man nämlich an Stelle der einen Reihe in der eckigen Klammer das Product zweier anderen setzt, so haben die Zeichen der Coëfficienten dieser beiden nach a fortschreitenden Reihen einen ganz regelmässigen Verlauf. Um dies zu zeigen, sei zunächst die Frage nach der Entwickelung des Ausdruckes:

$$f(a) = \frac{e^{(1-s_1)a}}{\Gamma(1+a)} \cdot \left[\frac{1-a}{1+a} \cdot \frac{a\pi}{\sin a\pi}\right]^{\frac{1}{2}}$$

die offenbar nur gelten kann, wenn a zwischen -1 und $+1$ liegt. Wird dem früher befolgten Verfahren gemäss:

$$\varphi(a) = -\log f(a), \quad \text{also} \quad f'(a) = -f(a)\varphi'(a)$$

gesetzt, so ist

$$f(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0$$

und erhält man:

$$\varphi'(a) = \frac{d\log\Gamma(1+a)}{da} - (1-s_1) + \frac{1}{2(1-a)} + \frac{1}{2(1+a)} - \frac{1}{2a} + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg} a\pi$$

Hieraus folgt nach bekannten Formeln:

$$\varphi''(a) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2+a)^2} + \frac{1}{(3+a)^2} + \frac{1}{(4+a)^2} + \dots\right]$$
$$- \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2-a)^2} + \frac{1}{(3-a)^2} + \frac{1}{(4-a)^2} + \dots\right]$$

und wenn man noch $m-2$ mal differentiirt:

$$\varphi^{(m)}(a) = (-1)^m \cdot \frac{(m-1)!}{2}\left[\frac{1}{(2+a)^m} + \frac{1}{(3+a)^m} + \dots\right]$$
$$- \frac{(m-1)!}{2}\left[\frac{1}{(2-a)^m} + \frac{1}{(3-a)^m} + \dots\right]$$

daher für $a = 0$

$$\varphi^{(m)}(o) = \frac{(m-1)!}{2} \cdot [(-1)^m - 1] \cdot s_m$$

Es ist also:

$$\varphi_{(0)}^{(2m)} = 0\ ,\ \varphi_{(0)}^{(2m+1)} = -(2m)!\, s_{2m+1}$$

Da nun

$$f^{(n)}(a) = -\Big[f^{(n-1)}(a)\varphi'(a) + (n-1)f^{(n-2)}(a)\varphi''(a) + \dots$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1.2\dots m} f^{(n-m)}(a) \cdot \varphi^{(m)}(a)$$
$$+ \dots + (n-1)f''(a)\varphi^{(n-1)}(a) + f'(a)\varphi^{(n)}(a)\Big]$$

so folgt, wenn $a = 0$ und $\frac{f_{(0)}^{(m)}}{m!} = P_m$ gesetzt wird:

$$P_n = \frac{1}{n}\Big[s_3 P_{n-3} + s_5 P_{n-5} + s_7 P_{n-7} + \dots + \frac{1-(-1)^{n-1}}{2} \cdot s_{n-1} P_1$$
$$+ \frac{1-(-1)^n}{2} \cdot s_n P_0\Big] \dots (1)$$

worin $P_0 = 1$, $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ ist.

Aus dieser Gleichung ergibt sich, dass die sämmtlichen Coëfficienten P positiv sind.

Man hat daher die Gleichung:

$$\frac{e^{(1-s_1)a}}{\Gamma(1+a)} \cdot \left[\frac{1-a}{1+a} \cdot \frac{a\pi}{\sin a\pi}\right]^{\frac{1}{2}} = 1 + P_3 a^3 + P_4 a^4 + P_5 a^5 + \dots \dots (II.$$

Es sei nun weiter die Entwickelung:

$$\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{\sin a\pi}{a\pi} = R_0 + R_2 a^2 + R_4 a^4 + \ldots + R_{2n} a^{2n} + \ldots$$

verlangt, welche ebenfalls nur gilt, wenn a zwischen -1 und $+1$ liegt, und in welcher keine ungeraden Potenzen vorkommen können. Da nun:

$$\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{\sin a\pi}{a\pi} = \left[1+a^2+a^4+\ldots\right]\left[1-\frac{(a\pi)^2}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{(a\pi)^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots\right]$$

so ergibt sich die Gleichung:

$$R_{2n} = 1-\frac{\pi^2}{3!}+\frac{\pi^4}{5!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$$

welche sich, da ferner:

$$\frac{\sin\pi}{\pi} = 1-\frac{\pi^2}{3!}+\frac{\pi^4}{5!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi^{2n+2}}{(2n+3)!}+\ldots$$

ist, durch die folgende:

$$R_{2n} = (-1)^n\cdot\pi^{2n+2}\left[\frac{1}{(2n+3)!}-\frac{\pi^2}{(2n+5)!}+\frac{\pi^4}{(2n+7)!}-\ldots\right]$$

ersetzen lässt. Die darin vorkommende Reihe nimmt schon vom ersten Gliede an ab, hat einen Zeichenwechsel und somit eine positive Summe. Das Zeichen von R_{2n} stimmt also mit jenem des Factors $(-1)^n$ überein und ist positiv, wenn n gerade, negativ, wenn n ungerade ist. Die Reihe (2) hat daher einen regelmässigen Zeichenwechsel schon vom ersten Gliede $R_0 = 1$ an. Versieht man, um dies ausdrücklich anzugeben, R_2, R_6, R_{10},... mit dem negativen Vorzeichen, so besteht das Ergebniss dieser Betrachtung vorerst darin, dass in der Gleichung

$$\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{\sin a\pi}{a\pi} = 1-R_2 a^2+R_4 a^4-R_6 a^6+\ldots$$

sämmtliche Coëfficienten R an sich positiv sind.

Nun lässt sich leicht zeigen, dass die Quadratwurzel einer nach Potenzen einer Grösse fortschreitenden Reihe mit regel-

mässig abwechselnden Zeichen wieder eine Reihe mit demselben regelmässigen Zeichenwechsel ist, dass daher in der Gleichung

$$\left[\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{\sin a\pi}{a\pi}\right]^{\frac{1}{2}} = 1 - Q_2 a^2 + Q_4 a^4 - Q_6 a^6 + \dots \quad \dots(\text{III})$$

die Coëfficienten Q insgesammt positiv sind. Diese Coëfficienten können nun allerdings mittelst der oben für R_{2n} angegebenen Formel, aber nicht ohne grosse Umständlichkeit gefunden werden. Kürzer und übersichtlicher ergeben sich dieselben auf dem früher befolgten Wege. Es sei

$$F(a) = \left[\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{\sin a\pi}{a\pi}\right]^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\psi(a) = -\log F(a), \quad \text{also} \quad F'(a) = -F(a)\psi'(a)$$

dann ist

$$\psi(a) = +\frac{1}{2}\log(1-a) + \frac{1}{2}\log(1+a) - \frac{1}{2}\log\frac{\sin a\pi}{a\pi}$$

und

$$\psi'(a) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2-a} + \frac{1}{3-a} + \frac{1}{4-a} + \dots\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2+a} + \frac{1}{3+a} + \frac{1}{4+a} + \dots\right]$$

Hieraus folgt:

$$\psi^{(m)}(a) = \frac{(m-1)!}{2}\left[\frac{1}{(2-a)^m} + \frac{1}{(3-a)^m} + \dots\right] + (-1)^m \cdot \frac{(m-1)!}{2}\left[\frac{1}{(2+a)^m} + \frac{1}{(3+a)^m} + \dots\right]$$

und wenn $a = 0$ gesetzt wird:

$$\psi_{(0)}^{(m)} = (m-1)!\,\frac{1+(-1)^m}{2}\cdot(s_m - 1)$$

Es ist daher:

$$\psi_{(0)}^{(2m+1)} = 0, \quad \psi_{(0)}^{(2m)} = (2m-1)!\,(s_{2m}-1), \quad \psi(0) = 0$$

Aus der Gleichung:

$$F^{(n)}(a) = -\Big[F^{(n-1)}(a)\psi'(a)+(n-1)F^{(n-2)}(a)\psi''(a)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}F^{(n-3)}(a)\psi'''(a)+\ldots$$
$$+(n-1)F'(a)\psi^{(n-1)}(a)+F(a)\psi^{(n)}(a)\Big]$$

folgt nun, wenn $a=0$ und, gemäss der Gleichung (III),

$$\frac{F^{(2n)}_{(0)}}{(2n)!} = (-1)^n Q_{2n}$$

gesetzt wird, die Relation:

$$Q_{2n} = \frac{1}{2n}\big[(s_2-1)Q_{2n-2}-(s_4-1)Q_{2n-4}+(s_6-1)Q_{2n-6}-\ldots$$
$$+(-1)^n(s_{2n}-1)Q_2+(-1)^{n+1}(s_{2n}-1)Q_0\big] \quad \ldots(2)$$

worin $Q_0=1$ ist.

Mittelst derselben lassen sich die Coëfficienten Q_2, Q_4,... nach einander berechnen; dass aber diese Coëfficienten insgesammt positive Werthe erhalten, wie oben bereits festgestellt wurde, lässt sich aus dieser Relation nicht leicht erkennen.

Dies vorausgesetzt, ergibt sich nun durch Multiplication der Gleichungen (II) und (III) die folgende:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = e^{-(1-s_1)a}.a(a+1)[1+P_3a^3+P_4a^4+\ldots][1-Q_2a^2+Q_4a^4-\ldots] \quad \ldots(IV)$$

was zu zeigen war.

Aus (I) und (IV) folgt

$$1+A_2a^2+A_3a^3+\ldots$$
$$=[1+P_3a^3+P_4a^4+\ldots][1-Q_2a^2+Q_4a^4-\ldots]$$

und hieraus geht hervor, dass aus der Entwickelung des Products der rechter Hand stehenden Reihen, wovon jede nur innerhalb des Intervalles -1 bis $+1$ von a gilt, die für alle möglichen Werthe von a convergirende Reihe linker Hand erhalten wird.

6.

Die in fast allen bisherigen Formeln vorkommenden Grössen

$$s_n = \frac{1}{(p+1)^n} + \frac{1}{(p+2)^n} + \frac{1}{(p+3)^n} + \cdots$$

unterscheiden sich, wenn $p > 0$ ist, umsoweniger von Null, und wenn $p = 0$ ist, umsoweniger von der Einheit, je grösser n genommen wird, sie üben aber durch diese kleinen Unterschiede nicht nur auf die Werthe, sondern auch auf die Zeichen der Coëfficienten $H, K, \ldots$, welche von ihnen abhängen, einen bestimmenden Einfluss. Man weiss, dass die von Euler (Instit. calc. integr. Vol. I, Cap. VII) gefundene Relation:

$$\frac{1}{(n-1)(p+1)^{n-1}} < s_n < \frac{1}{(n-1)p^{n-1}} \qquad \ldots(1)$$

wodurch zwei der Grösse s_n mehr oder weniger genau sich anschliessende Werthe bestimmt sind, bei der Entwickelung mancher Näherungsformeln zur Anwendung kommen. Es sei daher gelegentlich bemerkt, dass auf einem Wege, der von dem von Euler befolgten verschieden ist, noch andere, die Summe s_n enger einschliessende Relationen gefunden werden können.

Zunächst lässt sich die obere Grenze durch einen Ausdruck ersetzen, dessen Werth näher an s_n liegt. Da

$$\frac{1}{(p+1)^{n-1}} < \frac{1}{p^{n-1}}$$

so ist auch

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p^{n-1}} + \frac{1}{(p+1)^{n-1}}\right] < \frac{1}{p^{n-1}}$$

folglich:

$$s_n < \frac{1}{2n-2}\left[\frac{1}{p^{n-1}} + \frac{1}{(p+1)^{n-1}}\right] < \frac{1}{(n-1)p^{n-1}}$$

Man kann auch dadurch zu einer den Werth von s_n enger einschliessenden Relation gelangen, dass die untere Grenze der Formel (1) um einen Betrag vergrössert, die obere dagegen um einen solchen verkleinert wird. Hierzu führt der Satz, dass, unter ε und ε_1 positive echte Brüche verstanden:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x)+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}\left(x+\frac{\varepsilon h}{m+1}\right)\ldots(2)$$

ist, wenn $hf^{(m+1)}(z)$ und $f^{(m+2)}(z)$ von $z=x$ bis $z=x+h$ entgegengesetzte Zeichen haben; dass dagegen

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x)+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}\left(x+\frac{h}{\varepsilon_1 m+1}\right)\ldots(3)$$

ist, wenn $hf^{(m+1)}(z)$ und $f^{(m+2)}(z)$ gleiche Zeichen behalten.[1]

Wird nun $x=p$, $f(p)=s_n$ gesetzt, so ist, wie leicht zu sehen:

$$\frac{d^\mu f(p)}{dp^\mu}=(-1)^\mu . n(n+1)\ldots(n+\mu-1).s_{n+\mu}$$

und findet die Bedingung der Gleichung (2) für alle Werthe von μ statt, wenn h positiv, jene der Gleichung (3) dagegen, wenn h negativ ist. Setzt man daher $h=+1$ in (2) und $h=-1$ in (3), ferner in beiden Gleichungen $m=2$, so ergibt sich:

$$f(p+1)=f(p)+f'(p)+\frac{1}{2}f''\left(p+\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

$$f(p-1)=f(p)-f'(p)+\frac{1}{2}f''\left(p-\frac{1}{2\varepsilon_1+1}\right)$$

Hierin ist nun

$$f(p+1)-f(p)=-\frac{1}{(p+1)^n},\quad f(p-1)-f(p)=\frac{1}{p^n}$$

und

$$f'(p)=-ns_{n+1}$$

daher:

$$s_{n+1}=\frac{1}{n(p+1)^n}+\frac{1}{2n}f''\left(p+\frac{\varepsilon}{3}\right)\qquad\ldots(4)$$

$$s_{n+1}=\frac{1}{np^n}-\frac{1}{2n}f''\left(p-\frac{1}{2\varepsilon_1+1}\right)\qquad\ldots(5)$$

Da $f''(z)$ immer positiv ist, so erhält man hieraus, nebenbei bemerkt, die Relation

---

[1] Die Herleitung dieses Satzes enthält meine Abhandlung: „Der Rest der Taylor'schen Reihe." (Denkschr. Bd. XXVIII, S. 260.)

$$\frac{1}{n(p+1)^n} < s_{n+1} < \frac{1}{np^n}$$

welche mit der Euler'schen (1) zusammenfällt, wenn $n-1$ für n geschrieben wird.

Dies vorausgeschickt, berücksichtige man, dass $f''(z)$ abnimmt, wenn z wächst, und dass also, wenn für ε und ε_1 ihr grösster Werth 1 gesetzt wird:

$$f''\left(p+\frac{\varepsilon}{3}\right) > f''\left(p+\frac{1}{3}\right), \quad f''\left(p-\frac{1}{2\varepsilon_1+1}\right) > f''\left(p-\frac{1}{3}\right)$$

ist. Aus (4) und (5) folgt dann:

$$s_{n+1} > \frac{1}{n(p+1)^n} + \frac{1}{2n} f''\left(p+\frac{1}{3}\right)$$

$$s_{n+1} < \frac{1}{np^n} - \frac{1}{2n} f''\left(p-\frac{1}{3}\right)$$

Da nun

$$f''(q) = n(n+1)\left[\frac{1}{(q+1)^{n+2}} + \frac{1}{(q+2)^{n+2}} + \ldots\right]$$

so ergibt sich, wenn einmal $p+\frac{1}{3}$ und dann $p-\frac{1}{3}$ für q gesetzt wird:

$$s_{n+1} > \frac{1}{n(p+1)^n} + \frac{n+1}{2}\left[\frac{1}{\left(p+\frac{4}{3}\right)^{n+2}} + \frac{1}{\left(p+\frac{7}{3}\right)^{n+2}} + \ldots\right] \ldots (6)$$

$$s_{n+1} < \frac{1}{np^n} - \frac{n+1}{2}\left[\frac{1}{\left(p+\frac{2}{3}\right)^{n+2}} + \frac{1}{\left(p+\frac{5}{3}\right)^{n+2}} + \ldots\right] \ldots (7)$$

Hierdurch sind die Ausdrücke gegeben, welche man in der Euler'schen Formel zur untern Grenze addiren und von der obern abziehen muss, um dem Werthe von s_{n+1} noch näher zu kommen. Die Reihenform dieser Correcturen lässt sich übrigens umgehen, wenn man beachtet, dass vermöge (1):

$$\frac{1}{(q+1)^{n+2}} + \frac{1}{(q+2)^{n+2}} + \ldots > \frac{1}{(n+1)(q+1)^{n+1}}$$

ist und dass, wenn man für q wieder die angegebenen Werthe setzt, aus (6) und (7) die noch verstärkten Ungleichheiten:

$$s_{n+1} > \frac{1}{n(p+1)^n} + \frac{1}{2\left(p+\frac{4}{3}\right)^{n+1}}$$

$$s_{n+1} < \frac{1}{np^n} - \frac{1}{2\left(p+\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

erhalten werden. Hiernach findet also die Relation:

$$\frac{1}{(n-1)(p+1)^{n-1}} + \frac{1}{2\left(p+\frac{4}{3}\right)^n} < s_n < \frac{1}{(n-1)p^{n-1}} - \frac{1}{2\left(p+\frac{2}{3}\right)^n} \quad \ldots(8)$$

statt, um deren Herleitung es sich handelte. Sie ist, wie ich glaube, als Ergänzung der oft in Anwendung kommenden Formel (1) bemerkenswerth, der zweigliederigen Ausdrücke wegen aber weniger als diese für die Anwendung geeignet.

Übrigens lässt sich mittelst der Gleichung (2) für die obere Grenze auch ein eingliederiger Ausdruck finden, welcher s_n näher liegt als jener der Formel (1).

Für $m=1$ ergibt sich die Gleichung:

$$f(x+h) = f(x) + hf'\left(x+\frac{\varepsilon h}{2}\right)$$

welche gilt, wenn $hf''(z)$ und $f'''(z)$ für alle zwischen x und $x+h$ liegenden Werthe von z entgegengesetzte Zeichen haben. Dieser Bedingung wird hier entsprochen, wenn man $x = p - \frac{1}{2}$ und $h=1$ setzt, wofür die Gleichung in:

$$f\left(p+\frac{1}{2}\right) = f\left(p-\frac{1}{2}\right) + f'\left(p-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

übergeht.

Da nun $f''(z)$ stets negativ bleibt und dem absoluten Werthe nach abnimmt, wenn z wächst, da ausserdem ε den Werth 1 nicht erreichen kann, so ist:

$$f'\left(p-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right) < f\left(p-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

folglich:

$$f\left(p+\frac{1}{2}\right) < f\left(p-\frac{1}{2}\right) + f''(p)$$

Nun ist

$$f\left(p+\frac{1}{2}\right) - f\left(p-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^n}$$

und

$$f''(p) = -ns_{n+1}$$

daher:

$$-\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^n} < -ns_{n+1}$$

oder, wenn man $n-1$ für n setzt:

$$s_n < \frac{1}{(n-1)\left(p+\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \qquad \ldots(9)$$

Diese Relation ist nicht neu; sie wurde meines Wissens zuerst von Binet (Journ. de l'école polyt. T. 16, p. 228) bemerkt und angewendet. Ob sie durch numerische Vergleichung oder auf einem andern Wege gefunden wurde, lässt sich nicht ersehen, da Binet einen Beweis nicht mitgetheilt hat.

Der Ausdruck (9) kommt dem entsprechenden in (8) in mehreren von mir berechneten besonderen Fällen sehr nahe.

Hammerl, Beiträge zur Kenntniss der Hydratbildung von Salzen 1004
Weselsky u. *Benedikt*, Über einige Nitroproducte aus der Reihe des Brenzcatechins. (Mit 3 Holzschnitten.) [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 1013
Allé, Beiträge zur Theorie des Doppelverhältnisses und zur Raumcollineation. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1021
XIII. Sitzung vom 19. Mai 1882: Übersicht 1035
Winckler, Über die Entwicklung einer von dem Euler'schen Integrale zweiter Gattung abhängiger Ausdrücke in Reihen. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 1039

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. = 4 RMk.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften“ herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.

DUE JUN 1 1922

Canceled

3499[illegible]0

JAN -- [illegible]